

1. ΘΕΜΑ 2 – 29830

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i. $f \cdot g$

(Μονάδες 7)

ii. $\frac{f}{g}$

(Μονάδες 8)

2. ΘΕΜΑ 2 – 29831

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το διάστημα $(-1, 1)$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{x}$, να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

(Μονάδες 10)

3. ΘΕΜΑ 2 – 35168

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g και h ώστε :

$$f(x) = \ln(1 + e^x), g(x) = 2\ln x \text{ και } h(x) = \ln(1 + x^2).$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και h είναι ίσες.

(Μονάδες 8)

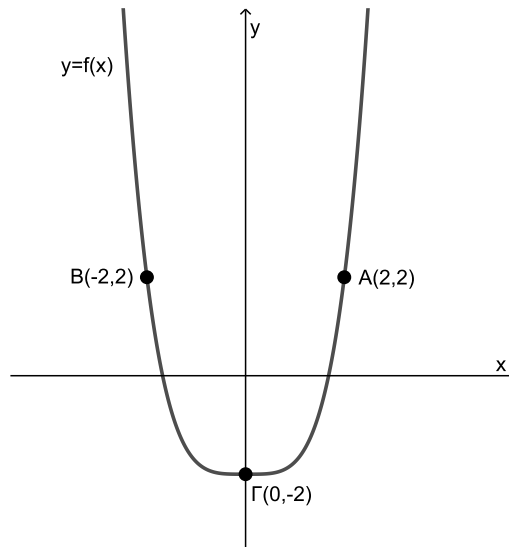
4. ΘΕΜΑ 2 – 28304

Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, διέρχεται από τα σημεία $A(2, 2)$, $B(-2, 2)$ και $\Gamma(0, -2)$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = |x|$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-2)$ και $f(0)$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές $(g \circ f)(2)$, $(g \circ f)(-2)$ και $(g \circ f)(0)$. (Μονάδες 8)

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται παρακάτω. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g \circ f$. (Μονάδες 9)



5. ΘΕΜΑ 2 – 26637

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \ln x$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \cdot g$. (Μονάδες 9)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων

των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$, που ορίσατε στα ερωτήματα (α) και (β). (Μονάδες 7)

6. ΘΕΜΑ 2 – 29835

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = 2 - x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 5)

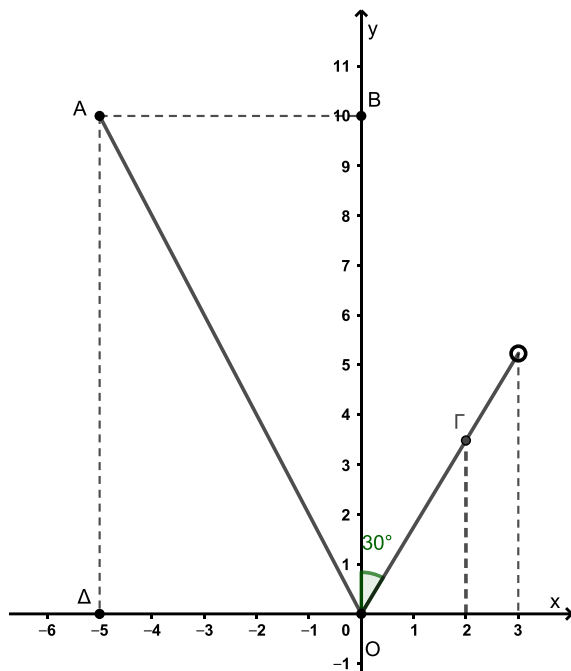
β) Να αποδείξετε ότι για $x \in (-\infty, 3]$ η $(f \circ g)(x) = \sqrt{3-x} - 1$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = (f \circ g)(x)$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφή της.

(Μονάδες 10)

7. ΘΕΜΑ 2 – 26603

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Γ ; (Μονάδες 5)

8. ΘΕΜΑ 2 – 27317

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0, 2]$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο $[0, 2]$ (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 2]$. (Μονάδες 05)

ii. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . (Μονάδες 03)

iii. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες. (Μονάδες 07)

9. ΘΕΜΑ 2 – 35171

Δίνονται οι συναρτήσεις g και h ώστε : $g(x) = 2\ln x$, $x > 0$ και $h(x) = \ln(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη (Μονάδες 5)

ii. $g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$, με $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ g^{-1}$. (Μονάδες 10)

10. ΘΕΜΑ 2 - 35170

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ώστε:

$$f(x) = \ln(1 + e^x) \text{ και } g(x) = 2\ln x.$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f + g$. (Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f + g$ ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 9)

11. ΘΕΜΑ 2 – 29926

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \ln(x-2) + 5$ για κάθε $x > 2$ και $g(x) = 2x-1$ με $x \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1} . (Μονάδες 7)

β)

i. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)

12. ΘΕΜΑ 2 - 32695

Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, σύνολο τιμών το $[-\frac{1}{2}, 1)$ και τύπο $f(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{x+2}}$.

Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $[-\frac{1}{2}, 1)$, σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και τύπο

$$g(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x} \right)^2. \text{ Με δεδομένο ότι η συνάρτηση } f \text{ είναι 1-1,}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε x που ανήκει στο $[0, 1)$.

(Μονάδες 06)

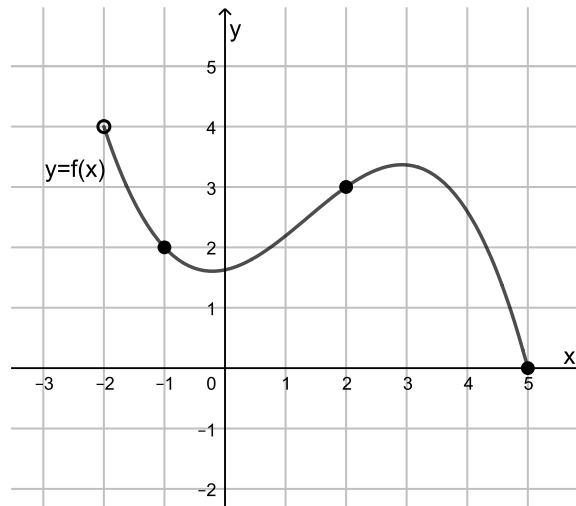
γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f , C_g των συναρτήσεων f , g αντίστοιχα δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 07)

13. ΘΕΜΑ 2 - 28300

Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη γραφική παράσταση της f να βρείτε:

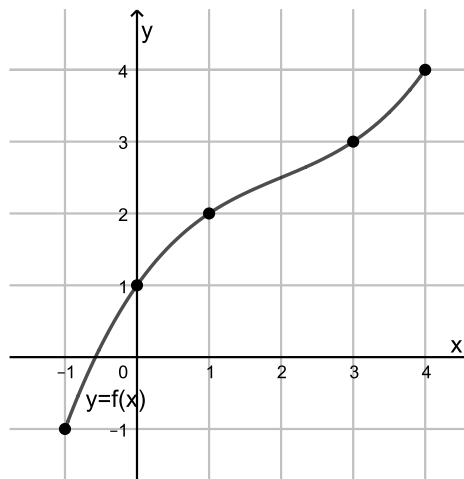
- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f , (Μονάδες 6)
- β) τις τιμές $f(-1)$, $f(2)$ και $f(5)$, (Μονάδες 6)
- γ) το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f , εφόσον υπάρχουν, (Μονάδες 7)
- δ) την τιμή της σύνθεσης $f \circ f$ στο -1 . (Μονάδες 6)



14. ΘΕΜΑ 2 – 28299

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = [-1, 4]$ και με γραφική παράσταση C_f που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη C_f :

- α) να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f , (Μονάδες 8)
- β) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$, (Μονάδες 8)
- γ) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} . (Μονάδες 9)



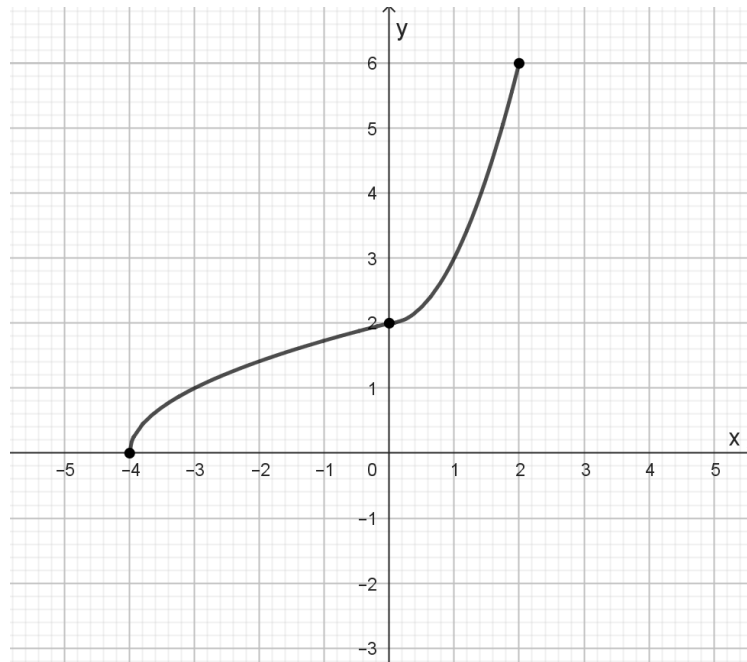
15. ΘΕΜΑ 2 - 27277

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης f . Με τη βοήθεια του σχήματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f^{-1}(f(6))$. (Μονάδες 8)

γ) Στο σύστημα αξόνων που ακολουθεί να χαράξετε την γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)



16. ΘΕΜΑ 2 - 31528

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

(Μονάδες 14)

β) Να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 11)

17. ΘΕΜΑ 2 - 26602

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ και $g(x) = x - 2$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h , με $h(x) = |g(x)|$. (Μονάδες 7)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f και h . (Μονάδες 10)

18. ΘΕΜΑ 2 - 24991

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2\ln x + 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

(Μονάδες 09)

γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 1 - \ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του \mathbb{R} στο οποίο ισχύει $f = g$.

(Μονάδες 08)

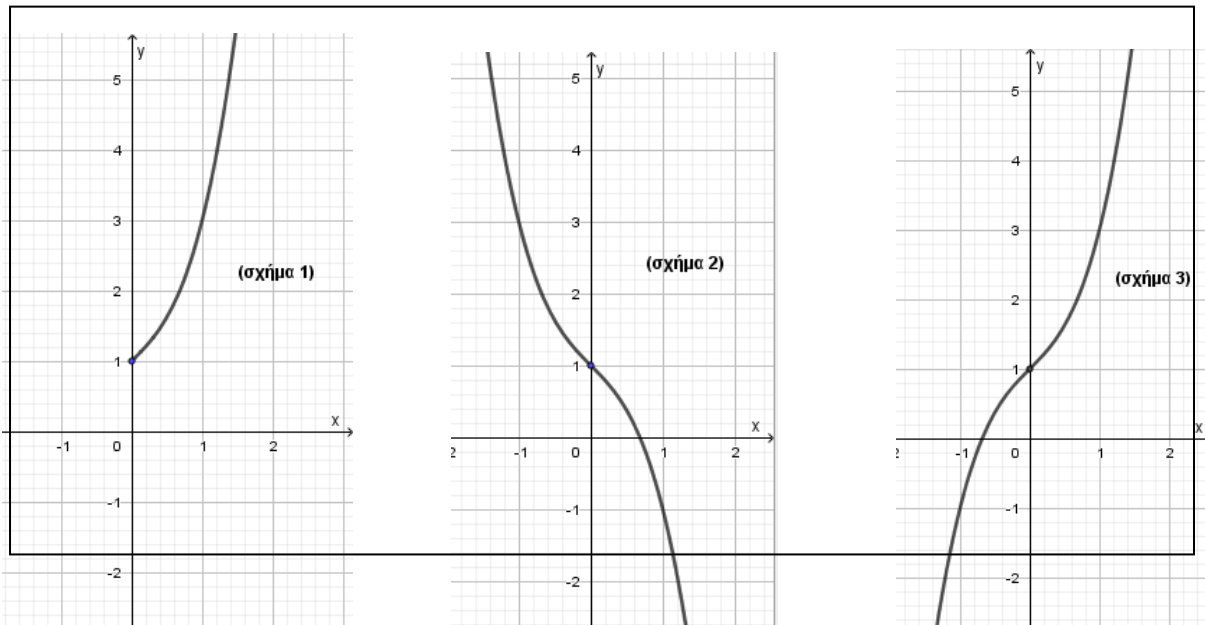
19. ΘΕΜΑ 2 - 23642

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 07)

β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 07)

γ)

i. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $|f|$.

(Μονάδες 06)

ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|x^3 + x + 1| = 2023$.

(Μονάδες 05)

20. ΘΕΜΑ 2 - 23198

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1, x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1} . (Μονάδες 9)

Έστω $f^{-1}(x) = (x+1)^2, x \geq -1$

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} . (Μονάδες 9)

21. ΘΕΜΑ 2 - 24569

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f = [0,1]$. (Μονάδες 05)

β)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι “1-1”. (Μονάδες 10)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 0, x \in [0,1]$.

(Μονάδες 10)

22. ΘΕΜΑ 2 - 23216

Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο \mathbb{R} της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} . (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx' και για ποιες είναι πάνω από τον xx' . (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$ (Μονάδες 10)

23. ΘΕΜΑ 2 - 28477

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = e^{3x+2}, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g . (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε την συνάρτηση gof . (Μονάδες 08)

γ) Αν $g(f(x)) = 6x + 4, x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(gof)(x) - \eta\mu^2 x - 4}{x}$$

(Μονάδες 13)

24. ΘΕΜΑ 2 – 24768

Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = \sqrt{4x - 3}$.

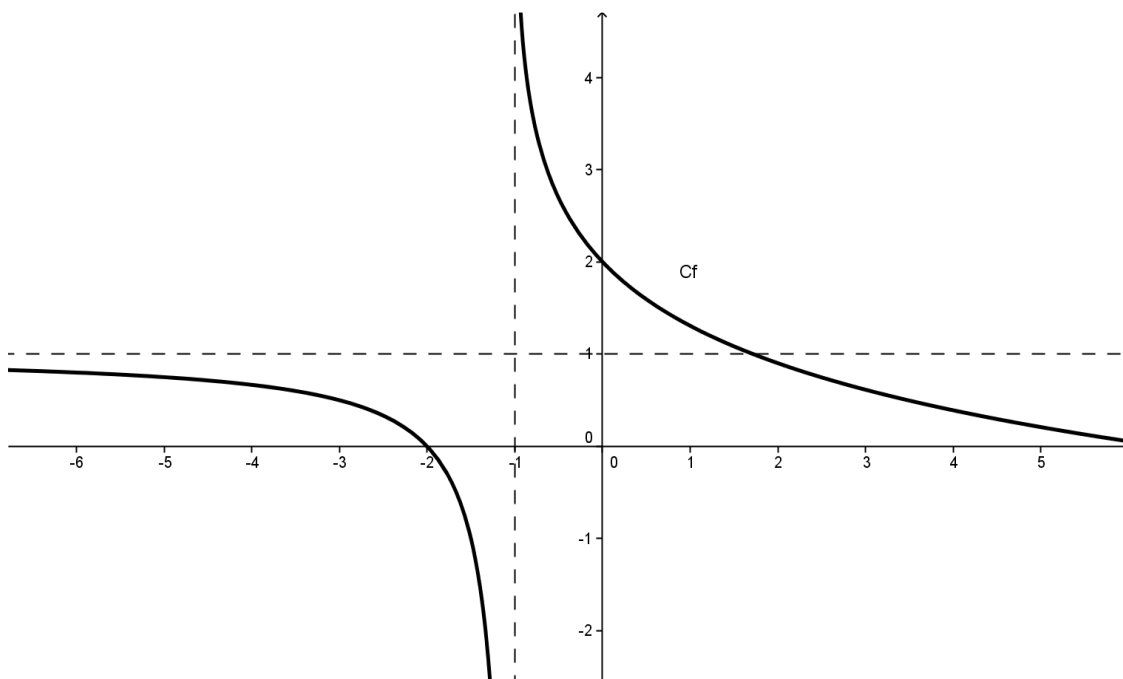
α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq \frac{3}{4}$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = g \circ f$. (Μονάδες 9)

γ) Αν $h(x) = |2x - 1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x + 1} - 1}$ (Μονάδες 10)

25. ΘΕΜΑ 2 – 23314

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη -2 και τον άξονα $y'y$ σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2 .



α) Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 6)

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(f(x))$ (Μονάδες 7)

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

26. ΘΕΜΑ 2 – 23217

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (Μονάδες 7)

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε

i. το πεδίο ορισμού της $f \cdot g$ (Μονάδες 4)

ii. το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$. (Μονάδες 6)

27. ΘΕΜΑ 2 - 23196

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

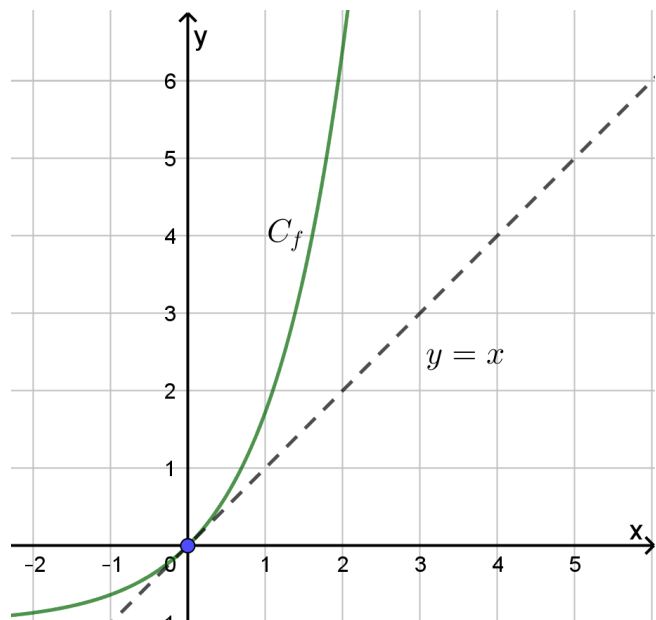
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 9)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και της ευθείας $y=x$, η οποία εφάπτεται της C_f στο μοναδικό κοινό τους σημείο, την αρχή των αξόνων. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .

(Μονάδες 9)



28. ΘΕΜΑ 2 - 23641

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(x)$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $\alpha^2 < \alpha$, τότε να αποδείξετε ότι

$\lim_{x \rightarrow +\infty} ([f(\alpha^2 - \alpha) - f(0)] x) = -\infty$ (Μονάδες 09)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - 1) = f(0)$.

(Μονάδες 08)

29. ΘΕΜΑ 2 - 34024

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^{2x}}$. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε γραφική παράσταση:

α) Να βρείτε

i. Την μονοτονία της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)

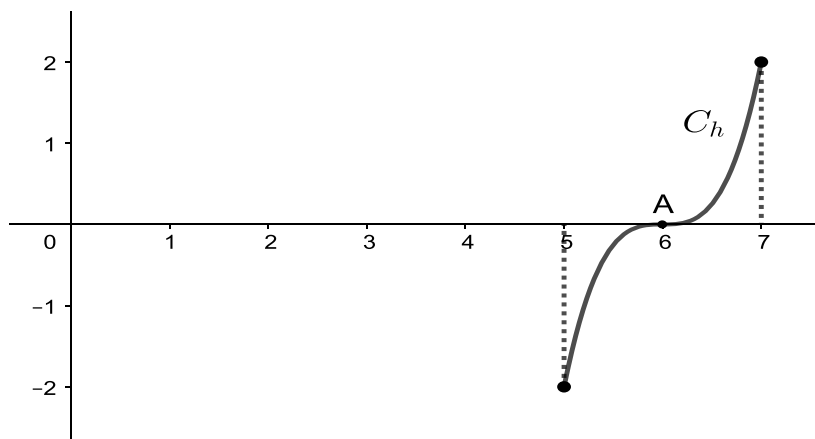
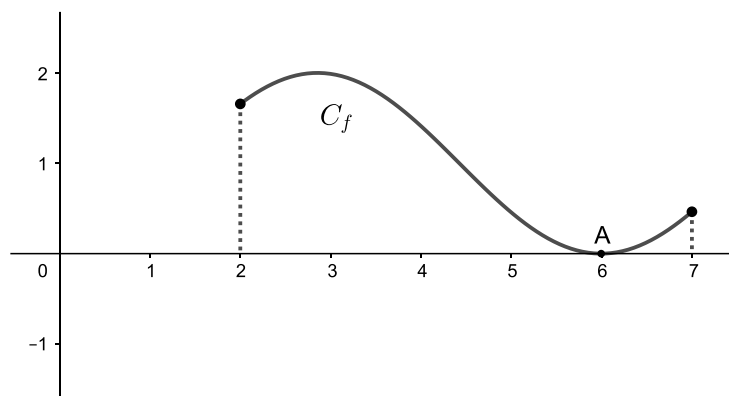
ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

30. ΘΕΜΑ 2 – 36839

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 συνεχών συναρτήσεων των f και h , οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h . (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο πεδίο ορισμού τους. (Μονάδες 10)

ii. Παίρνουν την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τους. (Μονάδες 09)

31. ΘΕΜΑ 4 – 29838

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x \neq 0$ ισχύει:

$$xf(x) + \sigma\upsilon\nu x = 1 - x^2 \eta\mu \frac{1}{x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{x} = 0$ (Μονάδες 4)

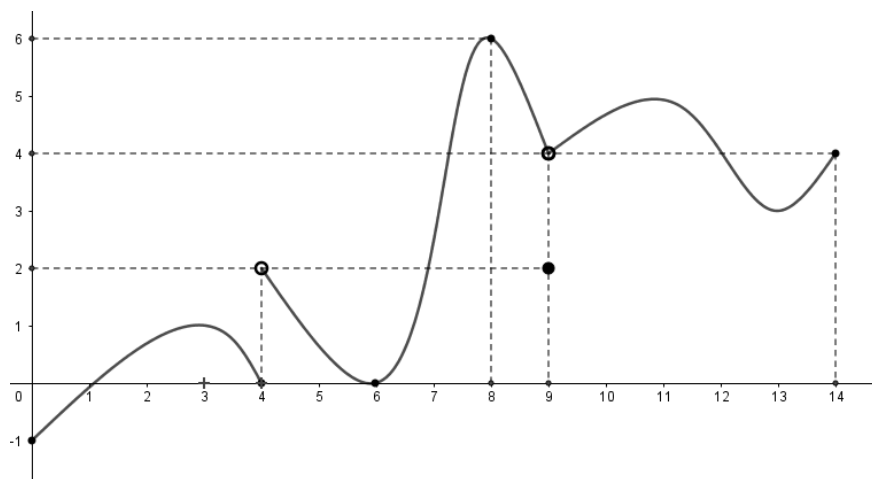
ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$. (Μονάδες 7)

32. ΘΕΜΑ 2 – 27318

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο έξι και ο οριζόντιος άξονας εφάπτεται στη γραφική της παράσταση στο σημείο αυτό.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow 14} f(x)$

v. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

33. ΘΕΜΑ 2 – 29834

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9x^2 + 16} - \frac{5}{2} \ln(8x + 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

(Μονάδες 9)

34. ΘΕΜΑ 4 – 26640

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^3 + 2x$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το \mathbb{R} .

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 5)

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

35. ΘΕΜΑ 2 – 31548

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x) - 2x| \leq (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(1) = 2$.

(Μονάδες 10)

β) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

(Μονάδες 10)

γ) η f είναι συνεχής στο 1.

(Μονάδες 5)

36. ΘΕΜΑ 3 – 28684

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa, \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$$

Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x) \leq \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 2$

(Μονάδες 04)

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε το $f(0)$.

(Μονάδες 04)

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού:

$$\left| f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \right| = -f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \text{ κοντά στο } 0$$

Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 08)

37. ΘΕΜΑ 2 – 25749

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f = [0,2) \cup (2,3) \cup (3,5]$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες $(0,0)$ και $(4,0)$. Επίσης, δίνεται ότι $f(1)=1$.

Με βάση το παρακάτω σχήμα:

α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

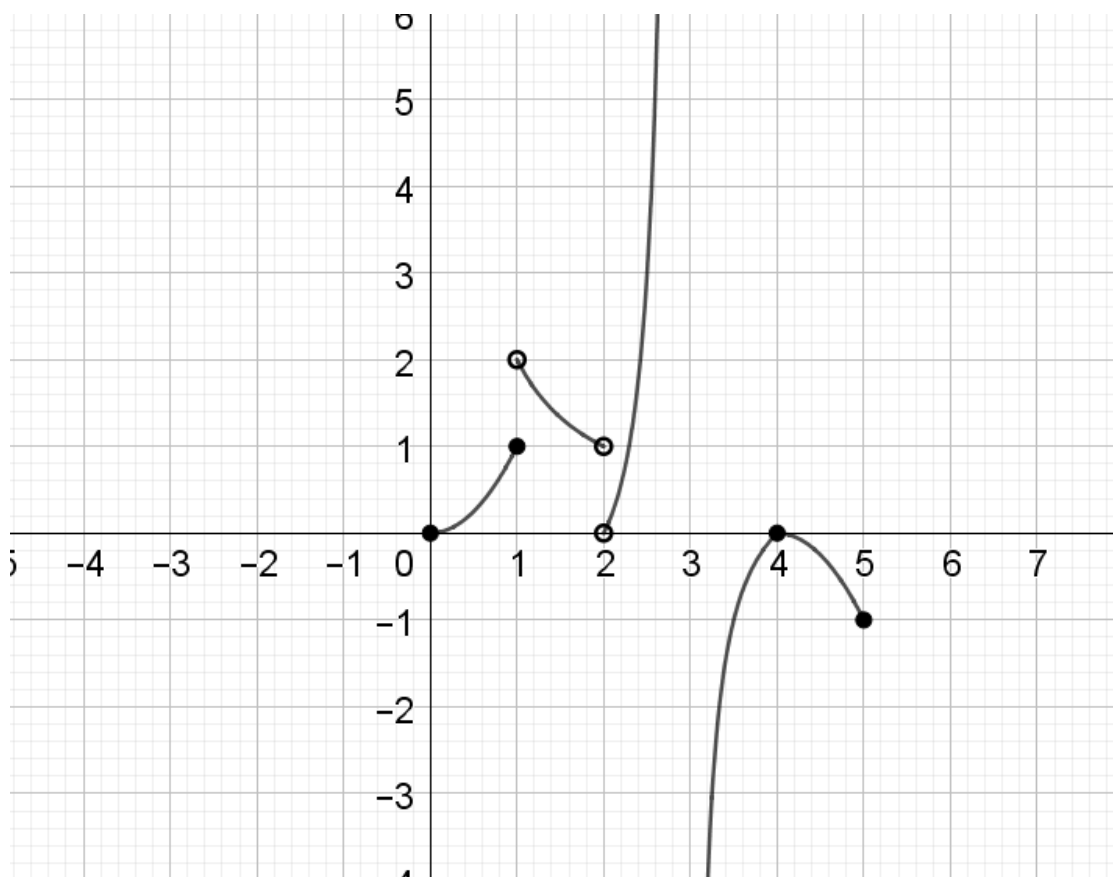
β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) να βρείτε τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$

(Μονάδες 10)



38. ΘΕΜΑ 3 – 24761

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2023 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2022$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2022$. (Μονάδες 10)

39. ΘΕΜΑ 2 – 23209

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2 - 1, x \leq 1$.

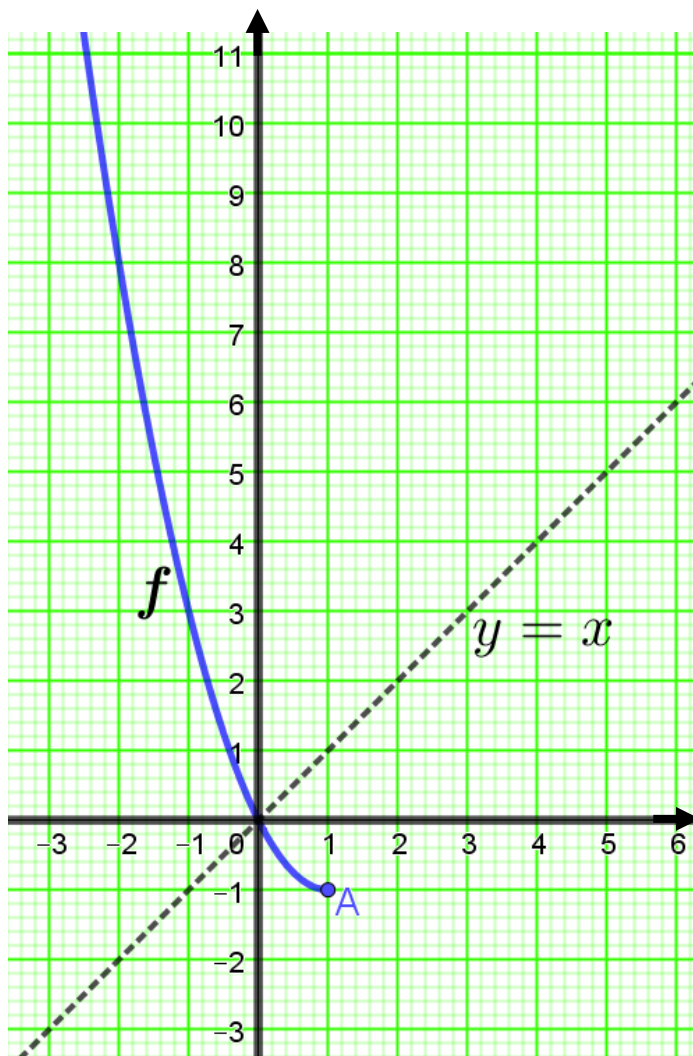
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της f και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .



(Μονάδες 8)

40. ΘΕΜΑ 2 – 24767

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 12)

41. ΘΕΜΑ 4 – 23106

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο $[0, \pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε: $(g \circ f)(x) = |\sin x|$, για κάθε $x \in [0, \pi]$.

α)

i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta \mu x|$. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. (Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f . (Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h: (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x)-x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου

ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) \quad (\text{Μονάδες 07})$$

42. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 1]$.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x^2)$

β) $f(x-4)$

γ) $f(\ln x)$

43. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} είναι περιττή. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[-\beta, -\alpha]$.

44. α) Για κάθε $\alpha > 0$, να δείξετε ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x}$ με $x > 0$.

45. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$.

γ) Χρησιμοποιώντας τις f, g να δικαιολογήσετε ότι $(g \circ f)(x) \neq g(x) \cdot f(x)$.

δ) Να εξετάσετε αν για τις παραπάνω συναρτήσεις f, g οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι ίσες.

46. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} , για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f .

47. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + 1}{x^2 - 1}, & x < -1 \\ \ln(x + \beta), & x \geq -1 \end{cases}$$

να έχει όριο πραγματικό αριθμό στο $x_0 = -1$.

48. Δίνεται η συνάρτηση f με $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \eta \mu \frac{\pi(x-1)}{2} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\pi}{2}. \text{ Να υπολογίσετε τα όρια:}$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$$

49. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \text{ της } f(x) = \frac{x-2}{(x-1)(x+2)} \text{ στο } x_0 = -2$$

$$\beta) \text{ της } f(x) = \frac{x^3 + x^2}{|x+1|} \text{ στο } x_0 = -1$$

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε τα όρια της f στα άκρα του D_f .

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f .

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f αφού πρώτα αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

51. Αν $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

52. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x-1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

γ) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f^{-1} .

δ) Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων f και f^{-1} .

53. Να δείξετε ότι:

α) η εξίσωση $(x+1)2^{x+1} = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 0)$

β) η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.

54. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

55. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x$ και $g(x) = \sin 2x$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(0, \frac{\pi}{4})$.

56. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{3}$$

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 έτσι ώστε $f(x_0) = \frac{3}{2}$.

58. Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $[\alpha, \beta]$, τότε

α) να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$

τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$

β) να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό.

59. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln x_0 = 1.$$

60. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(x) = x^5 + x + 1$, $x \in [-1, 0]$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

61. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 2)x^3 + (\mu + 1)x + 1}{\mu x^2 + 1}, \text{ αν } \mu \in \mathbb{R}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \lambda x - \mu), \text{ αν } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x}{\alpha^x + 1}, \text{ αν } \alpha > 0$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x + 2^{x+1}}{\alpha^{x+1} + 2^x}, \text{ αν } \alpha > 0$$

62. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta \mu \frac{1}{x}\right)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \cdot \eta \mu \frac{1}{x}\right)$$

63. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = \ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.

β) Να μελετήσετε την $f \circ g$ ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρεθεί (στην περίπτωση που υπάρχει) η $(f \circ g)^{-1}$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - 2}{x^2 + x - 6}$

64. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

$$\alpha) f(x) = \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$\beta) g(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-6}$$

$$\gamma) h(x) = \frac{e^x}{(x^2-1)^2 + x^2 - 2x + 1}$$

65. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ όταν $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = -x^2 + 2x$

66. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \sqrt{4x^2 + 1}\right)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{2004^2 x^2 + 1}}{x}$$

67. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{x-2} \left(\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}\right)\right]$$

68. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$,

να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda^2 - 4)x^5 + (\lambda - 2)x^3 + x + 1}{(\lambda + 2)x^3 + 2x^2 + 3x + 1}$

69. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}, & 0 \leq x < 1 \\ \gamma, & x = 1 \\ ax + \beta, & x > 1 \end{cases}$, με $a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(2, -1)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε τις τιμές των a, β και γ .

70. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 5x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

71. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει: $|x \cdot f(x) - \eta \mu x| \leq \eta \mu^2 x$. Να βρείτε το $f(0)$.

72. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{2-x}}{2x^2+x-3}, & x \in (1, 2] \\ \beta + 5, & x = 1 \\ \frac{\alpha \eta \mu(8x-8)}{x-1}, & x < 1 \end{cases}$

α) Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

β) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

73. Δίνονται $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ και $g(x) = \frac{1}{2}$ ορισμένες στο $[0, \sqrt{e-1}]$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g .

74. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-3)^2} + 5, & x < 3 \\ -\frac{1}{(x-3)^2}, & x > 3 \end{cases}$

75. Η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$.

76. α) Να μελετήσετε τη μονοτονία της $f(x) = \alpha^x - x$, $0 < \alpha < 1$

β) Αν $0 < \alpha < 1$, να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση:

$$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = (\lambda^2-4) - (\lambda-2)$$

77. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης: $f(x) = \begin{cases} e^x + 3, & x \in (-\infty, 0] \\ -\ln x + 8, & x \in (0, e) \end{cases}$

78. Δίνεται η $f(x)=x^3$ με πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ και η συνάρτηση $g(x)=\ln(x^2-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{f(x)-2x+1}$

79. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{1-x} + 3$.

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρεθεί η αντίστροφη της f στην περίπτωση που υπάρχει

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(3x^2+1) < f(x^2+x+2)$

80. Έστω $f(x) = \ln(1-x)$ και $g(x) = \sqrt{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

81. Έστω $f(x) = x^3 + x + 1$. Να λύσετε την ανίσωση : $f(2x^4+x^2) > f(x^3+2x^2)$

82. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν η $f \circ g$ είναι «1-1» τότε και η g είναι «1-1».

Αποδείξτε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

83. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{2^x}{1+2^x}$.

Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση.

84. Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = \frac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3}$

85. Αν για κάθε $x \in [-2, 2]$ η συνάρτηση f είναι συνεχής και ισχύει $3(x^2-1) + 4f^6(x) = 9$ να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2, 2)$.

86. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x^2-1)$ και $g(x) = e^x$.

Να βρείτε τις $f \circ g$ και $g \circ f$

87. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα σ' όλο το \mathbb{R}

$$\text{και η συνάρτηση } h(x) = f(-2x+1) - f(e^x) .$$

α) Να δείξετε ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα .

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(-2\ln x + 1) - f(x) = f(-1) - f(e)$.

γ) Να δείξετε ότι $h(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.

δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και h έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο .

88. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3 .$$

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο \mathbb{R} .

89. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 2x^{2011} + 5x - 7, x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .

90. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

91. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 \ln(\sqrt{x-1} + 1) + 3$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x) = 2$.

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2$$

92. Δίνεται η συνάρτηση f με

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2025.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $3x2^x + 2^x < 1$

93. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, όταν:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{f(x)} = +\infty$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{4x + 3} = -\infty$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(3x + 4)] = +\infty$

94. Δίνονται οι συνεχείς στο \mathbf{R} συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2, -1)$.
- $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο \mathbf{R} .

β) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 5)$.

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = -\infty$

95. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπο: $f(x) = 2x^4 + 3 \ln x + 1$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda > 0$ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda}$$

96. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 3}$ και $g(x) = (x+1)^2 - x^2 - x - 1$

97. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f - g$ και $g \circ f$.

98. Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x}}$ δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{1 - x^2}$

99. Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & , x \leq 1 \\ \beta x^2 - \alpha & , x > 1 \end{cases}$

Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, να βρείτε τα α, β και στη συνέχεια

να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

100. Δίνονται συναρτήσεις f, g συνεχείς στο \mathbb{R} , για τις οποίες ισχύει

$$5f(2) < g(2) + 1 \text{ και } 10f(3) > g(3) + 1 .$$

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2, 3)$

τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{g(\xi) + 1}{\xi^2 + 1}$.

101. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f με $D_f = (-\infty, 2)$ για την οποία ισχύει

$$[f(-1)]^3 f(0) < -f(-1)f(0) .$$

Για $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

γ) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{x}{f(x)} - \frac{1}{[f(x)]^2} \right]$$

δ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = -x + \frac{1}{x-2}$

να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

102. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$xf(x) = 2x + 3\eta\mu x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R} .$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

103. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 5$ βρείτε τον $\mu \in \mathbb{R}$ αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1$

104. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(f \circ f)(x) = -x^3 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

α) Η f είναι «1-1» β) Η f δεν είναι γνησίως μονότονη

105. Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Έστω επιπλέον ότι για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει

$$2025 + (7 - x^8)f(x) \leq 1975 + f(x) .$$

α) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$.

β) Αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$ να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

γ) Αν $f(\alpha) = \frac{2025}{49}$ και $f(\beta) = \frac{2025}{29}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{2025}{39}$.

106. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη

ΣΩΣΤΟ ή **ΛΑΘΟΣ** .

1) Αν $f(\alpha)f(\beta) > 0$ και f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε : $f(x_0) = 0$.

2) Όταν μια συνάρτηση είναι 1-1 στο A τότε είναι γνησίως μονότονη στο A .

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu 2x}{x} + \frac{\eta\mu 3x}{x} \right) = 3$

4) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

5) Για κάθε συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 0$

107. Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} \right)$ β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \sqrt{9x^2 - x + 1} \right)$

108. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-3} = 3-x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα

στο διάστημα $(2,3)$.

109. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x-2) = 4 - 3e^x$ έχει ακριβώς μία λύση .

110. Αν $10x + 11\eta\mu x \leq x f(x) \leq 3x^4 + 10x + 11\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} , να βρείτε το $f(0)$.

111. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^3(x) + 3f(x) = 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 .

β) Να λύσετε την εξίσωση : $f(1+f(x)) = 1$.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

112. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 3}$ και $g(x) = (x+1)^2 - x^2 - x - 1$

113. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f - g$ και $g \circ f$.

114. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη

ΩΣΤΟ ή **ΛΑΘΟΣ** .

α) Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι και γνησίως μονότονη .

β) Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε έχει το πολύ μια ρίζα .

γ) Αν η f έχει δυο ρίζες τότε είναι 1-1 .

δ) Αν $f(2) = f(5)$ τότε η f είναι 1-1 .

ε) Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ ένα σημείο τομής με τον άξονα $x'x$.

115. Δίνεται η $f(x) = e^x + x - 1$

α) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^x + x < e + 1$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x + x + 1) > 1 + e^2$.

116. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} και $g(x) = f(1-x) - f(x^3 - 9)$ τότε :

α) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το διάστημα των τιμών του x , στο οποίο η C_g είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ) Να δείξετε ότι $g\left(\frac{3}{2}\right) \cdot g\left(\frac{5}{2}\right) < g(2)$