

Θέμα 1

Να βρείτε την παράγωγο της $f(x) = x^2 + 1$ στο σημείο $x_0 = 0$.

Θέμα 2

Να βρείτε αν υπάρχει την παράγωγο της $f(x) = \sqrt{x-2}$ στο σημείο $x_0 = 2$.

Θέμα 3

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0 \\ x^3, & x \geq 0 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 0$.

Θέμα 4

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - x + 2, & x \leq 1 \\ 2x^2 - 3x + 3, & x > 1 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

Θέμα 5

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \eta\mu(x-1), & x \leq 1 \\ \sqrt{x+3} - 2, & x > 1 \end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

Θέμα 6

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = |x-1| + 3$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

Θέμα 7

Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων α και β ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 1 \\ 2\alpha x + 2\beta - 4, & 1 < x \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0 = 1$.

Θέμα 8

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $2x^2 + 5x + 3 \leq f(x) \leq 3x^2 + 3x + 4$ να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $x_0 = 1$.

Θέμα 9

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{\sqrt{x} - 1} = 4$.

- i. Να βρείτε το $f(1)$ ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και να βρείτε το $f'(1)$.

Θέμα 10

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x^2 + 3x - 3}{x^2 - 1} = \frac{1}{2}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ να βρείτε το $f'(1)$.

Θέμα 11

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 να δείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - 2h)}{h} = 3f'(x_0)$.

Θέμα 12

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει: $f^3(x) + x^2 f(x) = 2x^2 \eta \mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε: i. το $f(0)$ και ii. το $f'(0)$.

Θέμα 13

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ με $f'(0) = \alpha$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ είναι $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$ (1) με $f(0) \neq 0$, να δείξετε ότι $f'(x_0) = \alpha f(x_0)$ για κάθε $x_0 \neq 0$.

Θέμα 14

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005$.

- i. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.
ii. Να δείξετε ότι $f'(0) = 1$.

iii. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda (f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$.

Θέμα 15

Αν για μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει: $x^2 + 3x \leq f(x) \leq 2x^2 - x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε το $f'(2)$.

Θέμα 16

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

- i. $f(x) = 4x + 5$
- ii. $f(x) = x^2 + 5x + 2013$
- iii. $f(x) = 7x^3 + 5x^2 - 3x + 1$
- iv. $f(x) = 3e^x + 9$
- v. $f(x) = 2 \ln x + 5x + \frac{1}{x}$

Θέμα 17

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

- i. $f(x) = 2x^3 \cdot \ln x$
- ii. $f(x) = (3x^2 + 5x)(2x + 7)$

Θέμα 18

Να βρείτε την παράγωγο της παρακάτω συνάρτησης : $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & , x \leq 2 \\ x^3 - 2x^2 - x + 4 & , x > 2 \end{cases}$

Θέμα 19

Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \frac{3x+2}{2x-3}$
- ii. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$
- iii. $f(x) = \frac{x^2+10}{x-1}$

Θέμα 20

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \sqrt{3x+1}$
- ii. $f(x) = \sqrt{x^2+3x+5}$
- iii. $f(x) = \sqrt{x \cdot e^x}$

Θέμα 21

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων

- i. $f(x) = e^{2x+2}$
- ii. $f(x) = e^{x^2+x}$
- iii. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+5x-1}}$
- iv. $f(x) = e^{-2x} \cdot (x^2 + 1)$

Θέμα 22

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

- i. $f(x) = x^{\ln x}$
- ii. $f(x) = 2^{5x-3}$

Θέμα 23

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

- i. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$
- ii. $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

Θέμα 24

Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} + x)$.

Θέμα 25

Να βρεθεί πολυώνυμο $P(x)$ τέτοιο ώστε $P(1) = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να είναι $[P'(x)]^2 = 4P(x)$.

Θέμα 26

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2xf(x) = 4x^2 + 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

Θέμα 27

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 3x + 2$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- ii. Να βρείτε την $(f^{-1})'(3)$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Θέμα 28

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2f(x) = 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

Θέμα 29

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$.

Θέμα 30

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2xf(x) = 4x^2 + 8$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.

Θέμα 31

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 - 3x + 2, & x \leq 2 \\ x^2 + 5x - 10, & x > 2 \end{cases}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(2, f(2))$.

Θέμα 32

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax, & x \leq 2 \\ x^3 + 2ax^2 - x + 4, & x > 2 \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε το α

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(2, f(2))$.

Θέμα 33

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + \beta, & x \leq 1 \\ 2ax + 2\beta - 5, & x > 1 \end{cases} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(1, f(1))$.

Θέμα 34

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα : $f(x^3 + x + 1) = 7x^3 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f'(3) = 5$ και στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(3, f(3))$.

Θέμα 35

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $2x^2 - 3x + 1 \leq f(x) \leq 3x^2 - 9x + 10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για τη C_f ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(3, f(3))$, της οποίας και να βρείτε την εξίσωση.

Θέμα 36

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1-3h)}{h} = 8$ και $f(1) = 3$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0 = 1$.

Θέμα 37

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x^2}{\sqrt{x+2} - 2} = -4$. Να αποδείξετε ότι για τη C_f ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(2, f(2))$ της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Θέμα 38

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \frac{\beta}{x}$. Έστω ότι η C_f διέρχεται από το σημείο

$A(-2, -5)$ και η εφαπτομένη της f στο A σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία $\omega = \frac{3\pi}{4}$.

i. Να βρείτε τα α, β .

ii. Για $\alpha = -\frac{1}{4}$ και $\beta = 8$ να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης της $f'(x)$ στο σημείο $B(-1, f'(-1))$.

Θέμα 39

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^2 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f που

- Έχει συντελεστή διεύθυνσης 5
- Είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta): y = x + 5$
- Είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta): x - 3y + 12 = 0$
- Είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$
- Σχηματίζει γωνία με τον άξονα $x'x$ 45° .

Θέμα 40

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x}{3x-1}$. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της f στα

οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στην ευθεία $(\zeta): y = -2x - 1$. Στη συνέχεια να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων.

Θέμα 41

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$ σε οποιοδήποτε σημείο της σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ αμβλεία γωνία.

Θέμα 42

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = 3x^2 - 5x + 2$ που διέρχονται από το σημείο $A(3, 2)$.

Θέμα 43

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Θέμα 44

Αν η ευθεία $y = 6x - 2$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - \alpha x + \beta$ στο σημείο $M(2, f(2))$,

- i. Να βρείτε τα α, β .
- ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 4$ εφάπτεται στη C_f .

Θέμα 45

Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\eta): x - 2y = 0$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$

Θέμα 46

Αν η ευθεία $y = 2\alpha x - \beta$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x$ στο σημείο $M(1, f(1))$, να βρείτε τα α, β .

Θέμα 47

Αν η ευθεία $y = 2x - 1$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 - \beta x - 2$ στο σημείο $M(-1, f(-1))$, να βρείτε τα α, β .

Θέμα 48

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2$ και $g(x) = x^2 + 2\beta x + \alpha$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

Θέμα 49

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και $g(x) = x^2 - 7x + 16$. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες των C_f, C_g .

Θέμα 50

Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^x + x^2 - x$ στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$, να είναι κάθετη στην ευθεία: $(\zeta): x + y + 2017 = 0$.

Θέμα 51

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 3x + 2$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 3$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Θέμα 52

Να υπολογιστούν τα όρια :

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 - 1} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \eta\mu x}{x^3} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x + \eta\mu 2x}{\eta\mu 5x - \eta\mu 2x} \quad \text{iv) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x - x^2 - x}{x^3 - x^2}$$

Θέμα 53

Να υπολογιστούν τα όρια :

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + e^x}{x^2 + e^x} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + \ln x}{3x + \ln x} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \ln x}{e^x} \quad \text{iv) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x}{x}$$

Θέμα 54

Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \ln x)$ iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (2 - x^2)$

Θέμα 55

Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x+1) - x]$ iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - \ln x)$

Θέμα 56

Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$

Θέμα 57

Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\eta\mu x}$

Θέμα 58

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων A(4,0) και B(0,x) ως προς x, όταν x=3.

Θέμα 59

Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις $x(t) = 3t^2 + 9t$ και $y(t) = 6t + 18$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, τη χρονική στιγμή που γίνεται τετράγωνο.

Θέμα 60

Ένα κινητό M κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^{x-1} + \ln x$, $y \geq 0$, έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνει με ρυθμό 2 m/min . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M, τη χρονική στιγμή που η τεταγμένη του είναι ίση με 1.

Θέμα 61

Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

- i. $f(x) = x^2 - 6x + 2$, $[-1, 7]$
- ii. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & , x < 1 \\ 8x - 2x^2 & , x \geq 1 \end{cases}$ $[-3, 3]$

Θέμα 62

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - \alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$ και $\alpha > 2$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον $x'x$.

Θέμα 63

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = xe^{x-1} + ax^2 - (a+1)x$, με $x, a \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

Θέμα 64

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \eta\mu x \cdot \ln(3-x) + x^3 - 4x + 5$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0, 2)$, στο οποίο η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Θέμα 65

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, & -1 \leq x < 0 \\ x^3 + \gamma, & 0 \leq x < 1 \end{cases}$. Να βρείτε τα α, β, γ ώστε για την f να ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $[-1, 1]$.

Θέμα 66

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x$. Να δείξετε ότι :

- i. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$, να είναι παράλληλη στον $x'x$. (η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$).
- ii. Η εξίσωση $x^x = e^{2-x}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(1, 2)$.

Θέμα 67

Αν $\alpha^2 + \alpha = \beta$, να δείξετε ότι υπάρχει στο διάστημα $(-1, 1)$ σημείο x_0 τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f , όπου $f(x) = (\alpha^2 - \beta)x^3 + (\beta^2 - \alpha)x^2 + \alpha x + \beta$ στο σημείο με τετμημένη x_0 είναι παράλληλη στον άξονα των $x'x$.

Θέμα 68

Να δείξετε ότι η εξίσωση : $4x^3 + 3x^2 - 8x = 4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,2)$.

Θέμα 69

Αν $8\alpha + 3\beta = 0$ να δείξετε ότι η εξίσωση : $4\alpha x^3 + 3(2\alpha + \beta)x^2 + 2(2\beta + \alpha)x = \beta$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1,2)$

Θέμα 70

Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 3\alpha x^2 = 2(\alpha + 8)x - 4\alpha$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(-2,2)$

Θέμα 71

Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $f(2) - f(1) = \ln 2$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) = 2\xi^2 - 3\xi + 1$.

Θέμα 72

Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(0) = 2f(1)$. Να δείξετε η εξίσωση $f'(x) = -\frac{2x}{x^2 + 1} \cdot f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Θέμα 73

Έστω μια συνάρτηση f , συνεχής στο $[2,3]$, παραγωγίσιμη στο $(2,3)$ με $f(3) = 2f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (2,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο $A(1,0)$.

Θέμα 74

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [1,e] \rightarrow \mathbb{R}$ η όποια είναι και παραγωγίσιμη στο $(1,e)$. Αν $f(e) = 0$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,e)$ τέτοιο ώστε $\xi \cdot f'(\xi) \cdot \ln \xi = -f(\xi)$

Θέμα 75

Αν η συνάρτηση f συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $f(2) - f(1) = 3 - \ln 2$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $x_0 \cdot f'(x_0) = 2x_0^2 - 1$.

Θέμα 76

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $f(1) - f(0) = e$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $f'(x) - 2x = e^x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Θέμα 77

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, με $f(2) = 2$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \frac{f(x)}{x}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

Θέμα 78

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, με $f(2) = 2$ και $f(1) = 1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) \cdot f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1,2)$.

Θέμα 79

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + xf'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,2)$.

Θέμα 80

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = f(2) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -3f(\xi)$.

Θέμα 81

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε :

- i. $f'(\xi) + f(\xi) = 0$
- ii. $f'(\xi) - f(\xi) = 0$
- iii. $f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$

Θέμα 82

Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x) \neq 2x - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^2 - 3x + \alpha$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Θέμα 83

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει : $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και αντιστρέψιμη.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x^2 - 3x + 1) - f(2x - 5) = 0$.

Θέμα 84

Να δειχθεί ότι εξίσωση : $x^6 + x^2 = ax + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ έχει το πολύ δυο ρίζες στο \mathbb{R} .

Θέμα 85

Αν για τη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $f^2(x) + 4f(x) - 2x = e^x - 3$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ το πολύ σε ένα σημείο.

Θέμα 86

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με $f'(x) < 1$ και $1 < f(x) < 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = e^{x_0} + x_0$.

Θέμα 87

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $f(-1) = f(0) = f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (-1, 1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

Θέμα 88

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Αν η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από τα σημεία $A(6, 1)$ και $B(2, 3)$, τότε να λύσετε την εξίσωση : $f^{-1}(4 + f(x^2 - 1)) = 1$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $\frac{f(\xi)}{f'(\xi)} = -\xi$.

Θέμα 89

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ με $x \in [0, 4]$.

i. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0, 4]$

ii. Να βρείτε το $\xi \in (0, 4)$

Θέμα 90

Έστω $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $f(0) = 2$, $f(1) = 4$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, 1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(x_1, f(x_1))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 2000$.

Θέμα 91

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 2)$ και $B(1, 3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο M της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon) : 2x + y - 3 = 0$.

Θέμα 92

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = f(1) + 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (1,4)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα $x'x$.

Θέμα 93

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\alpha) = 2\beta + 6\alpha$ και $f(\beta) = 5\beta + 3\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 3$.

Θέμα 94

Έστω μια συνάρτηση $f : [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το $[0,2]$ και είναι παραγωγίσιμη στο $(1,3)$, να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = -2$.

Θέμα 95

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,5]$, παραγωγίσιμη στο $(0,5)$ και ισχύει $f(5) = f(0) + 1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,5)$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 1$

Θέμα 96

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha, \beta]$ να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $3f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 0$.

Θέμα 97

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ και $f(4) = 3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο τουλάχιστον $\xi_1, \xi_2 \in (1,4)$ διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $A(\xi_1, f(\xi_1))$ και $B(\xi_2, f(\xi_2))$ να είναι μεταξύ τους κάθετες.

Θέμα 98

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(1) = f(3) = 0$ και $f(2) > 0$. Να αποδείξετε ότι :

- Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,3)$ με $\xi_1 < \xi_2$, ώστε $f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$
- Υπάρχει $\xi \in (1,3)$ ώστε $f''(\xi) < 0$.

Θέμα 99

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[0,3]$ να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) + 2f'(\xi_2) = 0$

Θέμα 100

Δίνεται συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, παραγωγίσιμη στο (α, β) και ισχύει $f(\alpha) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2\alpha$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Η εξίσωση $f(x) = 2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)
- ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$.

Θέμα 101

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : [\alpha, 2\alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, με $\alpha > 0$ για την οποία ισχύει $f(\alpha) = \alpha$ και $f(2\alpha) = 2\alpha$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Υπάρχει $x_0 \in (\alpha, 2\alpha)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 3\alpha - x_0$
- ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, 2\alpha)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 1$.

Θέμα 102

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1) = 2$ και $f(3) = 8$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Υπάρχει $x_0 \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 6$
- ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 3)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $\frac{2}{f'(\xi_1)} + \frac{1}{f'(\xi_2)} = 1$.

Θέμα 103

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α, β) . Αν ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $\gamma \in (\alpha, \beta)$, $\delta \in (\alpha, \beta)$, έτσι ώστε $f(\gamma) \cdot f(\delta) < 0$, να αποδείξετε ότι:

- i. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα (α, β) .
- ii. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1) > 0$ και $f''(\xi_2) < 0$.
- iii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f''(\xi) = 0$.

Θέμα 104

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[3, 5]$ και ισχύουν $f(3) = 4$ και $2 \leq f'(x) \leq 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα $8 \leq f(5) \leq 10$.

Θέμα 105

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει :

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x).$$

Θέμα 106

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} . Να δείξετε ότι $f(x+1) - f(x) < f'(x) < f(x) - f(x-1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 107

Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $x > 0$.

Θέμα 108

Αν $\alpha < \beta$ με $\alpha, \beta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να δείξετε ότι $(\beta - \alpha)\sin\beta < \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha < (\beta - \alpha)\sin\alpha$.

Θέμα 109

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[1,7]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,7)$. Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,7)$ να δείξετε ότι $f(1) + f(7) > f(3) + f(5)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 110

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Αν ισχύει $f(0) = 0$ να δείξετε ότι $f'(x) < \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$.

Θέμα 111

Δίνεται η συνάρτηση f , η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".
- Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2005)$ και $B(-2, 1)$, να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(-2004 + f(x^2 - 8)) = -2$.
- Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f , στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon): y = -\frac{1}{668}x + 2005$.

Θέμα 112

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $2f(x) - 2x \leq f(4) + f(-4)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

- $f(4) - f(-4) = 8$
- υπάρχει σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (-4, 4)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = x + 2012$
- υπάρχει $x_0 \in (-4, 4)$ ώστε $f(x_0) = f(-4) + 4$
- υπάρχουν $x_1, x_2 \in (-4, 4)$, ώστε $\frac{1}{f'(x_1)} + \frac{1}{f'(x_2)} = 2$.

Θέμα 113

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(4) = 3$ και :
 $xf'(x) = 3x - 2f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x) - x^3$ είναι σταθερή στο $(0, +\infty)$.
- ii. Να βρείτε τον τύπο της f .

Θέμα 114

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει :
 $\frac{f'(x)}{2} = \frac{f(x)}{x}$ για κάθε $x > 0$.

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$, $x > 0$, είναι σταθερή.
- ii. Αν $f(1) = 2$ να βρείτε τον τύπο της f .

Θέμα 115

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει : $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$ όταν
 $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 3$.

Θέμα 116

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ αν ισχύει : $x \cdot f'(x) \cdot \ln x + f(x) = 2x^2$
 $x \in \Delta = (1, +\infty)$ και $f(e) = e^2$

Θέμα 117

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

- i. $(1+x^2) \cdot f'(x) = 2x \cdot f(x)$ $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 1$
- ii. $x \cdot f'(x) - f(x) = 2x^3$ $x \in \Delta = (0, +\infty)$ και $f(1) = 1$

Θέμα 118

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση :

$$2f'(x) = e^{x-f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(0) = 0. \text{ Να δειχθεί ότι : } f(x) = \ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right).$$

Θέμα 119

Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x) \cdot f'(x) - \eta\mu x = 0$ για κάθε
 $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = -\sqrt{2}$, να βρείτε τον τύπο της f .

Θέμα 120

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση :

$$f'(x) = 4x^3 e^{-f(x)} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = \ln 3. \text{ Να βρείτε τον τύπο της } f.$$

Θέμα 121

Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f'(3x-1) = 2x+1$. Αν $f(2)=5$, να βρείτε τον τύπο της f .

Θέμα 122

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ παραγωγίσιμη, με $f(0) = 1$. Αν ισχύει : $f'(x) = 2xf(x)$ να βρείτε τον τύπο της f .

Θέμα 123

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(0) = 3$ και : $f'(x) - x^3 = f(x) - 3x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Θέμα 124

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f'(x) + f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή,
- ii. $(f(x)e^x)' = e^{2x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- iii. ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Θέμα 125

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0) = 2f'(0) = 1$ και : $f''(x)f(x) + (f'(x))^2 = f(x)f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Θέμα 126

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} , με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x(f'(x) + f''(x) - 1) = f'(x) + xf''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \ln(e^x - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 127

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες : $f(x) \cdot f'(-x) = 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 1$. Να δείξετε ότι $f(x) \cdot f(-x) = 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 128

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις :

- i. $f(x) = x^2 - 6x + 1$
- ii. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$
- iii. $f(x) = xe^x$
- iv. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Θέμα 129

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

- i. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .

Θέμα 130

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις :

- i. $f(x) = 3e^x + x^2 - 3x + 15$
- ii. $f(x) = 2ex(\ln x - 1) - x^2$
- iii. $f(x) = 6e^x + x^3 - 3x^2 - 6x$

Θέμα 131

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση : $f(x) = \frac{x}{\eta\mu x}$ στο διάστημα $(0, \pi)$.

Θέμα 132

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = -2x + 3$
- ii. $f(x) = -x^2 + 3x - 1$
- iii. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$
- iv. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$
- v. $f(x) = -x^3 + x^2 - x - 1$

Θέμα 133

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Θέμα 134

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$

ii. $f(x) = \frac{e^x}{x}$

iii. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

iv. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

v. $f(x) = x + \frac{1}{x + 1}$

vi. $f(x) = x \ln x$

vii. $f(x) = x \cdot e^x$

viii. $f(x) = 2e^x - x + 1$

ix. $f(x) = x\sqrt{4 - x^2}$

Θέμα 135

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = x^2(2\ln x - 5) - 4x(\ln x - 3)$.

Θέμα 136

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = 3e^x + x^2 - 3x + 7$.

Θέμα 137

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = e^x + x \ln x - (e + 1)x$.

Θέμα 138

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = 2e^{x-1} - x^2 + 3$.

Θέμα 139

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = -\frac{2 + x^2e^x + 2xe^x}{2e^x}$.

Θέμα 140

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = -2x^2 + 4x - (x - 1) \ln x$.

Θέμα 141

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = 2e^x - x^2 - 2x$.

Θέμα 142

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = \frac{\ln x}{x-2}$.

Θέμα 143

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = 6x^2 \ln x - 2x^3 - 3x^2 + 6x$.

Θέμα 144

Να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων :

- i. $f(x) = \ln x + x^2 - \frac{1}{x}$, $x \in (0,1]$.
- ii. $f(x) = \ln x - \ln(1-x)$, $x \in (0,1)$.
- iii. $f(x) = \ln(1+x^2)$

Θέμα 145

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- iii. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και μετά να βρείτε την αντίστροφη της.

Θέμα 146

Δίνεται μια συνάρτηση f , η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(0) = 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x > 0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Θέμα 147

Δίνεται μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$, $x > 0$, είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β) .

Θέμα 148

Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση $f(x) = 2\ln(x^2 + \alpha^2) + 2\alpha x + 3$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} .

Θέμα 149

Να βρείτε τις τιμές του a ώστε η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x^2 + a^2}$ να είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbb{R} .

Θέμα 150

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x + \ln x - 1 - e$.

Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Να λύσετε την εξίσωση $e^x + x + \ln x = 1 + e$.

Θέμα 151

Να λύσετε την εξίσωση : $\ln x = x - 1$.

Θέμα 152

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \ln(x^2 + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

ii. Να λυθεί η εξίσωση : $2(x^2 - 3x + 2) = \ln \left[\frac{(3x - 2)^2 + 1}{x^4 + 1} \right]$.

Θέμα 153

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i. $x^2 + 6 \ln x = 4x - 3$

ii. $x^2 + 4x + 5 = 5e^x$

iii. $x \ln x = 2x - e$.

Θέμα 154

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i. $e^x = 1 - 2x$

ii. $3x^2 + 2x = 5 - \ln x$

iii. $e^{x-1} + x^3 = 3 - x$

Θέμα 156

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\ln \frac{x^2 + 5}{2x^2 + 1} = x^2 - 4$.

Θέμα 157

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x + 3x^5 - 2$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση $2e^x + 3x^5 < 2$
- Να λύσετε την ανίσωση $2e^{x^2-2x} - 2e^{3x-6} > 3(3x-6)^5 - 3(x^2-2x)^5$

Θέμα 158

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

- $e^{x-1} \leq 1 - \ln x$
- $e^x + 2x < e^{-x} - x^3$
- $x^2 + 4x > \ln \frac{1}{x+1}$

Θέμα 159

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 1$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να αποδείξετε ότι : $\frac{e^3}{3} - \frac{\pi^3}{3} > 2e^2 - 2\pi^2 + 5e - 5\pi$

Θέμα 160

Να αποδείξετε ότι : $x^2 - 1 \geq 2 \ln x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Θέμα 161

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Αν $\alpha > \beta > 0$, να αποδείξετε ότι $e^{\alpha-\beta} > \frac{\beta}{\alpha}$

Θέμα 162

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(1) = 0$ και $xf'(x) - 2 \ln x > 0$ για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι : $f(x) > \ln^2 x$ για κάθε $x > 1$.

Θέμα 163

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1) = 1$ και $xf'(x) > 2x^2 + 1$ για κάθε $x > 0$.

- Να αποδείξετε ότι $f(x) > x^2 + \ln x$ για κάθε $x > 1$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - x^2 = \ln x$.

Θέμα 164

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Θέμα 165

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1, x \in \mathbb{R}$.

- Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f' ως προς τη μονοτονία.
- Να λυθεί η εξίσωση : $f(|\eta\mu x| + 3) - f(|\eta\mu x|) = f(x+3) - f(x)$, όταν $x \in [0, +\infty)$.

Θέμα 166

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(3) = f(2)$ και $f' \uparrow \mathbb{R}$. Να λύσετε :

- την εξίσωση : $f(x+1) - f(x) = 0$
- την ανίσωση : $f(5x+1) > f(5x)$
- την εξίσωση : $f(x^2 + 2) - f(x^2 + 1) = 0$

Θέμα 167

Να δείξετε ότι η εξίσωση : $x^2 + 2 \ln x = 2x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta = (1, 2)$.

Θέμα 168

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{x-1} - 1, x \in (0, +\infty)$.

- Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2017$ έχει ακριβώς μια ρίζα.
- Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.

Θέμα 169

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα Δ .

- $2x + \ln x = 1$ στο $\Delta = (0, 1)$
- $3e^x + x^3 = 3x^2 - 3x$ στο $\Delta = (-1, 0)$

Θέμα 170

Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + x \ln x - 2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εν μόνο σημείο M της C_f με τετμημένη $\xi \in (0, 1)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f σ' αυτό το σημείο να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Θέμα 171

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) = x^3 + 2x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Θέμα 172

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f^3(x) + f(x) = e^{-x} - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.
- Να λυθεί η εξίσωση : $f(\ln x) = f(1-x)$.

Θέμα 173

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f^3(x) + f(x) = 8x^3 - 12x^2 + 8x - 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0,1)$
- Να λύσετε την ανίσωση : $f(x^3 + x) - f(2 - \ln x) < 0$.

Θέμα 174

Δίνεται μια συνάρτηση f , ορισμένη στο \mathbb{R} , με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις : $f(x) = -f(2-x)$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα
- Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g , στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

Θέμα 175

Δίνεται συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(2) = 0$, $f'(0) = 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + 1) < 0$
- Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$, ώστε : $f(\xi) + 4\xi = \xi^2 + 3$.

Θέμα 176

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f'(x) - 2xf(x) = e^{x^2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = e.$$

- Να βρείτε τον τύπο της f
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την ανίσωση : $e^{x-(1-\ln x)^2} \leq \frac{1 - \ln x}{\sqrt{x}}$.

Θέμα 177

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(e) = \frac{1}{e-1} \text{ και } xf'(x) + f(x) = \frac{1}{x} + f'(x) \text{ για κάθε } x > 1.$$

- Να βρείτε τον τύπο της f
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να λύσετε την εξίσωση : $(2e^x + \sqrt{x} + 1)^{e^x+1} = (e^x + 2)^{2e^x + \sqrt{x}}$

Θέμα 178

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4$, $x \in [-1,2]$.

- i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .
- ii. Να βρείτε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f .
- iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Θέμα 179

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 1$, $x \in [-2,2]$.

- i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f .
- ii. Να βρείτε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f .
- iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Θέμα 180

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = ax^2 - \beta x + 1$, να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0 = 3$ το -1 .

Θέμα 181

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $f(x) = a \ln(x-1) - \beta x^2 - 4x + 1$, να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $x_1 = 2$ και $x_2 = 3$.

Θέμα 182

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) = x^3 + 2x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Θέμα 183

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$. Αν ισχύει ότι $\alpha^2 < 2\beta$, να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Θέμα 184

Για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι : $\alpha \ln x - x^2 \leq x - 2$ για κάθε $x > 0$. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3$.

Θέμα 185

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x - \ln(x+1)$, $x > -1$, όπου $\alpha > 0$ και $\alpha \neq 1$. Αν $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

Θέμα 186

Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x + \frac{a}{x} \geq a$, να βρείτε το a .

Θέμα 187

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f(x^2 - x + 1) - f(1) \geq x - x^2$, για κάθε $x > 0$, (1). Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη με την ευθεία $(\zeta) : y = -x$.

Θέμα 188

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει : $\ln(x^2 + 1) \geq f(x) - e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της $A(0, 1)$.

Θέμα 189

Έστω η συνάρτηση $f(x) = (e^x - e)^2 \cdot (x - 2)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δυο θέσεις ολικού ελαχίστου και τουλάχιστον μια θέση τοπικού μεγίστου, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(1, 2)$.

Θέμα 190

Έστω $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, μια συνάρτηση, με $A = [1, 2]$ και $f(A) = [-2, 5]$. Αν επιπλέον ισχύει $f(1) = 2$, $f(2) = 4$ και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

Θέμα 191

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

- i. $f(x) = x^2 - 6x + 1$
- ii. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$
- iii. $f(x) = xe^x$
- iv. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

Θέμα 192

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

- i. $f(x) = -x^2 + 6x + 1$
- ii. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 1$
- iii. $f(x) = x^3 - x^2$
- iv. $f(x) = \frac{3x - 1}{x - 2}$
- v. $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 1}$
- vii. $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 6}{x - 10}$

Θέμα 192

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

- i. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$
- ii. $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$

Θέμα 193

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x - x + 1$.

- i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της g
- ii. Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^x} + x$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$ και ότι δεν υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη στη καμπύλη της f .

Θέμα 194

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

- i. $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$
- ii. $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$
- iii. $f(x) = e^x - x$
- iv. $f(x) = e^x - ex$
- v. $f(x) = \ln x - x$
- vi. $f(x) = \ln(8x - x^2)$
- vii. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$
- viii. $f(x) = \frac{x}{e^x}$
- ix. $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$
- x. $f(x) = x \ln x$

Θέμα 195

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Θέμα 196

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο αντίστοιχο διάστημα οι παρακάτω συναρτήσεις :

- i. $f(x) = x^2 - 4x + 1$ στο $[1,4]$
- ii. $f(x) = x^2 - 2x + 2$ στο $[-2,3]$
- iii. $f(x) = x^3 - 12x + 7$ στο $[0,3]$
- iv. $f(x) = \ln x - x$ στο $[1,e]$

Θέμα 197

Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + \lambda$, $x, \lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ , αν είναι γνωστό ότι το τοπικό ελάχιστο της f είναι αντίθετο από το τοπικό της μέγιστο.

Θέμα 198

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.

- i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 54$
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
- iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1,2)$

Θέμα 199

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

- Να βρείτε το ελάχιστο της g
- Για τη συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$ να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ και ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Θέμα 200

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 3, & x \leq 1 \\ x^2 - 6x + 7, & x > 1 \end{cases}$$

Θέμα 201

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - 2x + e$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

Θέμα 202

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln x - x + 1$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$
- Αν ισχύει $f(\alpha + \beta) = -f(3\alpha + 4\beta)$, να βρείτε τα α, β .

Θέμα 203

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - x$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

Θέμα 204

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x+1} - 2x - 3$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε το πρόσημο της.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2e^{x+1} - x^2 - 3x$ είναι γνησίως αύξουσα.

Θέμα 205

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - ex$. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες f και το πρόσημο της. Στη συνέχεια να μελετήσετε τη $g(x) = 2e^{x-1} - x^2$ ως προς τη μονοτονία.

Θέμα 206

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \ln x - 2x + 1$.

- Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2x \ln x - x^2 - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Θέμα 207

Να αποδειχθούν οι παρακάτω ανισότητες για τις διάφορες τιμές του x .

- i. $e^x \geq x+1$ για $x \in \mathbb{R}$
- ii. $e^x - 1 \leq xe^x$ για $x \in \mathbb{R}$
- iii. $e^{x-1} \geq 1 + \ln x$ για $x > 0$

Θέμα 208

Να δείξετε ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$.

Θέμα 209

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το \mathbb{R} . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

- i. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.
- ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Θέμα 210

Για τις διάφορες τιμές του α να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3 = \alpha$.

Θέμα 211

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$ όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$

- i. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο
- ii. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Θέμα 212

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1 + \frac{1}{x}$ με $x > 0$. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα τοπικό ακρότατο, και στη συνέχεια να βρείτε το είδος του.

Θέμα 213

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2 - 2x + 3$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο, ώστε η f να παρουσιάζει ελάχιστο.

Θέμα 214

Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x \ln^2 x$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

Θέμα 215

Να βρείτε δυο αριθμούς x, y με σταθερό άθροισμα 10, που να έχουν το μεγαλύτερο γινόμενο.

Θέμα 216

Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 6x$ ii. $f(x) = 3x^5 - 10x^3 + 2x + 1$

iii. $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ iv. $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

Θέμα 217

Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x) = e^x(x^2 + 1)$ ii. $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$

iii. $f(x) = \frac{e^x}{x}$ iv. $f(x) = \frac{x^2}{e^x}$

Θέμα 218

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι :

$f^2(x) + e^x = 3f(x) - \alpha^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ όπου $0 < \alpha \neq 1$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Θέμα 219

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^5 - (4\beta + 2)x^3 + (\alpha - 1)x + 1$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α και β , ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $A(1, -4)$.

Θέμα 220

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \lambda x^4 + 2(\lambda - 3)x^3 + 6\lambda x^2 - 3x + 5$ με $\lambda \in \mathbb{R}$. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ , η συνάρτηση f είναι κοίλη στο \mathbb{R} .

Θέμα 221

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln x$.

- Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f'(x^2 + 1) > e - 1$.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.
- Να αποδείξετε ότι $e^x \geq (e - 1)x + \ln x + 1$ για κάθε $x > 0$.
- Να λύσετε την εξίσωση : $\frac{f(x) - 1}{e - 1} = x$.
- Να λύσετε την εξίσωση : $f(e^x) + e^x = e^{x+1} + 1$

Θέμα 222

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^4$.

- Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$.
- Να αποδείξετε ότι $e^{2x} \geq 1 + 2x - x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 223

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - x + e^x - \frac{x^2}{2}$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Θέμα 224

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(e^x - x)$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει δυο, ακριβώς, σημεία καμπής.

Θέμα 225

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln^2 x - x \ln x$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1,2)$ στο οποίο συνάρτηση f παρουσιάζει καμπή.

Θέμα 226

Έστω μια κυρτή συνάρτηση $f : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

- i. $f(\alpha) + f(\beta) \geq 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$.
- ii. $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$.

Θέμα 227

Έστω μια συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(0) = 0$ και $f'(x) > 1$ για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι $x < f(x) < xf'(x)$, για κάθε $x > 0$.

Θέμα 228

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
- ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0, f(0))$.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.
- iv. Να αποδείξετε ότι $xf'(x) \leq f(x) \leq \frac{x}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- v. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$, ώστε : $2f(\xi) = (\xi - 1)\sqrt{e^\xi}$

Θέμα 229

- i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα
- ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \ln^2 x + 2x \ln x + x^2 - 3$ είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.
- iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $x_0 = 1$
- iv. Να δείξετε ότι : $x + \ln x > \sqrt{4x - 3}$ για κάθε $x > 1$.

Θέμα 230

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ii. $f(x) = \frac{\ln(x-2)}{x-4}$

Θέμα 231

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ii. $f(x) = \frac{3x-4}{x^2-3x+2}$ v. $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-2x+1}$
iii. $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ iv. $f(x) = \frac{x^2-5x+6}{(x-2)^3}$ vi. $f(x) = \frac{x-5}{|x-2|}$

Θέμα 232

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης : $f(x) = \frac{2x^4-3x+1}{x^4+1}$.

Θέμα 233

Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{3x^2+7x+13}{x^2+2}$
ii. $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1} - \frac{x^2-2}{x+1}$
iii. $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x-1}{4-x}}$

Θέμα 234

Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{2x^3-9x+1}{x^2-5x+6}$ ii. $f(x) = \sqrt{x^2+4x+5}$

Θέμα 235

Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{6x^2+2x+1}{2x-4}$ ii. $f(x) = \sqrt{x^2-2x+4}$ iii. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ iv. $f(x) = \frac{\ln(9-x^2)}{x^2}$

Θέμα 236

Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $f(x) = \frac{2x^2 - 6x + 13}{x - 1}$ όταν $x \rightarrow -\infty$.

Θέμα 237

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha x^2 - \beta x + 9}{x - 3}$. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ να είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f όταν $x \rightarrow +\infty$.

Θέμα 238

Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 3x + 6$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 3x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$$

Θέμα 239

Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 5x - 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε να ισχύει : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - 5x^2 - \lambda x + 4}{\lambda f(x) + 10x - 2} = \frac{1}{4}$.

Θέμα 240

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Θέμα 241

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta \ln x + \beta x$.

i. Να βρείτε τα α, β ώστε το $A(1,3)$ να είναι σημείο καμπής της C_f .

Για $\alpha=4$ και $\beta=-1$,

- Να βρείτε τα διαστήματα που η f είναι κυρτή ή κοίλη.
- Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.
- Να δείξετε ότι $4\sqrt{x} - \ln x \leq x + 3$ για κάθε $x \geq 1$.

Θέμα 242

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 3$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
2. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ και το σύνολο τιμών της f .

Θέμα 243

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 + 2(\lambda - 1)x - \lambda$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$.

Θέμα 244

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2)$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f .
- ii. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- iii. Να τη μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Θέμα 245

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{4}{x}, x \neq 0$.

- i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \neq 0$.
- ii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.
- iii. Αν A και B τα σημεία που η εφαπτομένη στο M τέμνει τους άξονες, να δείξετε ότι το M είναι το μέσο του τμήματος AB .

Θέμα 246

Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + 5x, & x \geq 0 \\ 5\eta\mu x, & x < 0 \end{cases}.$$

Θέμα 247

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

- i. να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$.
- ii. να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$.
- iii. να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- iv. να είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.

Θέμα 248

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

- i. $x^{\eta\mu x}, x > 0$
- ii. $2^{x \cdot \ln x}, x > 0$
- iii. $\sqrt{5x^8 + 1}$

Θέμα 249

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$-2x + 1 \leq f(x) \leq x^4 - 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}, \quad (1)$$

τότε

- i. να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$
- ii. να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ και ισχύει $f'(0) = -2$.

Θέμα 250

Έστω $f : \mathbf{R} \rightarrow (0, +\infty)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 > 0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i.
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}}{x^2 - x_0^2}$$

ii.
$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^3(x) - f^3(x_0)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}$$

Θέμα 251

Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $O(0,0)$, δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y = -\frac{1}{4}x + 2$.

Να βρείτε τις διαστάσεις του α, β ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

Θέμα 252

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 5}{x} = 2.$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ και $f'(0) = 2$.

Θέμα 253

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \eta\mu x$. Να δείξετε ότι:

$$f^{(3)}(x) + 2 \cdot f'(x) = 2f''(x)$$

Θέμα 254

Να δείξετε ότι:

$$2 \ln(x-1) \leq x-3 + \ln 4 \text{ για κάθε } x > 1.$$

Θέμα 255

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3$ στο σημείο της $A(1,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2 + 7x$.

Θέμα 256

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 24x^2 + 4x - 40 = 0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Θέμα 257

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

- i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y = -\frac{1}{2}x + 7$.
- ii. Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $O(0,0)$.
- iii. Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο $A(2,0)$;

Θέμα 258

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + k \cdot x - 1$, όπου $k \in \mathbf{R}$.

- i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 5$, να βρείτε την τιμή του k .
- ii. Αν $k = 2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$.

Θέμα 259

- i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 24x^2 + 5x - 7$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του α , ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο \mathbf{R}
- ii. Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbf{R}$ η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A(1, f(1))$

Θέμα 260

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

i. $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

ii. $e^{x^2} \geq 1-x$, για κάθε $x \geq 0$.

2. Να δείξετε ότι $e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

Θέμα 261

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + 5x$.

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5$.

Θέμα 262

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0) = 1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) \cdot e^y + f(y) \cdot e^x \text{ για κάθε } x, y \in \mathbf{R}.$$

i. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

Θέμα 263

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R},$$

να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = e^5$.

Θέμα 264

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ με

$$f(0) = f(1) = 0 \text{ και } f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in (0,1).$$

- i. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = f^2(x) \cdot e^{g(x)}$ στο διάστημα $[0,1]$.
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Θέμα 265

Αν η ευθεία $y = 3x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε

- i. να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$
- ii. να βρείτε το $\lambda \in \mathbf{R}$ ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 - \lambda^2 x + 2}{f(x) + \lambda x + 1} = -1$$

Θέμα 266

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0) < 0$, $f(1) > 2$ και $f'(x) \neq 2$ για κάθε $x \in (0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\xi \in (0,1)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\xi) = 2\xi$.

Θέμα 267

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} για την οποία ισχύουν:

$$f(0) = f'(0) = 0 \text{ και } f''(0) = 2011.$$

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{e^x \eta \mu x - x}$$

Θέμα 268

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$.

Θέμα 269

Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0, 3]$. Να δείξετε ότι

$$f(1) + f(2) > f(0) + f(3).$$

Θέμα 270

Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1, 0)$, $B(x, \ln x)$ και

$\Gamma(x, 0)$, $x > 1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το $x = 2\text{cm}$.

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0,5\text{cm/sec}$.

Θέμα 271

- i. Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - \rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho) = P'(\rho) = 0$.
- ii. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x - 1$ να έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$.

Θέμα 272

Έστω $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x) \geq e^{x-1} + \ln x + x^2 \text{ για κάθε } x > 0 \text{ και } f(1) = 2.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, 2)$.

Θέμα 273

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3, 3)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x) + 4f(x) + x^2 - 5 = 0 \text{ για κάθε } x \in (-3, 3) \quad (1)$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Θέμα 274

Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει:

$$f(e^x \cdot \eta\mu x) = 2 \cdot e^x \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

- i. Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$.
- ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0, f(0))$ είναι η $y = 2x + 2$.
- iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

Θέμα 275

1. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} . Να δείξετε ότι:
 - i. αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.
 - ii. αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.
2. Έστω $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x) = (x^5 + \sigma\upsilon\nu x) \cdot e^{f(x)} + \eta\mu x + x.$$

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο \mathbf{R} .
- ii. Να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.

Θέμα 276

$$\text{Δίνεται συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^3 \eta \mu \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

- i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
- ii. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi} \right]$
- iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma \varphi \frac{1}{x} = 3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi} \right)$.

Θέμα 277

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$.

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$.

Θέμα 278

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbf{R}$.
- iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμψής της αν υπάρχουν.

Θέμα 279

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f: \mathbf{R}^* \rightarrow \mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(1) = 2 \text{ και}$$

$$x \cdot f'(x) = -3 \cdot f(x) \text{ για κάθε } x \neq 0.$$

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 \cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.
- ii. Να βρείτε τον τύπο της f .
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Θέμα 280

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$[P'(x)]^2 = P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R} \text{ και } P'(1) = 2.$$

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

Θέμα 281

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ ισχύει $f(\alpha) < f(\beta) > f(\gamma)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

Θέμα 282

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \eta \mu x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

Θέμα 283

Δίνεται η συνάρτηση $f : [1, 6] \rightarrow \mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1, 6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1, 6)$ με $f(1) = f(6)$.

- i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο

$A(x_0, f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.

- ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, 6)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 0$.

Θέμα 284

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \eta\mu x$.

- i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο \mathbf{R} .
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Θέμα 285

Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, για την οποία ισχύουν: $f(2) = 5$, $f(1) = 3$ και $f(x) \leq 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

Θέμα 286

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο \mathbf{R} για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

1. η $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbf{R}
2. $f(2) - f(1) < 3$
3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.

Θέμα 287

- i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = x - \ln x$.
- ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Θέμα 288

1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x + \frac{1}{x} \geq 1 \text{ για κάθε } x > 0.$$

2. Να δείξετε ότι η $g(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα

$$\left(\frac{1}{e}, 1\right).$$

3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

Θέμα 289

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0) = 2$ και

$$f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) \text{ για κάθε } x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

τότε να βρείτε τον τύπο της.

Θέμα 290

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x+1}$, $x > -1$ και $\lambda > 0$.

- i. Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.
- ii. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Θέμα 291

A. Να αποδείξετε ότι: $e^x \leq 1 + xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B. Να λυθεί η εξίσωση $e^x = 1 + xe^x$

Γ. Να βρείτε το σύνολο των τιμών της συνάρτησης $h(x) = 2|1 + xe^x|$

Θέμα 292

1. Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 2^x = 5^x$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ με $f'(x) = -2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{2x} \cdot f(x)$ είναι σταθερή στο \mathbf{R} .
- ii. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = 1$.
- iii. Αν h, φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο \mathbf{R} , με

$$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

και $h(0) = \varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι $h = \varphi$.

Θέμα 293

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f , αν υπάρχουν.
- iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.
- v. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$(x^2 + 4x + 3) \cdot e^x \geq 7x + 3 \text{ για κάθε } x \geq -4 + \sqrt{3}.$$

Θέμα 294

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha + 2\beta - 1) \leq 2$$

να υπολογίσετε τους α, β .

Θέμα 295

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{2x}}, x > 0$

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii. Να δείξετε ότι:

$$\sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[6]{3}$$

Θέμα 296

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x^2 + 1)$.

- i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο \mathbf{R} .
- ii. Να λύσετε την εξίσωση: $x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2 + 1)$.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3 - x^2 > \ln \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1}$.

Θέμα 297

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- ii. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) \text{ για κάθε } x > 0.$$

Θέμα 298

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ και $f(3) = 12$.

- i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 2$.
- ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.