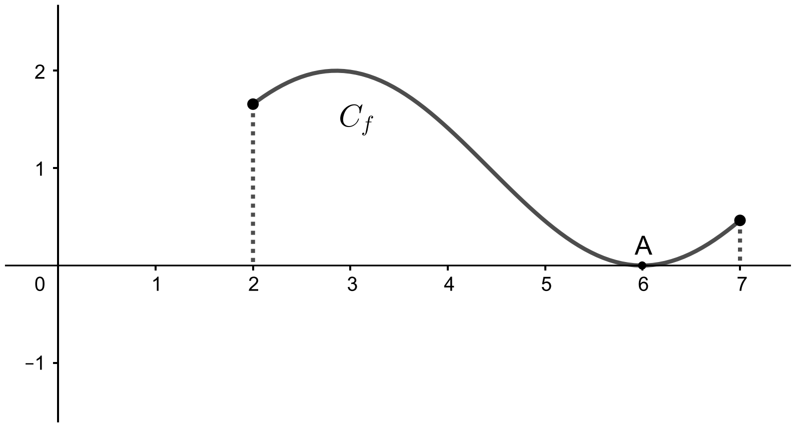
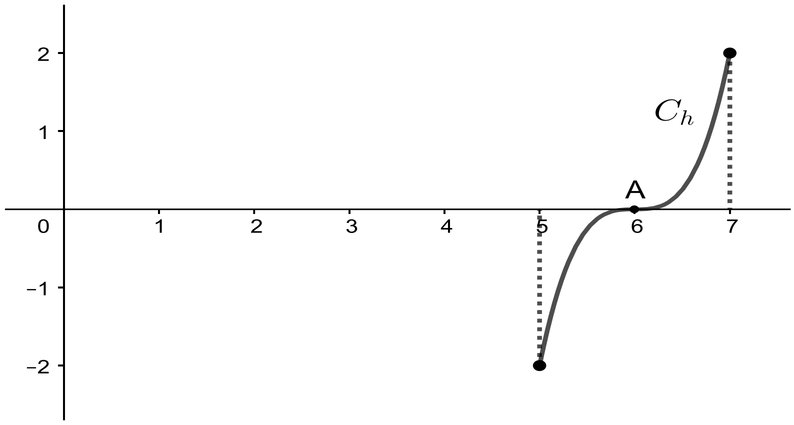
1. ΘΕΜΑ 2 – 36840

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f και h. Και οι 2 γραφικές παραστάσεις εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του Α(6,0). Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο 6 και η h παίρνει αρνητικές τιμές αριστερά του 6 και θετικές τιμές δεξιά του 6.





α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 07)

ii. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{1}{h(x)}$ (Μονάδες 07)

iii. $\lim\limits_{x\to 6}\frac{f(x)}{x-6}$ (Μονάδες 05)

Παρατήρηση :

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 6}\frac{h(x)-h(6)}{x-6}$, κατόπιν την εξίσωση της εφαπτομένης της C_h στο σημείο της Α και να διαπιστώσετε ότι οι C_f και C_h έχουν κοινή εφαπτομένη τον άξονα $x'x$, ο οποίος όμως τη δεύτερη τη ‘’διαπερνά’’.

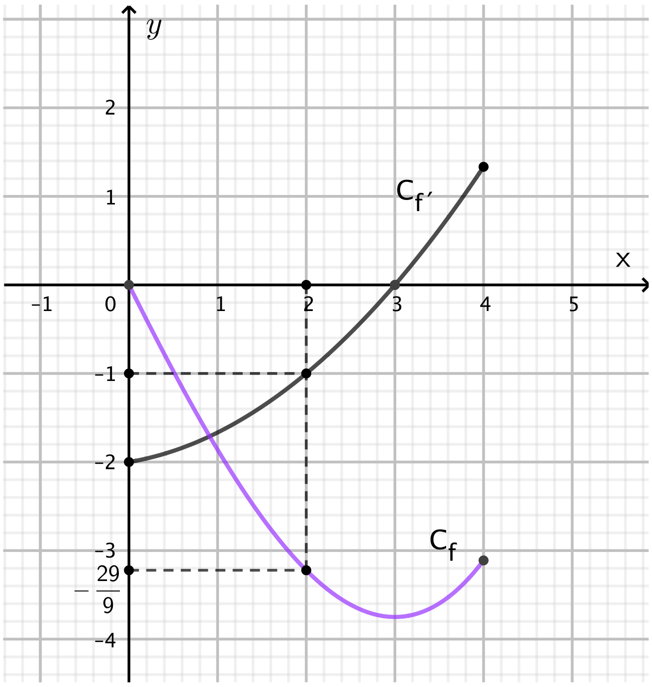
2. ΘΕΜΑ 2 – 26712

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού, η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$, και της παραγώγου της, f'.

α) Να βρείτε την κλίση της συνάρτησης f στο $x_o = 2$. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x_o = 2$. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 09)



3. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} e^x & , \text{αν } x<0 \\ 1 & , \text{αν } x=0 \\ \text{συν}x & , \text{αν } x>0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, της γραφικής παράστασης της f

στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 7)

4. ΘΕΜΑ 2 – 25762

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x^2+x, & x\le 0 \\ \text{ημ}x, & x>0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_o = 0$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ και $f'(0) = 1$. (Μονάδες 10)

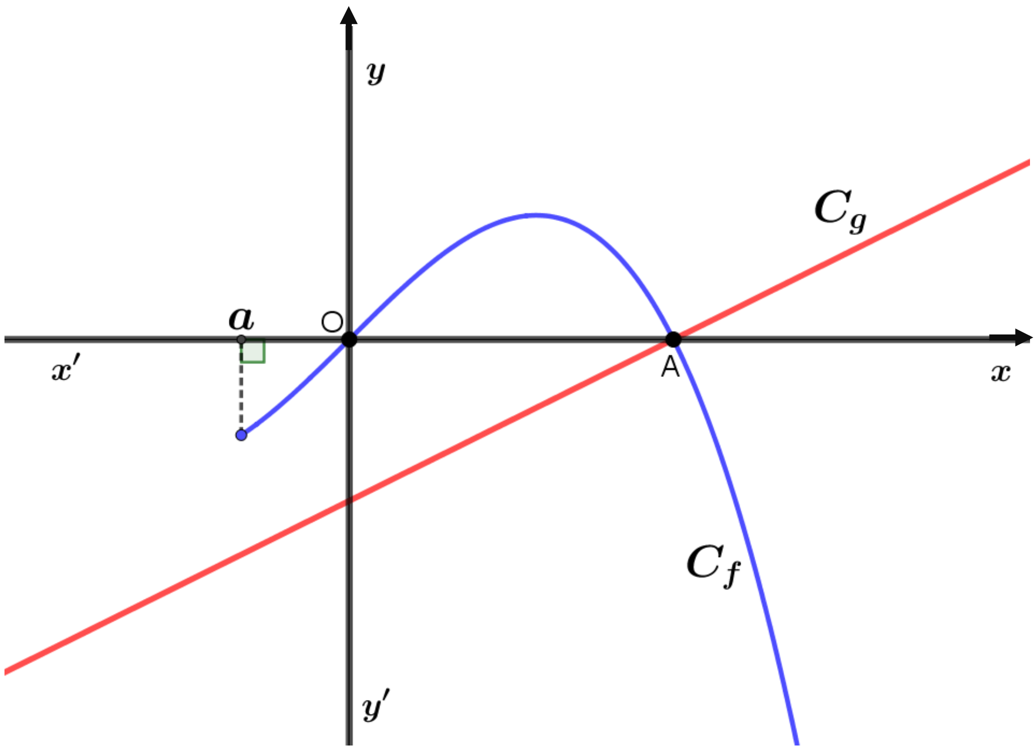
γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f

στο σημείο της $O(0, 0)$. (Μονάδες 7)

5. ΘΕΜΑ 2 – 25234

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: [a, +\infty) \to R$ και την συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$, $x \in R$. Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Γνωρίζουμε ότι:

- οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1,0)$.
- η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η C_f δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ εκτός από τα σημεία O και A.



α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 1^-} \frac{1}{g(x)}$. (Μονάδες 8)

β) Αν είναι $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 1$, να υπολογίσετε το $f'(0)$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to 0^-} \frac{g(x)}{f(x)}$. (Μονάδες 9)

6. ΘΕΜΑ 2 – 24757

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45°.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0) = 1$. (Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(0,1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$. (Μονάδες 9)

Επιπλέον ερώτημα :

Δίνεται $h(x) = e^x$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(0,1)$ εφάπτεται και της C_h.

7. ΘΕΜΑ 2 – 24756

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=2$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}$. (Μονάδες 8)

8. ΘΕΜΑ 2 – 24755

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1-\frac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$. (Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0,f(0))$. (Μονάδες 5)

9. ΘΕΜΑ 2 – 33816

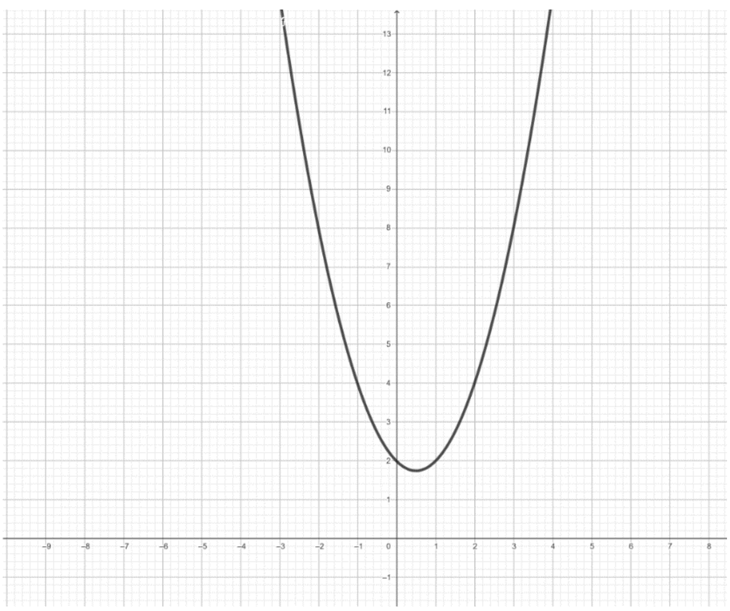
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=x^2-x+2$.

α) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{A}(0,1)$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y=x+1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της g

στο σημείο της $\mathrm{B}(1,2)$. (Μονάδες 8)

γ) Αφού αντιγράψετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g, να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $y=x+1$. (Μονάδες 9)



10. ΘΕΜΑ 2 – 33632

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ -x^2+1, & x>0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_o=0$ και να σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A(0, f(0))$. (Μονάδες 12)

11. ΘΕΜΑ 2 – 34437

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x+2x$, $x>0$ και $g(x)=e^{x+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1. (Μονάδες 8)

γ) Να ορίσετε την αντίστροφο συνάρτηση της g. (Μονάδες 8)

12. ΘΕΜΑ 2 – 31743

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x\eta\mu x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f και να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0)$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=f'(x)-\frac{1}{3}$, $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν

$\varphi(0)<0$ και $\varphi(\frac{\pi}{2})>0$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$. (Μονάδες 9)

13. ΘΕΜΑ 4 – 28340

Έστω μια συνάρτηση $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=-x+1$. Δίνεται ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$, έχει εξίσωση $y=g(x)$.

α) Να βρείτε το $f(-1)$ και το $f'(-1)$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων fog και gof, (Μονάδες 6)

ii. τις παραγώγους $(fog)'(2)$ και $(gof)'(-1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_{fog} στο σημείο της με τετμημένη $x_1=2$ και η εφαπτομένη της C_{gof} στο σημείο της με τετμημένη $x_0=-1$, ταυτίζονται. (Μονάδες 6)

14. ΘΕΜΑ 2 – 28302

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(0) = -2$ και $f'(0) = 0$.

Έστω επίσης οι συναρτήσεις g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = -x$ και $gof : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή $(gof)(0)$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την παράγωγο $g'(-2)$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την παράγωγο της gof στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της gof

στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$. (Μονάδες 7)

15. ΘΕΜΑ 2 – 27315

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{αν } x<2 \\ \\ \alpha x^2-4, & \text{αν } x\geq 2 \end{cases}$ με $\alpha \in R$.

α) Να βρείτε τα πλευρικά όρια της f στο $x_0=2$, δηλαδή τα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=2$. (Μονάδες 07)

γ) Αν α = 2, να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο της συνάρτησης f. (Μονάδες 06)

16. ΘΕΜΑ 4 – 36815

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-2,2]$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x) + x^2 = 4 \text{ για κάθε } x \in [-2,2]$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. (Μονάδες 06)

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$, τότε να βρείτε τον τύπο της f. (Μονάδες 09)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 04)

δ) Ένα κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης της f. Καθώς περνάει από το σημείο $B(-1,\sqrt{3})$, η τεταγμένη του y αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του κινητού τη χρονική στιγμή που περνάει από το B. (Μονάδες 06)

17. ΘΕΜΑ 4 – 36787

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x$.

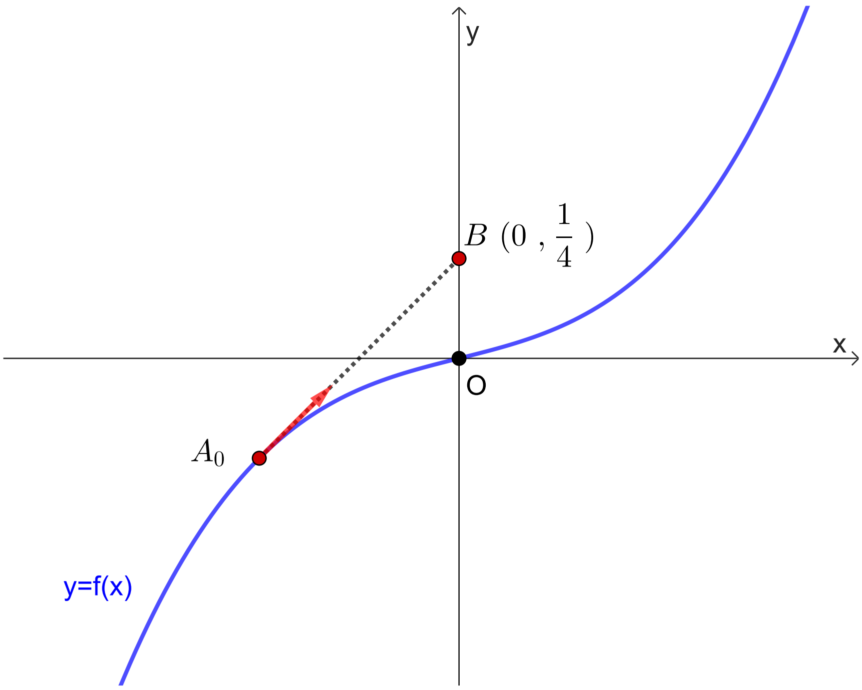
α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$

έχει εξίσωση $y = \left(3\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)x - 2\alpha^3$. (Μονάδες 8)

β) Ένα αυτοκίνητο κινείται τη νύχτα, κατά μήκος ενός επίπεδου δρόμου. Θεωρήστε το αυτοκίνητο ως σημείο στο επίπεδο Oxy και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, ως τον δρόμο που αυτό κινείται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_o, που το αυτοκίνητο βρίσκεται στο σημείο A_0, οι προβολείς του φωτίζουν μια πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο $B\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A_0. (Μονάδες 8)

ii. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή t_o, είναι 2, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του αυτοκινήτου, τη χρονική στιγμή t_o. (Μονάδες 9)



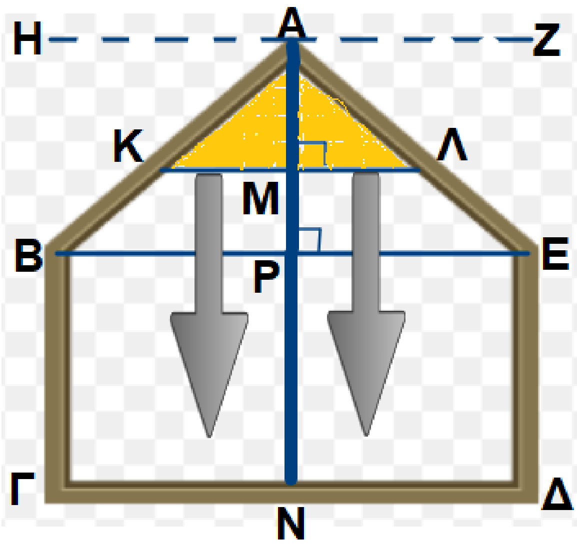
Επιπλέον ερωτήματα :

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f οι οποίες είναι παράλληλες στην ευθεία $13x - 4y + 4 = 0$.

δ) Εξετάστε αν υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ε) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g έχει ένα τουλάχιστον σημείο τομής με τον $x'x$ με τετμημένη $x_0 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

18. ΘΕΜΑ 4 – 25257



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο το οποίο αποτελείται από το ορθογώνιο $ΒΓΔΕ$ και το ισοσκελές τρίγωνο $ΑΒΕ$. Είναι $ΑΡ = 0{,}8\,\text{m}$, $ΒΕ = 1{,}6\,\text{m}$, $ΑΜ = x\,\text{m}$, $ΒΓ = 1\,\text{m}$.

Το ορατό κάτω μέρος $ΚΛ$ μιας ηλεκτροκίνητης σίτας, κατεβαίνει παράλληλα προς την αρχική της θέση $ΗΖ$, με σταθερό ρυθμό, ώστε το $Μ$ να διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα $ΑΝ$ (με $ΑΜ \neq 0$).

Αν $Ε = Ε(x)$ είναι το εμβαδό του παραθύρου που καλύπτει η σίτα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδό $Ε$, ισχύει

$$E(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ αν } x \in \left(0, \frac{4}{5}\right) \\ \frac{8}{5}x - \frac{16}{25}, & \text{ αν } x \in \left[\frac{4}{5}, \frac{9}{5}\right] \end{cases}, \text{ σε m}^2.$$

(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $Ε$ ως προς x, όταν $x = \frac{4}{5}\,\text{m}$, είναι ίσος με $E'\left(\frac{4}{5}\right) = \frac{8}{5}\,\text{m}^2/\text{m}$.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού $Ε$ ως προς τον χρόνο t, τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $x = \frac{4}{5}\,\text{m}$, αν δίνεται επιπλέον ότι $x'(t) = 0{,}08\,\text{m/s}$ για κάθε $t \geq 0$.

(Μονάδες 08)

Επιπλέον ερωτήματα :

δ) Μια εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $E(x)$ διέρχεται από το σημείο $Θ\left(0, -\frac{1}{4}\right)$.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης.

ε) Να βρείτε $x_0 \in \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ για το οποίο ισχύει $E'(x_0) = \dfrac{E\left(\frac{4}{5}\right) - E\left(\frac{2}{5}\right)}{\frac{4}{5} - \frac{2}{5}}$.

19. ΘΕΜΑ 2 – 36827

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = lnx,\ x > 0$ και $g(x) = e^{-x},\ x \in R$.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση g έχει αντίστροφη και να αποδείξετε ότι $g^{-1} = -f$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}, x \in (0, +\infty)$. (Μονάδες 8)

γ) Έστω $h(x) = (g \circ f)(x)$.

Να βρείτε τον μοναδικό αριθμό ξ ο οποίος ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την συνάρτηση h στο διάστημα $[2, 8]$. (Μονάδες 8)

20. ΘΕΜΑ 2 – 36851

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -5x^2 - 3x + 1, & \alpha\nu\ x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 1, & \alpha\nu\ x > 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. (Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0. (Μονάδες 7)

γ) Να δικαιολογήσετε γιατί μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα [-1,1] και να βρείτε ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1,1)$ για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$. (Μονάδες 11)

21. ΘΕΜΑ 2 – 31643

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x,\ x \in [1,2]$.

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle

στο διάστημα $[1,2]$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9$ έχει μία, τουλάχιστον,

ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. (Μονάδες 13)

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [0,1] \\ x^2, & x \in (1,4] \end{cases}$

α) Εξετάστε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0,4]$.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές του $\xi \in (0,4)$ για τις οποίες ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(4)-f(0)}{4-0}$

γ) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω με $\varepsilon\varphi\omega = 6$.

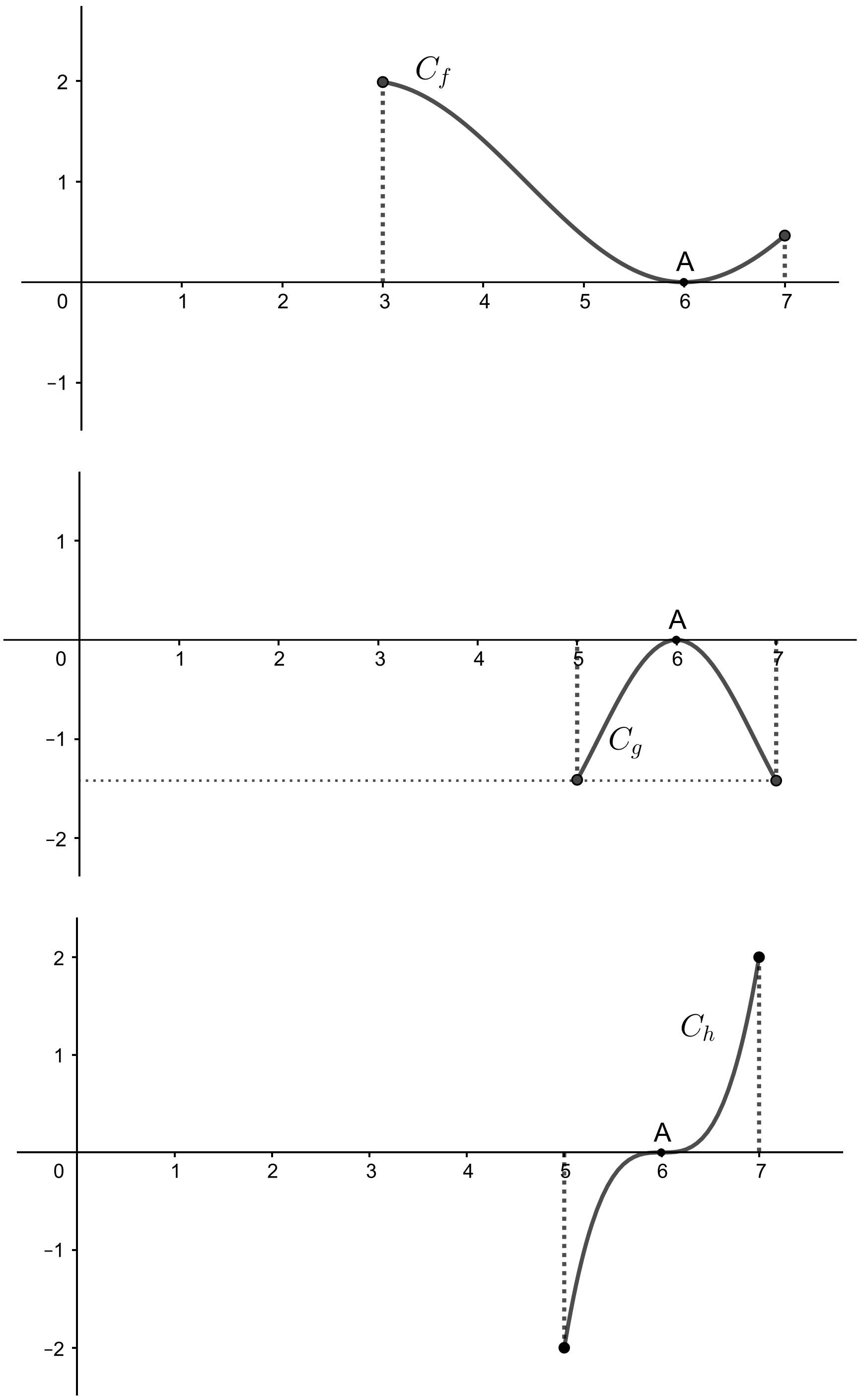
Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) \cdot \eta\mu x + (f(x) - 4) \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2, \pi)$.

στ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $ln\, x + f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

23. ΘΕΜΑ 2 – 36842

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 3 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f, g και h, οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f, g και h. (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού τους. (Μονάδες 10)

ii. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της. (Μονάδες 09)

Επιπλέον ερώτημα :

γ) Εξετάστε αν υπάρχουν τα όρια : $\lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{h(x)}$

24. ΘΕΜΑ 4 – 29150

Η συνάρτηση $x(t)=(t-2)(t-1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού Α, που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

α) i. Να βρείτε πότε το κινητό Α είχε ταχύτητα μηδέν. (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό Α κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε το συνολικό διάστημα S που διήνυσε το κινητό Α. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού Α, από τη χρονική στιγμή 1 sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του Α ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το Α στο διάστημα αυτό. (Μονάδες 06)

25. ΘΕΜΑ 2 – 24283

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-3, & \text{αν } x\in[-1,2] \\ x-1, & \text{αν } x\in(2,5] \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=2$. (Μονάδες 09)

γ) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,5]$. (Μονάδες 06)

Επιπλέον ερωτήματα :

δ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x)=\frac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)}$

ε) Εξετάστε αν ισχύουν για την f οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-1,0]$.

στ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$.

26. ΘΕΜΑ 4 – 31793

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=lnx+1-\frac{1}{x}\,, x>0$ και $g(x)=\ln(lnx)\,, x>1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα την $x=1$. (Μονάδες 7)

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $T(e,g(e))$. Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη της (ε). (Μονάδες 8)

γ) Υποθέτουμε ότι $g(x)<f(x)$ για κάθε $x>1$. Ένα σημείο $M(x,0)$ κινείται με σταθερή ταχύτητα 2 cm/sec πάνω στον θετικό ημιάξονα, προς τα δεξιά. Θεωρούμε τα σημεία $B(x\,,f(x))$, $\Gamma(x\,,g(x))$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $OB\Gamma$ τη χρονική στιγμή που το M βρίσκεται στη θέση $(e^2,0)$. (Μονάδες 10)

27. ΘΕΜΑ 2 – 26366

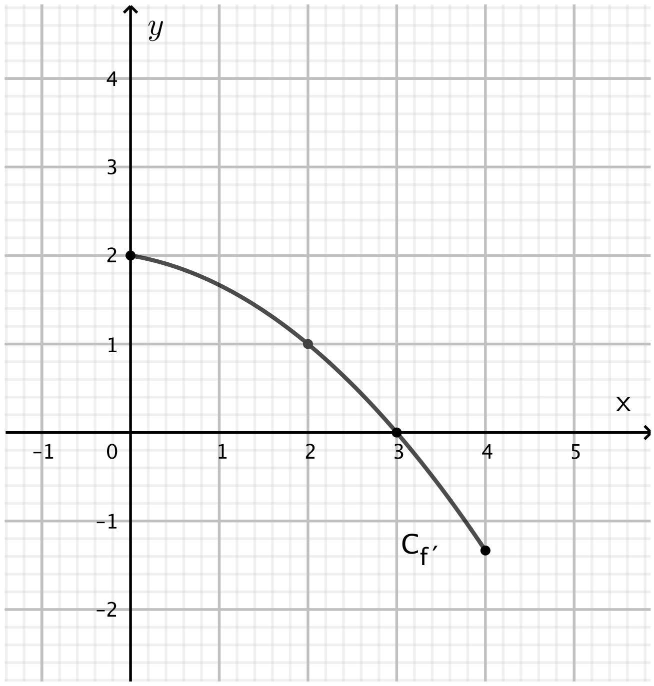
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$.

α) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_o = 2$; (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$. (Μονάδες 08)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$. (Μονάδες 06)

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f''(x)dx$. (Μονάδες 05)



28. ΘΕΜΑ 2 – 33633

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 3x + 2,\ x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 9)

β) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 10)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) + 2023 = 0$ έχει θετική λύση. (Μονάδες 6)

Επιπλέον ερωτήματα :

γ) Αν x_1 η λύση της εξίσωσης $f(x) + 2023 = 0$ και x_2 η λύση της εξίσωσης $f^3(x) + f(x) = 0$ τότε

i) Να δείξετε ότι $x_1 < x_2 < 1$

ii) Αν F μια παράγουσα της f , να δείξετε ότι η F παρουσιάζει ελάχιστο στο x_2 .

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 1) = 5$ έχει 2 λύσεις .

ε) Ένα σημείο κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό 2 μονάδες/s . Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου , τη στιγμή που θα έχει τεταγμένη 5 .

29. ΘΕΜΑ 4 – 33388

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. (Μονάδες 5)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}\left(\frac{\pi}{2},\pi+1\right)$. (Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=2x+1$ εφάπτεται της C_f σε άπειρα σημεία. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι:

i. $|f'(x)|\le 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 3)

ii. $|f(\beta)-f(\alpha)|\le 3|\beta-\alpha|$, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$. (Μονάδες 4)

30. ΘΕΜΑ 4 – 29927

Δίνεται η συνάρτηση f : (0, 1) ∪(1, +∞) → $\mathbb{R}$ με f(x) = $\frac{x}{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ (Μονάδες 6)

β) i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 5)

γ) Δίνεται η εξίσωση $e^x = x^a$ (1) με x >0. Να αποδείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση f(x) = α

και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης αυτής, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α.

(Μονάδες 9)

31. ΘΕΜΑ 4 – 27319

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = (x-2)e^x + (x-1)lnx$, x∈(0, +∞)

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο

με τετμημένη x_0 στο διάστημα (1,2). (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f' (Μον. 3) και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια (Μον. 8) (Μονάδες 11)

γ) Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα λογισμικό τη γραφική παράσταση της f και διαπίστωσε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον x'x στο σημείο x_0 του α) ερωτήματος αλλά και σε ένα ακόμη σημείο. Βοηθήστε το μαθητή να αποδείξει ότι πράγματι η C_f τέμνει τον άξονα x'x σε δύο ακριβώς σημεία. (Μονάδες 09)

32. ΘΕΜΑ 4 – 27455

Δίνονται οι συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases} -1, & x<2 \\ e^{x-2}-2, & x\geq 2 \end{cases}$ και

$g:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}$ με $g(x) = -\frac{1}{2}x^2+2x-3$

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:

i. τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x)\geq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii. τη συνάρτηση g και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 14)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για κάθε $x\neq 2$. (Μονάδες 04)

γ) Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν $f(x)>g(x)$ κοντά στο x_0, τότε και $\lim_{x\to x_0} f(x) > \lim_{x\to x_0} g(x)$.»

Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

33. ΘΕΜΑ 2 – 27082

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)^3-3x,\ \ x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f. (Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2,+\infty)$ είναι το διάστημα $[-5,+\infty)$. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2,+\infty)$. (Μονάδες 07)

34. ΘΕΜΑ 2 – 25124

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=-x^3,\ x\in(-\infty,0]$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}. (Μονάδες 7)

Επιπλέον ερώτημα :

δ) Ένα σημείο κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του έχει ρυθμό μεταβολής 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(2,0)$ και $M\big(x,f(x)\big)$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΜ τη στιγμή που το σημείο Μ βρίσκεται στο σημείο (-1,1) .

35. ΘΕΜΑ 4 – 26605

Δίνεται συνεχής συνάρτηση f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- $f^2(x) - 5 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(2) = 3$

α) Να αποδείξετε ότι :

i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$. (Μονάδες 4)

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = x^2 -$ συνx, με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 7)

ii. Η εξίσωση $f^2(x) = 5 +$ συνx έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα (-π, π). (Μονάδες 9)

Επιπλέον ερώτημα :

γ) Υπολογίστε το όριο : $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f^2(x)-9}{\eta\mu(x-2)}$

36. ΘΕΜΑ 4 – 32524

Έστω η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\frac{e}{x}-\ln x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1-x)=x\ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x=1$. (Μονάδες 06)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+x}{e-x\ln x-ex}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 06)

ii. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$. (Μονάδες 07)

Επιπλέον ερωτήματα :

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $g(x - \ln x) = g(2)$

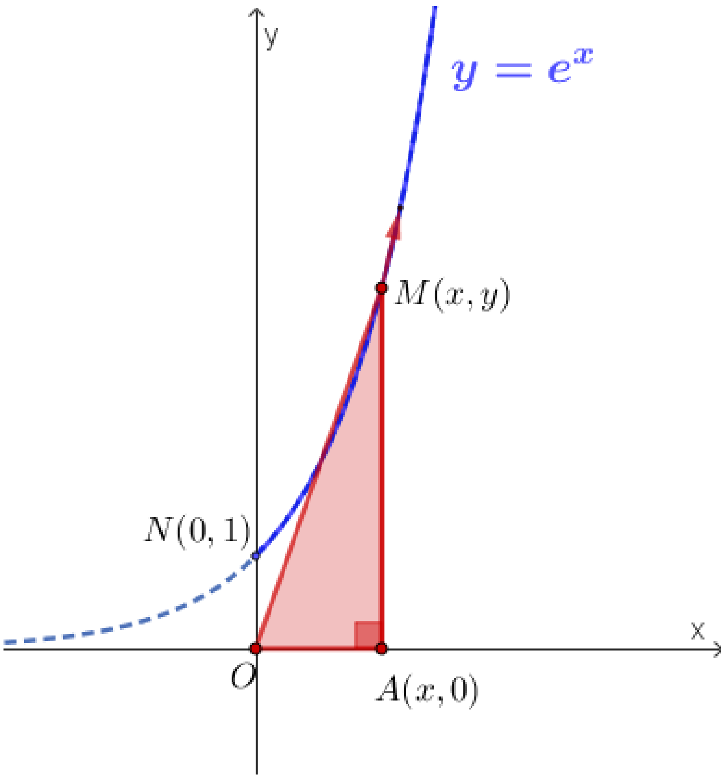
ε) Να λύσετε την ανίσωση : $e^{1-x} - x > g(1)$

στ) Να δείξετε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει : $2 \cdot g(x + 1) < g(x) + g(x + 2)$

37. ΘΕΜΑ 4 – 28685

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2, x \in (0, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$. (Μονάδες 08)

β) Ένα κινητό Μ ξεκινά από το σημείο $\mathrm{N}(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x,\ x \geq 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2cm/sec$.



i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου ΟΑΜ, όπου $O(0,0), A(x,0)$ και $M(x,y)$ είναι $E(x) = \frac{1}{2}xe^x$, $x \geq 0$. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E είναι $3e^2 cm^2/sec$. (Μονάδες 10)

38. ΘΕΜΑ 2 – 23937

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f,

στο σημείο της $\mathrm{A}(1, f(1))$. (Μονάδες 09)

39. ΘΕΜΑ 2 – 29211

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x < 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 08)

γ) i) Να αποδείξετε ότι η f είναι “1 – 1”. (Μονάδες 05)

ii) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, την f^{-1}. (Μονάδες 07)

40. ΘΕΜΑ 4 – 23376

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, $x\in\mathbb{R}$ και
- $g(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=g\circ f$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι:

iii. η συνάρτηση h είναι περιττή. (Μονάδες 04)

iv. η συνάρτηση h είναι “1-1”. (Μονάδες 06)

γ) Να λυθεί η εξίσωση $h(x-1)+h\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0$, $x>0$. (Μονάδες 08)

41. ΘΕΜΑ 4 – 23200

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1,\ln 2)$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει $f(\alpha\ln\alpha)\le f(\ln\alpha)$ (Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^{x-1}+\ln x\right)=\ln 2$. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+(3-\ln 2)x-3$, $x\in\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

Επιπλέον ερωτήματα :

ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = x^3$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

στ) Αν x_0 η ρίζα της εξίσωσης $f(x) = x^3$, να δείξετε ότι $\ln f(x_0) < 0$.

42. ΘΕΜΑ 4 – 23375

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right),\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. (Μονάδες 06)

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(x+f(x)\right)>x,\ x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

43. ΘΕΜΑ 4 – 23199

Έστω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x>1$ να ισχύει

$$xf(x)f'(x)=\frac{1}{2}\ \text{και}\ f(e)=1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-\ln x,\ x>1$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f. (Μονάδες 9)

Έστω $f(x)=\sqrt{\ln x},\ x>1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e,0)$ και $B(e,1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο B. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $\dfrac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\dfrac{1}{x}$. (Μονάδες 8)

44. ΘΕΜΑ 3 – 34026

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=1-2\ln x,\ x>0$.

α) Να βρείτε:

i. Την μονοτονία της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)

ii. Το πρόσημο της f. (Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{\ln x}{x^2},\ x>0$, έχει μέγιστη τιμή την $g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2e}$. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g. (Μονάδες 6)

45. ΘΕΜΑ 2 – 34025

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{1}{\ln x}$, $x\in\left(1,+\infty\right)$.

α) i. Να δείξετε ότι $f'\left(x\right)<0$ με $x\in\left(1,+\infty\right)$. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

β) i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της f. (Μονάδες 9)

46. ΘΕΜΑ 4 – 23215

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1. (Μονάδες 5)

Δίνεται επιπλέον ότι

- η συνάρτηση f' είναι συνεχής,
- $f(0)=-1$ και $f(2)=1$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$. (Μονάδες 5)

γ)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (Μονάδες 4)

ii.Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_o\in(0,2)$. (Μονάδες 5)

δ) Αν g είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $g'(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_o. (Μονάδες 6)

47. ΘΕΜΑ 4 – 36814

Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x, y ώστε να έχει εμβαδόν $800\ m^2$. Η μία πλευρά της περιοχής, μήκους x, θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά m και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά m, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συναρτήσει του x, είναι:

$$K(x)=8x+\frac{3200}{x}, x>0$$ (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο, και να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους αυξάνεται για κάθε $x>0$. (Μονάδες 07)

48. ΘΕΜΑ 4 – 33596

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ και το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$. Αν $\mathrm{K}(x,\ln x)$ με $x>0$ τυχαίο σημείο της C_f και $\mathrm{M}(x_o,\ln x_o)$ με $x_o>0$ το σημείο εκείνο της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A, να αποδείξετε ότι:

α) η απόσταση AK συναρτήσει του $x>0$ είναι $d(x)=\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}$. (Μονάδες 5)

β) $x_o^2+\ln x_o-2=0$. (Μονάδες 7)

γ) η εφαπτομένη της C_f στο Μ

i. είναι κάθετη στην ΑΜ. (Μονάδες 6)

ii. τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $(x_o^3-x_o,0)$. (Μονάδες 7)

49. ΘΕΜΑ 4 – 27092

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f'

μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού.

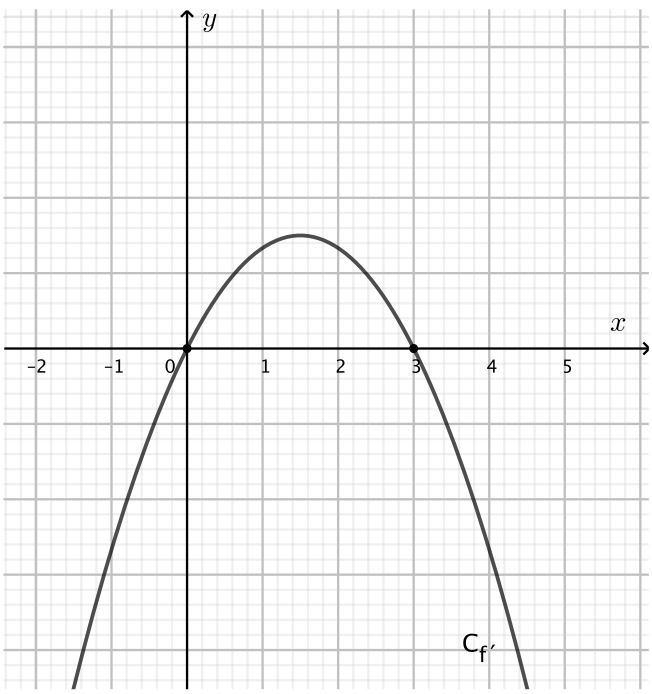
α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 06)

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία A(0,-1) και B(3,2),

τότε να βρείτε τα ακρότατα της f. (Μονάδες 04)

γ) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f. (Μονάδες 08)

δ) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$, στο διάστημα $(0,3)$. (Μονάδες 07)



Επιπλέον ερώτημα :

ε) Αν $f(x)=-\frac{2}{9}x^3+x^2-1$ και $g(x)=f(\eta\mu x)$, $x\in[0\,,2\pi]$.

Μελετήστε την g ως προς τα ακρότατα.

50. ΘΕΜΑ 4 – 33642

Έστω f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $f(0)=1$

και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x)+2x=f'(x)+x^2$

α) Να αποδείξετε ότι αν $g(x)=f(x)-x^2$, τότε ισχύει

i. $g'(x)=g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 5)

ii. $f(x)=e^x+x^2,\ x \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

i. Υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_o, f(x_o)),\ x_o \in (-1, 0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

(Μονάδες 7)

ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o και για την ελάχιστη τιμή m της συνάρτησης ισχύει $e^{-1}<m<2$.

(Μονάδες 7)

51. ΘΕΜΑ 4 – 29149

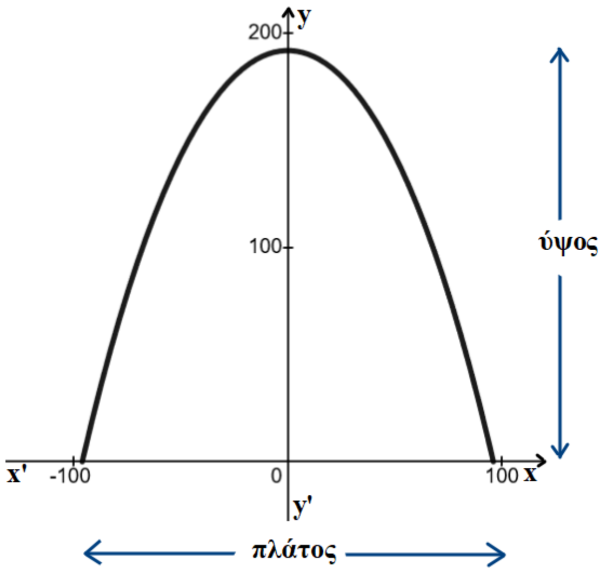
Δίνεται η συνάρτηση $g:[-96,96]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=e^{\frac{x}{96}}+e^{-\frac{x}{96}}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha>0$ και $f(x)=2\alpha\left[g(96)-g(x)\right],\ x\in[-96,96]$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(-96,96)$. (Μονάδες 06)

ii. Να προσδιορίσετε τον αριθμό α όταν επιπλέον, είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, παριστάνει την αψίδα του Σεντ Λούις η οποία έχει την ιδιότητα το πλάτος της να ισούται με το ύψος της. (Μονάδες 07)



Επιπλέον ερώτημα :

γ) Δίνεται η $h(x)=g(x)-e^{\frac{x}{96}}-x$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της h.

52. ΘΕΜΑ 4 – 34441

Μία βιοτεχνία που ράβει ρούχα πρόκειται να ετοιμάσει μία παραγγελία για 600 παντελόνια σε μία ημέρα. Για το λόγο αυτό θα απασχολήσει ράφτες (άνδρες και γυναίκες), από το εργατικό δυναμικό της, που ράβουν 6 παντελόνια την ώρα και θα αμείβονται με 12 ευρώ την ώρα. Για τον συντονισμό και την εποπτεία των ραφτών, οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα απασχολήσουν και μία από τις γυναίκες μόδιστρους της βιοτεχνίας ως επιστάτρια, την οποία θα πληρώνουν 20 ευρώ την ώρα. Επιπλέον οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα πληρώνουν ασφαλιστικές εισφορές, 20 ευρώ την ημέρα για κάθε εργαζόμενο, συμπεριλαμβανομένης και της γυναίκας επιστάτριας. Αν x είναι ο αριθμός των ραφτών (άνδρες και γυναίκες) που θα απασχολήσει η βιοτεχνία για την διεκπεραίωση της παραγγελίας τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος για την εκτέλεση της παραγγελίας είναι:

$\mathrm{K}(x) = 20x + \dfrac{2000}{x} + 1220$ ευρώ με $x > 0$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι αν οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας απασχολήσουν για την εν λόγω παραγγελία, 10 ράφτες, η παραγγελία αυτή θα εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το ελάχιστο κόστος. (Μονάδες 3)

δ) Πόσες ώρες θα απασχοληθούν οι ράφτες, πέραν του οκταώρου (υπερωρία), ώστε η παραγγελία να εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος; (Μονάδες 5)

53. ΘΕΜΑ 4 – 26633

Με συρματόπλεγμα μήκους 400 μέτρων, έχουμε περιφράξει μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου, από τις τρείς πλευρές της, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η τέταρτη πλευρά, με μήκος x μέτρα, είναι ευθυγραμμισμένη κατά μήκος της όχθης ενός ποταμού.

α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής συναρτήσει του μήκους x, δίνεται από τον τύπο:

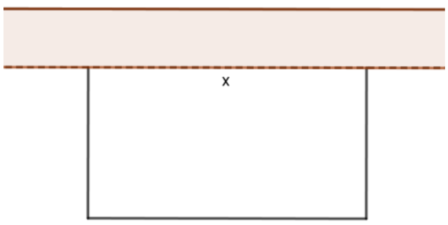
$\mathrm{E}(x) = 200x - \dfrac{1}{2}x^2$ με $0 < x < 400$. (Μονάδες 8)

β) Να υπολογίσετε την τιμή του x, για την οποία το εμβαδό $\mathrm{E}(x)$ της περιφραγμένης περιοχής γίνεται μέγιστο.

(Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού $\mathrm{E}(x)$ της περιφραγμένης περιοχής. (Μονάδες 5)

δ) Ο Ιάσωνας ισχυρίζεται ότι υπάρχει μοναδική τιμή του x, που ανήκει στο διάστημα (0, 200) για την οποία το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής, ισούται με 300·π τετραγωνικά μέτρα. Είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός του Ιάσωνα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



54. ΘΕΜΑ 4 – 34440

Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το O(0,0), δίνεται το σημείο $\mathrm{M}(1,1)$. Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το Μ τέμνει τους θετικούς ημιάξονες $\mathrm{O}x$ και $\mathrm{O}y$ στα σημεία $\mathrm{A}(x,0)$, $x>0$ και $\mathrm{B}(0,y)$, $y>0$ αντιστοίχως, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

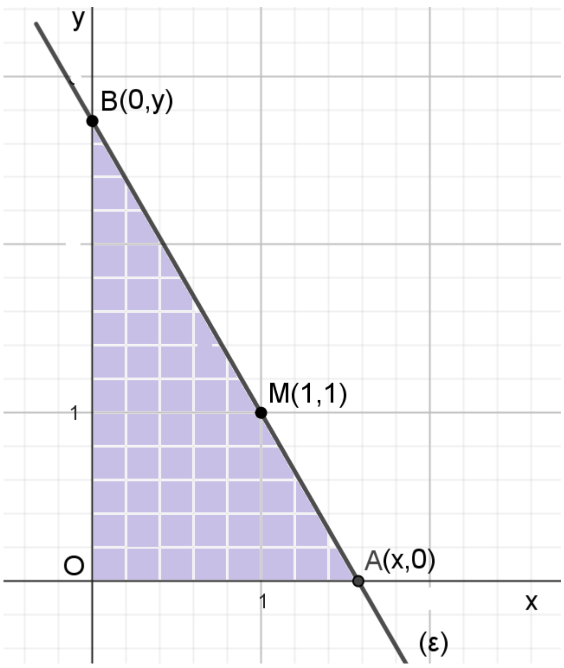
α) Για $x \in (1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ συναρτήσει του x

δίνεται από τον τύπο: $\mathrm{E}(x)=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για $x=2$ το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ παίρνει την ελάχιστη τιμή, η οποία και να βρεθεί . (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της E, στο σημείο $(3,\mathrm{E}(3))$ και τα σημεία Γ, Δ στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

δ) Ένα σημείο $\mathrm{K}(x,y)$ κινείται πάνω στην ευθεία (ζ), και η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής 3 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του. (Μονάδες 6)



Επιπλέον ερωτήματα :

ε) Δίνεται συνάρτηση $f(x)=E(x)$, $x \in (1,3]$

i) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\frac{5}{2}$

ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=3$

iii) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha$.

iv) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f'(x)+f(x)=0$.

v) Εξετάστε αν υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $2y-x=0$.

Στη συνέχεια δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)-\frac{1}{2}x=0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

vi) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $2y+3x=0$.

55. ΘΕΜΑ 4 – 29644

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [-3,2] η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το 3 και τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία A και B.

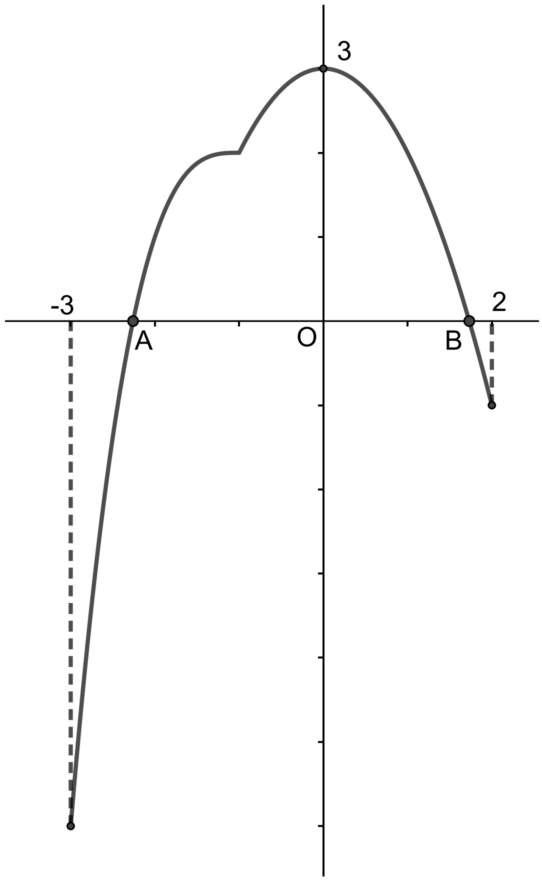
Έστω g η συνάρτηση με $g(x) = f(x) + x, x \in [-3,2]$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [-3,2]. (Μονάδες 05)

ii. Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. (Μονάδες 10)

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2), να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο που η f παρουσιάζει μέγιστο, έχει εξίσωση $y = x + 3$. (Μονάδες 10)



Επιπλέον ερωτήματα :

Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της παραγωγίσιμης συνάρτησης f τότε :

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

δ) Υπολογίστε τα όρια : i) $\lim_{x \to \alpha^-} \frac{1}{f(x)}$ ii) $\lim_{x \to \beta} \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}$

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) \cdot \eta\mu\xi + f(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi = 0$.

στ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) \cdot \eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x = 0$ έχει τουλάχιστον δυο ρίζες.

56. ΘΕΜΑ 4 – 28337

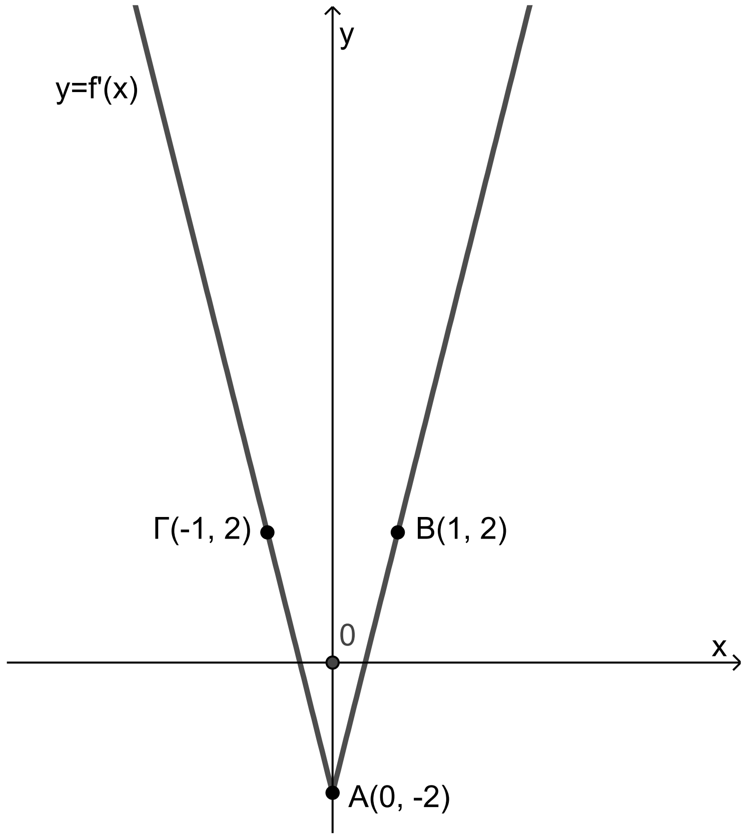
Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η γραφική παράσταση C της παραγώγου f', είναι οι δύο ημιευθείες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Αυτές έχουν κοινή αρχή το σημείο $A(0\,,-2)$ και διέρχονται η μία από το σημείο $B(1\,,2)$ και η άλλη από το $\Gamma(-1\,,2)$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 6)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 6)

γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της f. (Μονάδες 6)

δ) Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\Delta(1,0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $A\Delta$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 7)



Επιπλέον ερωτήματα :

ε) Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της δεύτερης παραγώγου της f .

στ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 - 3x - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

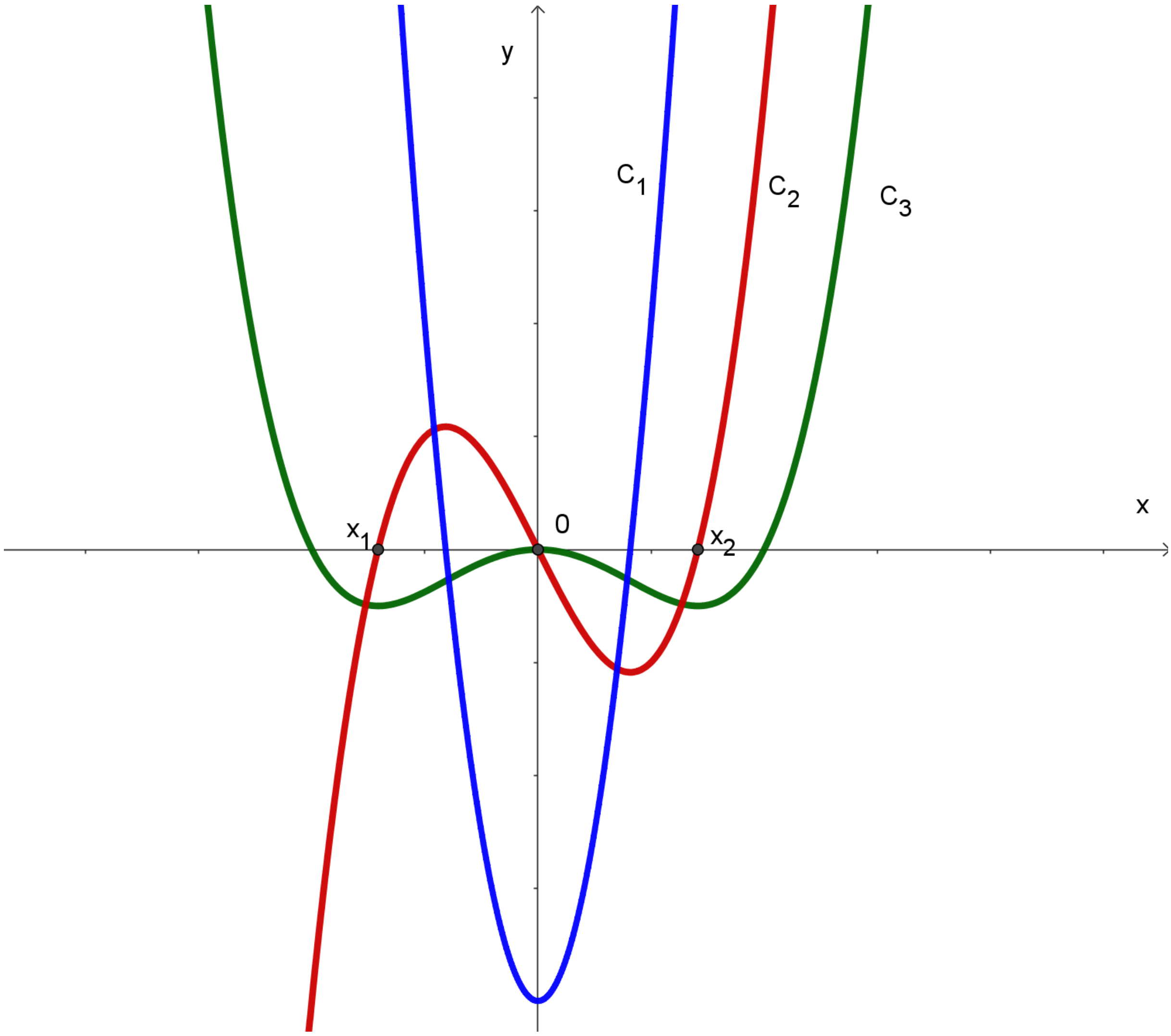
i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + 4x = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα x_0 για την οποία ισχύει $1 < e^{x_0} < e$

57. ΘΕΜΑ 2 – 32694

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F, όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η C_2,



α)

i. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε με το πρόσημο της f καθώς και την μονοτονία της F. (Μονάδες 10)

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$F' = f$		0	0	0	
F					

ii. να βρείτε το πλήθος καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων της F. (Μονάδες 08)

β) να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_3 με την σειρά που δίνονται αντιστοιχούν στις συναρτήσεις f' και F. (Μονάδες 07)

Επιπλέον ερώτημα :

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 4x$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x}$

58. ΘΕΜΑ 2 – 26707

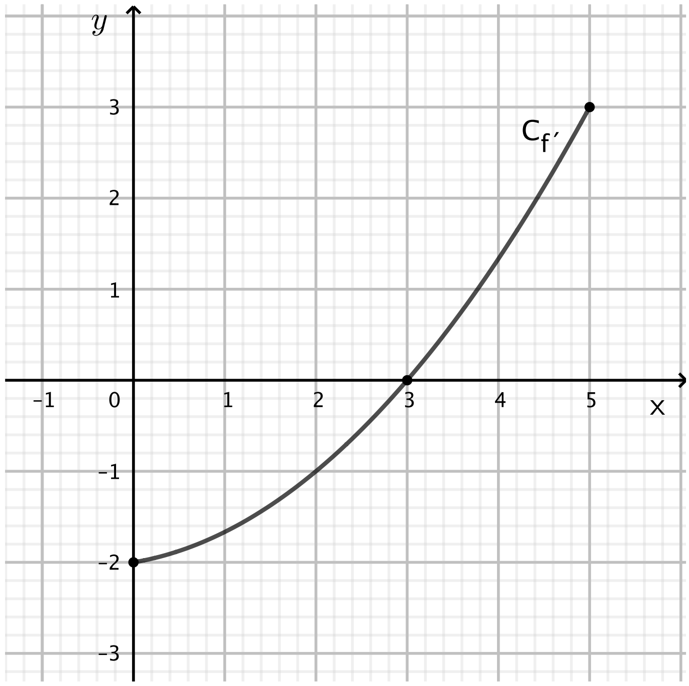
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,5]$.

α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$; (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,5]$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x_o = 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 09)



Επιπλέον ερωτήματα :

δ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 27x + 46$, $x \in [0,5]$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

iv) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x - e^5 - 8$.

Εξετάστε αν έχουν κοινά σημεία οι γραφικές παραστάσεις των f και g .

59. ΘΕΜΑ 2

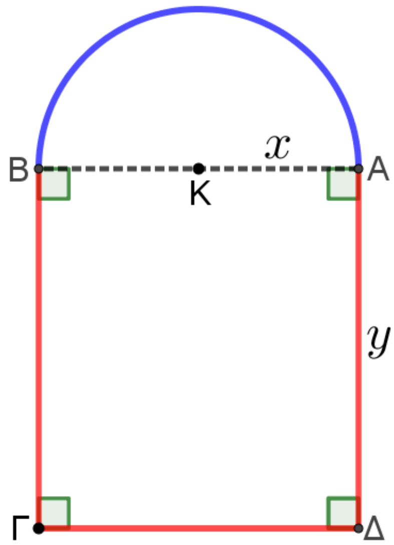
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2,\ x \in [0,2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

60. ΘΕΜΑ 4 – 28534

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με $4\ m$, αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(AK) = x\ m$ και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(A\Delta) = y\ m$. Ονομάζουμε $E(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.



α) Να αποδείξετε ότι $y = -\frac{\pi+2}{2}\cdot x + 2$ και $E(x) = -\frac{\pi+4}{2}\cdot x^2 + 4x$, με $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου. (Μονάδες 9)

γ) Ονομάζουμε x_0 την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E(x_0)$ το μέγιστο εμβαδό.

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{ln(E(x))}{E(x)-E(x_0)}$. (Μονάδες 8)

61. ΘΕΜΑ 2 – 25764

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_o = 0$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

62. ΘΕΜΑ 2 – 25761

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(\ln x - 1) + 1,\ x > 0$.

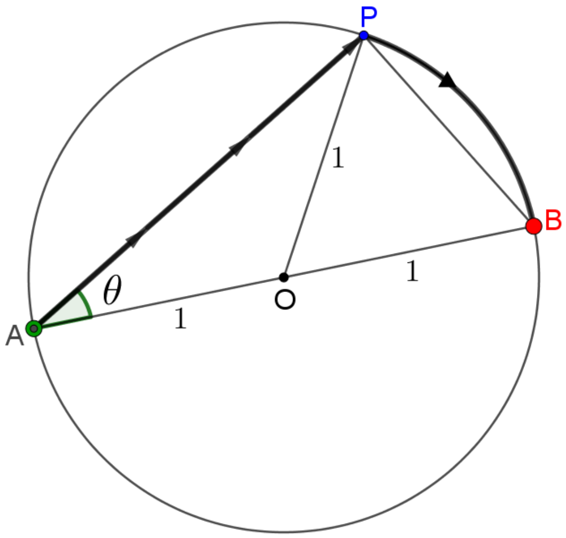
α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x\ln x + 1 = x$. (Μονάδες 12)

63. ΘΕΜΑ 4 – 28532

Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο Α μια κυκλικής λίμνης ακτίνας $1\,Km$ και θέλει να φτάσει στο σημείο Β της λίμνης ώστε η AB να είναι διάμετρος του κύκλου. Θέλει να τα καταφέρει συνδυάζοντας δύο είδη κινήσεων: να κωπηλατήσει αρχικά με βάρκα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AP έχοντας ταχύτητα $3\,Km/h$ και στη συνέχεια τρέχοντας πάνω στην κυκλική περιφέρεια κατά μήκος του τόξου PB με ταχύτητα $6\,Km/h$.

Έστω ότι η μεταβλητή γωνία $P\hat{A}B$ είναι $\theta\ rad$.



α) Να αποδείξετε ότι $(AP) = 2\sigma\upsilon\nu\theta$ και ότι ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο άνδρας για να κάνει τη μετάβαση από το Α στο Β είναι $f(\theta) = \frac{1}{3}\cdot(2\sigma\upsilon\nu\theta + \theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\theta)$ είναι $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$. (Μονάδες 7)

Δίνονται: το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $x\ rad$ σε κύκλο ακτίνας R, είναι $S = x\cdot R$ και ότι (απόσταση) = (χρόνος) x (ταχύτητα).

64. ΘΕΜΑ 4 – 24587

Δίνεται η συνάρτηση $f\colon(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$ και η ευθεία $\varepsilon\colon y = x$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε,

είναι $d(M,\varepsilon) = \sqrt{2}\,|x_0 - ln x_0|$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

από την ευθεία $\varepsilon\colon y = x$, είναι $d(M,\varepsilon) = \sqrt{2}\,(x_0 - ln x_0)$. (Μονάδες 05)

β) i) Να βρείτε το σημείο της C_f, το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε. (Μονάδες 12)

ii) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x$

και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης. (Μονάδες 05)

65. ΘΕΜΑ 4 – 27650

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = lnx, x > 0$ και τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,3)$.

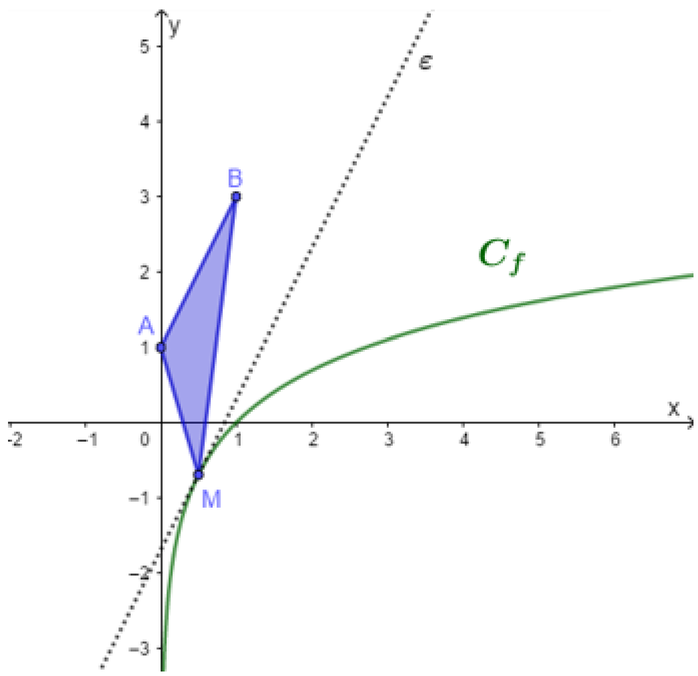
α)

i. Να βρείτε σημείο M_0 της C_f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB.

(Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M_0. (Μονάδες 02)

β) Έστω $E(x) = \frac{1}{2}(2x + 1 - lnx), x > 0$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ABM, όπου M ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο M ταυτίζεται με το M_0 του α) ερωτήματος. (Μονάδες 10)



γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ABM_1 να είναι ορθογώνιο στην κορυφή A. (Μονάδες 07)

Επιπλέον ερώτημα :

δ) Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό $\frac{1}{8}$ μον/s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ τη στιγμή κατά την οποία το Μ βρίσκεται πάνω στον άξονα x'x.

66. ΘΕΜΑ 4 – 23311

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1.

Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x , τότε:

α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 06)

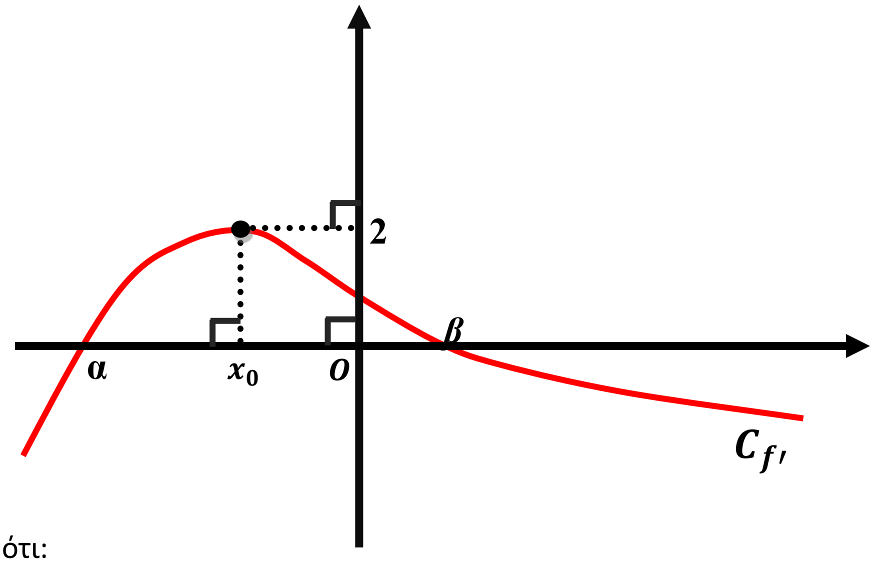
β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους υ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 07)

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0) = \frac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0{,}1\ m/sec$. (Μονάδες 05)

67. ΘΕΜΑ 4 – 23210

Θεωρούμε συνάρτηση $f\colon R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.



Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$,
- τα α, β είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(\alpha) < 0,\ f(\beta) > 0$.
- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$, ισχύει $f(x + 1) - f(x) \leq 2$. (Μονάδες 8)

68. ΘΕΜΑ 2 – 23197

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α, β ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f. (Μονάδες 8)

Επιπλέον ερωτήματα :

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{x-1} - x + 1$

δ) Μελετήστε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ε) Να δείξετε ότι $f(x) + g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

69. ΘΕΜΑ 3 – 33994

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)=0\,.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$. (Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$. (Μονάδες 08)

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$.

i. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο $(0,g(0))$. (Μονάδες 04)

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι κυρτή. (Μονάδες 05)

70. ΘΕΜΑ 2 – 35172

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(1 + x^2)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της. (Μονάδες 12)

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της. (Μονάδες 13)

Επιπλέον ερώτημα :

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x + 1) + f(x) > 0$.

71. ΘΕΜΑ 2 – 34438

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+24x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f και να λύσετε τις εξισώσεις:

$f'(x)=0$ και $f''(x)=0$. (Μονάδες 8)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 9)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής.

(Μονάδες 8)

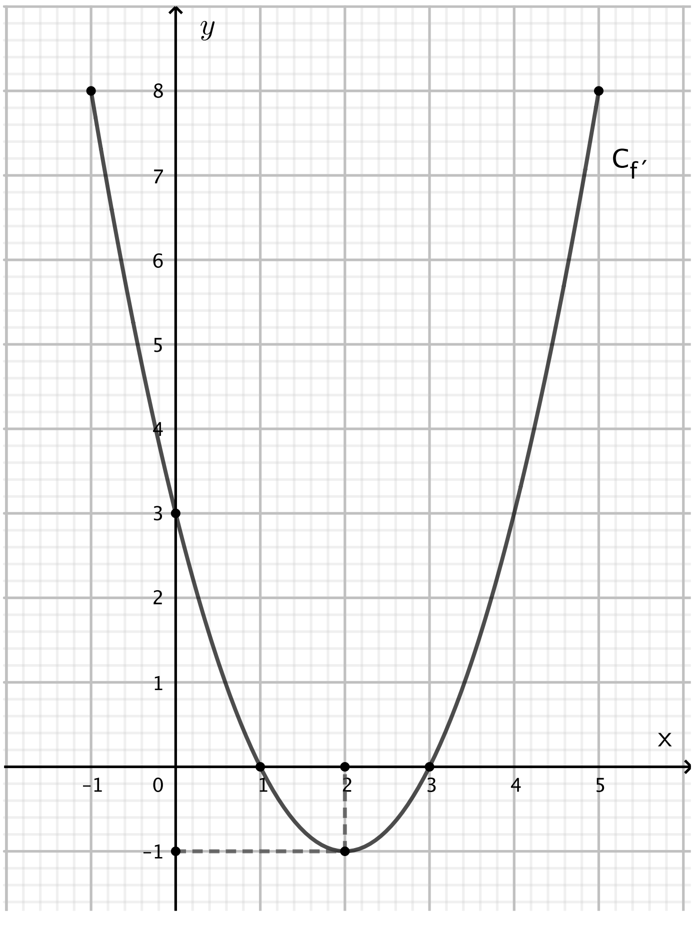
72. ΘΕΜΑ 2 – 26736

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1,5]$.

α) Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου f' είναι το σημείο $A(2,-1)$, με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[-1,2]$ και κυρτή στο $[2,5]$. (Μονάδες 10)

β) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_o=2$; (Μονάδες 06)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $3f(2)-1=0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_o=2$. (Μονάδες 09)



Επιπλέον ερωτήματα :

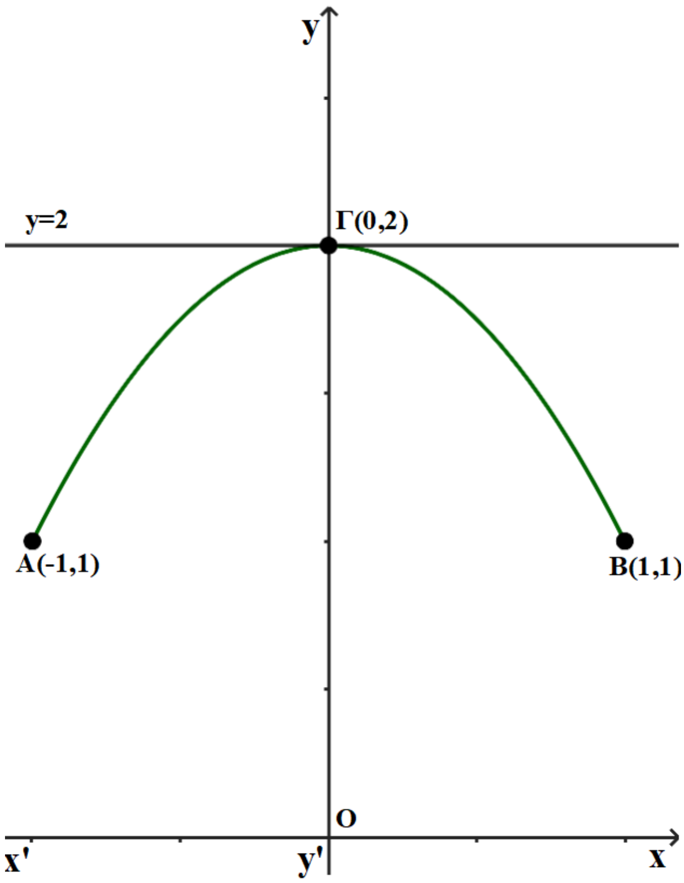
δ) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=(x-1)\cdot(x-3)\cdot f'(x)$. Μελετήστε την h ως προς το πρόσημο.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$.

στ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)>0$.

73. ΘΕΜΑ 2 – 32799

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ και η ευθεία $y=2$. Αν η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από τα σημεία $\mathrm{A}(-1,1)$, $\mathrm{B}(1,1)$ και $\Gamma(0,2)$ τότε με βάση το παρακάτω σχήμα:



α) Να εξηγήσετε γιατί ισχύει: $1\le f'(x)\le 2$, για κάθε $x\in[-1,1]$. (Μονάδες 07)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 08)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 10)

74. ΘΕΜΑ 4 – 31550

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x$. Να αποδείξετε ότι

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_o\in(\frac{1}{2},1)$ το οποίο είναι μοναδικό. (Μονάδες 7)

γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\frac{1}{x_o}+x_o$. (Μονάδες 6)

δ) η εξίσωση $f(x)=2$ είναι αδύνατη. (Μονάδες 6)

75. ΘΕΜΑ 4 – 31549

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}, x>0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $2022^{2023} > 2023^{2022}$. (Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)

δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021,2022]$ και $[2022,2023]$ να αποδείξετε ότι $2f(2022) < f(2021)+f(2023)$. (Μονάδες 7)

Δίνεται $e \simeq 2,71$.

76. ΘΕΜΑ 2 – 31527

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+3x^2-8, x\in\mathbb{R}$.

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα. (Μόρια 10)

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο A(1, f(1)).

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε). (Μόρια 7)

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f, διαφορετικό από το A, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην (ε). (Μόρια 8)

77. ΘΕΜΑ 4 – 27667

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\dfrac{x^2}{2}+2023, x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 05)

ii) το σύνολο τιμών της f' είναι το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η εξίσωση $e^x+x=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα ρ. (Μονάδες 05)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η συνάρτηση $g(x)=\alpha x-f(x)$ με $x\in\mathbb{R}$, έχει μέγιστη τιμή την $\rho f'(\rho)-f(\rho)$. (Μονάδες 09)

Επιπλέον ερωτήματα :

δ) Αν η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f ισούται με $\frac{x_0^2}{2}-x_0+2023$

ε) Να δείξετε ότι ισχύει $f(x)>2023$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

78. ΘΕΜΑ 4 – 25745

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν $f(1)=1$, $f'(1)=0$, $f(0)=f(2)$ και

$$(f'(x))^2+f(x)\cdot f''(x)<0\text{, για κάθε } x\in(0,2)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$. (Μονάδες 5)

ii. $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,2)$. (Μονάδες 5)

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων. (Μονάδες 8)

Επιπλέον ερωτήματα :

Δίνεται ότι ισχύει $f^2(x)+x^2-2x=0$ για κάθε $x\in[0,2]$.

δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο .

ε) Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$, για κάθε $x\in[0,2]$.

στ) Να δείξετε ότι $0\leq f(x)\leq 1$ για κάθε $x\in[0,2]$.

79. ΘΕΜΑ 4 – 24760

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x-\lambda x,\ x>0$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει $e-\lambda=e^e-1-\lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_o\in(1,e)$ με $f'(x_o)=0$. (Μονάδες 6)

γ) για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1,e]$. (Μονάδες 6)

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_o που είναι το $e^{x_o}(1-x_o)+1-\ln x_o$. (Μονάδες 7)

Επιπλέον ερωτήματα :

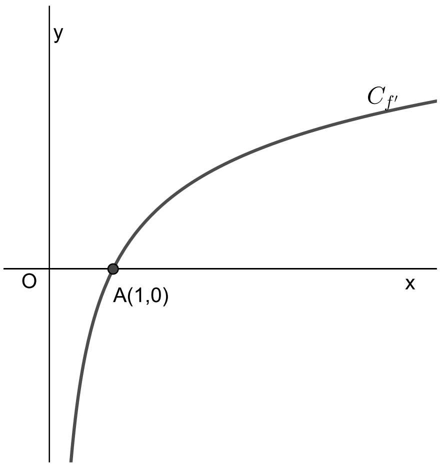
i) Μελετήστε την $h(x)=f(x+1)-f(x)$ ως προς τη μονοτονία .

ii) Μελετήστε την $g(x)=f(x_0+e^x)$ ως προς τη μονοτονία .

iii) Μελετήστε την $k(x)=\ f^3(x)$ ως προς τη μονοτονία .

80. ΘΕΜΑ 4 – 27320

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται στο (0,+ ∞) η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το (0,+ ∞). Δίνεται επίσης ότι η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο (0,+ ∞) με $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = +\infty$.



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f. (Μονάδες 09)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι:

1^{ον}: «Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1».

2^{ον}: «Υπάρχει μοναδικό κ∈(0,+ ∞) τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Μ(κ, $f(\kappa)$) να ισούται με 2».

Ποιοι από τους παραπάνω ισχυρισμούς του μαθητή είναι σωστοί;

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 10)

γ) Τι μπορούμε να πούμε για την κυρτότητα της f στο πεδίο ορισμού της;

Να δικαιολογήσετε την όποια απάντησή σας. (Μονάδες 06)

81. ΘΕΜΑ 4 – 23312

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-2, 2]$ τέτοια ώστε:

f συνεχής στο $[-2, 2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2, 2)$ και

$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$, για κάθε $x \in [-2, 2]$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής. (Μονάδες 08)

β) Αν $f(0) = 3$,

i. Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 = 4 - x^2$, για κάθε $x \in [-2, 2]$ και κατόπιν ότι $f(x) = 1 + \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [-2, 2]$. (Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$. (Μονάδες 08)

82. ΘΕΜΑ 4 – 23531

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - lnx - 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0 \in (0, 1)$ με $f(x_0) < 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)}$. (Μονάδες 9)

83. ΘΕΜΑ 4 – 33999

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{x} \le f(x) \le 1 + \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. (Μονάδες 07)

β) Αν επιπλέον ισχύει $(x+1)f'(x) \cdot \ln(x+1) = -f(x)$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \ln(x+1)$, $x > 0$ είναι σταθερή. (Μονάδες 08)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $\frac{\ln(x+1)}{x} \le g(x) \le \ln(x+1) + \frac{\ln(x+1)}{x}$ και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f. (Μονάδες 10)

84. ΘΕΜΑ 2 – 33995

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της $\varepsilon: y = x$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι "$1-1$". (Μονάδες 09)

Επιπλέον ερωτήματα :

δ) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα σε δυο θέσεις .

ε) Να μελετήσετε την $g(x) = x - f(x)$ ως προς τη μονοτονία .

στ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$

85. ΘΕΜΑ 2 – 35602

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$ με $x\neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y=x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε’): $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

(Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 10)

86. ΘΕΜΑ 2 – 27084

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x+\frac{1}{x},\ \ x\in(0,+\infty)$$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

(Μονάδες 08)

87. ΘΕΜΑ 2 – 34439

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{x-1}, x\neq 1$ και $g(x)=\dfrac{1}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.

α)

i. Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=(f\circ g)(x)$. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)=(f\circ g)(x)$. (Μονάδες 6)

Αν $h(x)=\dfrac{e^x}{1-e^x}$, $x\in\mathbb{R}^*$ τότε:

β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι ‘1-1’. (Μονάδες 7)

γ) να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$. (Μονάδες 6)

88. ΘΕΜΑ 4 – 31746

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2-4x+6)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της Μ$(0, f(0))$.

(Μονάδες 5)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x)\geq 2x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

89. ΘΕΜΑ 4 – 28342

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ έχει τις κορυφές A και Δ πάνω στον άξονα $\mathrm{x'x}$ και τις κορυφές B και Γ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $\mathrm{f(x) = e^x}$, $\mathrm{x < 1}$ και $\mathrm{g(x) = \frac{e}{x}}$, $\mathrm{x > 1}$, αντίστοιχα. Έστω $\mathrm{A(\alpha\,, 0)}$ με $\alpha < 1$.

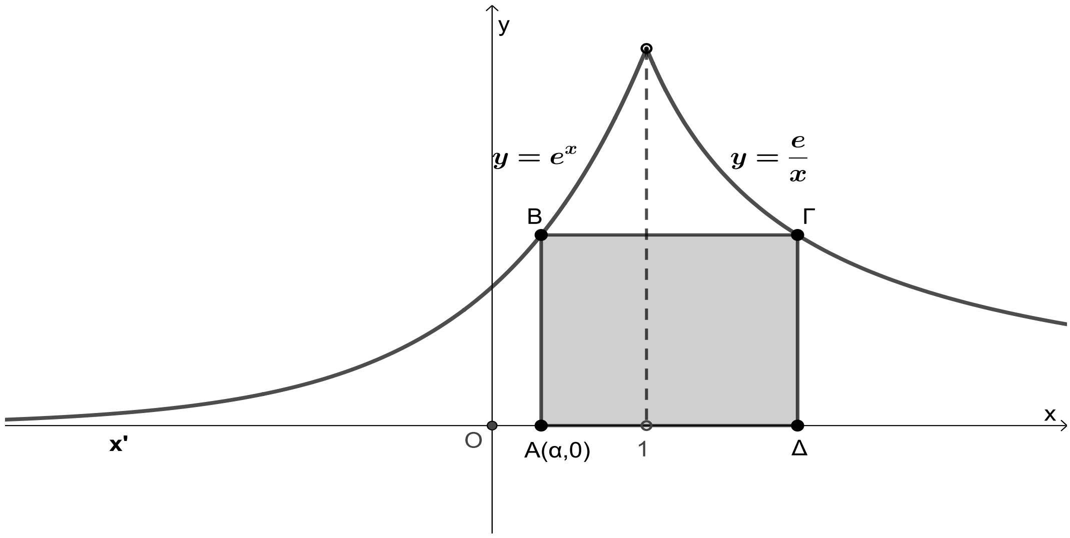
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η τετμημένη της κορυφής Δ είναι $\mathrm{x_\Delta = e^{1-\alpha}}$, (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του ορθογωνίου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ είναι $\mathrm{E(\alpha) = e - \alpha e^\alpha}$, $\alpha < 1$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$. (Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του α, για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου $\mathrm{AB\Gamma\Delta}$ γίνεται ίσο με 1. (Μονάδες 6)



Επιπλέον ερώτημα :

δ) Το Α κινείται πάνω στον x’x με ταχύτητα $\alpha'(t) = 2$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ΑΒΓΔ τη στιγμή που το Α έχει τετμημένη $\frac{1}{2}$.

90. ΘΕΜΑ 4 – 28314

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $[1\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $\mathrm{f(x)} = \begin{cases} \mathrm{e}^{\frac{1}{\lambda x+1}} \ , & \mathrm{x > 1} \\ 0 \ , & \mathrm{x = 1} \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της f. (Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 5)

91. ΘΕΜΑ 2 – 31547

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x)=\dfrac{3-2x}{(x-2)^2}$ για κάθε $x\neq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x=2$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν η f είναι

i. συνεχής στο 2. (Μονάδες 8)

ii. παραγωγίσιμη στο 2. (Μονάδες 7)

Επιπλέον ερώτημα :

γ) Αν $f(x)=\begin{cases}\frac{3-2x}{(x-2)^2} & , \quad x\neq 2\\ 3 & , \quad x=2\end{cases}$ να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f.

92. ΘΕΜΑ 4 – 29130

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\eta\mu x$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

v. Η ευθεία $y=x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{2},f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$. (Μονάδες 04)

vi. Η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της $y=x$ τα οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 06)

β) Για τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)-x=\ln\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. (Μονάδες 05)

ii. Στο διάστημα $(0,+\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y=x$. (Μονάδες 04)

γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g του ερωτήματος (β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 06)

93. ΘΕΜΑ 2 – 25748

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y=3x-2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$. (Μονάδες 8)

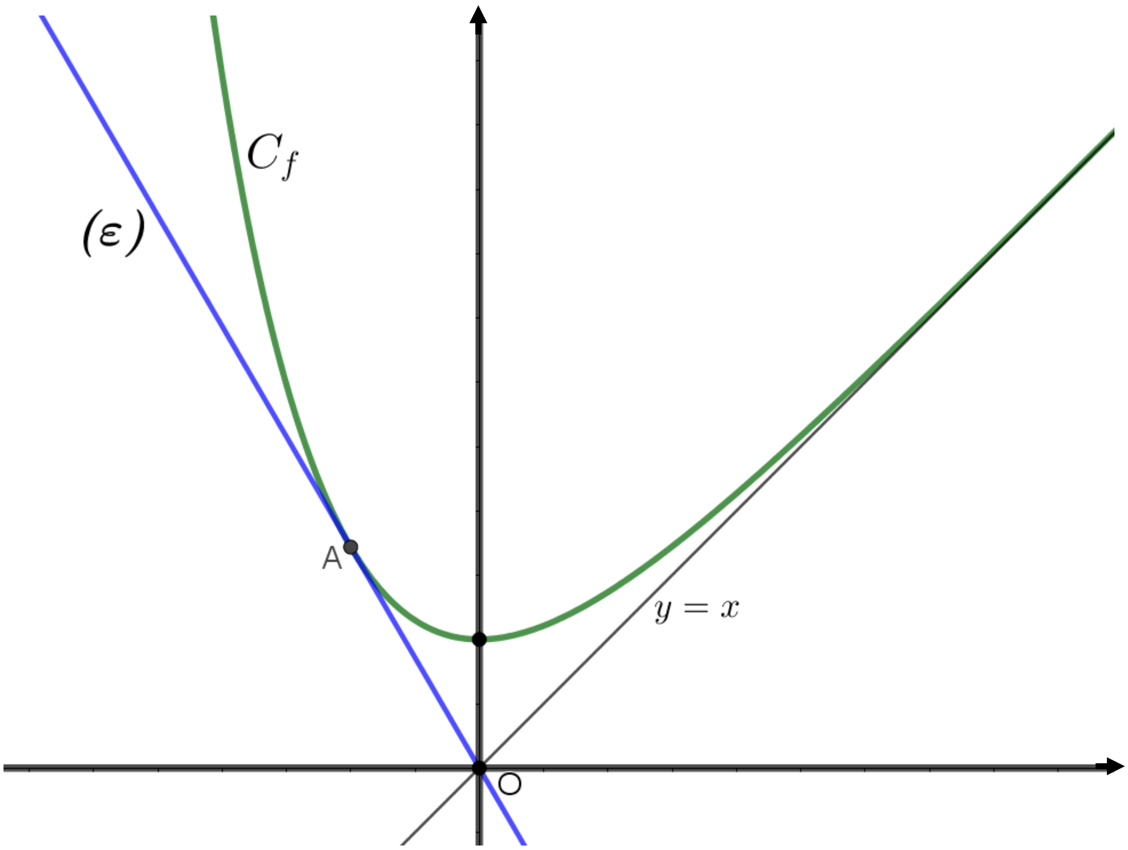
β) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{xf(x)-3x^2}$. (Μονάδες 9)

94. ΘΕΜΑ 2 – 23530

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο R συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.



α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε). (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-x^2}{f(x)}$. (Μονάδες 8)

95. ΘΕΜΑ 4 – 24579

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$.

α)

i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 07)

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa, \ \kappa \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 07)

96. ΘΕΜΑ 4 – 24759

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x)\geq x^2-x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α)

i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. (Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες. (Μονάδες 6)

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq\dfrac{3}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Αν επιπλέον $f(1)=1$ και $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$. (Μονάδες 5)

ii. η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

97. ΘΕΜΑ 4 – 33648

Δίνονται οι συναρτήσεις $\mathrm{f(x)=ln^2x}$ και $\mathrm{g(x)=lnx}$ με κοινό πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

α) Να μελετήσετε την f

i. ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 4)

ii. ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτές της C_f και να σχεδιάσετε τις C_f, C_g στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων.

(Μονάδες 8)

γ) i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g. (Μονάδες 4)

ii. Η ευθεία $x=\alpha, 1<\alpha<e$ τέμνει τις C_f, C_g στα σημεία Α, Β. Να βρείτε για ποια τιμή του α το μήκος του τμήματος ΑΒ γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 5)

98. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ln(x^2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f.

β) Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να τη μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

99. α) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-2}+x-3=0$.

β) Δίνεται η $f(x)=e^{x-2}+\frac{1}{2}x^2-3x$.

Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δυο ρίζες στο $(0,4)$.

100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{4}{x}$. Η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο της Μ τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία Α , Β αντίστοιχα .

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ έχει σταθερό εμβαδό ανεξάρτητα από τη θέση του Μ.

β) Να δείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του ΑΒ .

101. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+1$. Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

α) να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$

β) να σχηματίζει γωνία 135^0 με τον άξονα x'x

γ) να είναι παράλληλη στον άξονα x'x

δ) να είναι κάθετη στην ευθεία $2y-x=0$

102. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: $-2x+1\le f(x)\le x^4-2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, **(1)** τότε

α) να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 .

β) να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f'(0)=-2$.

103. Έστω $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση . Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-{x_0}^2} \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}$$

104. Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $O(0,0)$, δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες Οx και Οy και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2$. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

105. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

106. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot \eta\mu x$. Να δείξετε ότι: $f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2f''(x)$.

107. Να δείξετε ότι: $2\cdot ln(x-1)\le x-3+ln4$ για κάθε $x>1$.

108. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A(1,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2+7x$.

109. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

110. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 21$.

β) Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $O(0,0)$.

γ) Υπάρχουν εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από σημείο $A(2,0)$;

111. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + kx - 1$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

α) Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\big(0, f(0)\big)$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 5$,

να βρείτε την τιμή του k .

β) Αν $k = 2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$.

112. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 24x^2 + 5x - 7$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του α, ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Για ποια τιμή του α , η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A\big(1, f(1)\big)$

113. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

α) $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) $e^{x^2} \geq 1 - x$, για κάθε $x \geq 0$.

γ) $e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

114. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + 5x$.

Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5 \text{ .}$$

115. Δίνεται μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$ για την οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$f(x+y) = f(x) \cdot e^y + f(y) \cdot e^x \text{ .}$$

α) Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με

$$f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0} \text{ .}$$

γ) Αν $f(0) = 2$ να βρείτε την f .

δ) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την $f(x) = e^x(x+2)$.

116. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = e^5$.

117. Αν η ευθεία $y = 3x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 - \lambda^2 x + 2}{f(x) + \lambda x + 1} = -1$$

118. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ με $f(0) = f(1) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

α) Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[0,1]$

για τη συνάρτηση $h(x) = f^2(x) \cdot e^{g(x)}$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}$$

119. Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 2024$. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x}$

120. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$.

121. Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,3]$. Να δείξετε ότι $f(1) + f(2) > f(0) + f(3)$.

122. Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x, \ln x)$ και $\Gamma(x, 0)$, $x > 1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x = 2\ cm$. Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με 0,5 $cm\ /\ sec$.

123. Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x - \rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho) = P'(\rho) = 0$.
Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x - 1$ να έχει παράγοντα το $(x - 1)^2$.

124. Έστω $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$f(x) \geq e^{x-1} + \ln x + x^2$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 2$.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$.

125. Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ η οποία ικανοποιεί τη

σχέση: $f^2(x) + 4f(x) + x^2 - 5 = 0$ για κάθε $x \in (-3,3)$ **(1)**

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

126. Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει: $f(e^x \cdot \eta\mu x) = 2 \cdot e^x$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A\big(0, f(0)\big)$ είναι η $y = 2x + 2$.

γ) Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2cm\ /\ sec$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

127. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.

β) αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

128. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 \cdot \eta\mu \frac{1}{x} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

β) Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi \frac{1}{x} = 3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$.

129. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x \to 0+} x^x \qquad\qquad \lim_{x \to 0+} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

130. Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$f(1) = 2$ και $x f'(x) = -3 f(x)$ για κάθε $x \neq 0$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = x^3 \cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

131. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

δ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

132. Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:
$\left(P'(x)\right)^2 = P(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $P'(1) = 2$. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

133. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο.
Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\alpha < \beta < \gamma$ ισχύει $f(\alpha) < f(\beta) > f(\gamma)$,
να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.

134. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}} \qquad\qquad \lim_{x\to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

135. Δίνεται η συνάρτηση $f: [1,6] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ με $f(1) = f(6)$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big)$ οριζόντια εφαπτομένη.

β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,6)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1) + 4f'(\xi_2) = 0$.

136. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \eta\mu x$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

137. Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$f(2) = 5$, $f(1) = 3$ και $f(x) \leq 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi) = 0$.

138. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $f(2) - f(1) < 3$

γ) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.

139. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = x - \ln x$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

140. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^{\lambda x}}{x+1}$, $x > -1$ και $\lambda > 0$.

α) Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.

β) Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

141. α) Να δείξετε ότι: $ln\,x + \frac{1}{x} \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

β) Να δείξετε ότι η $g(x) = ln\,x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot ln\,x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ) Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

142. α) Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 2^x = 5^x$

β) Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $3^x - 2^{-x} = \frac{5}{2}$

143. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = -2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{2x} \cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = 1$.

γ) Αν h, φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με $h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h(0) = \varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι $h = \varphi$.

144. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f , αν υπάρχουν.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\big(0, f(0)\big)$.

ε) Να αποδείξετε την ανισότητα: $(x^2 + 4x + 3) \cdot e^x \geq 7x + 3$ για κάθε $x \geq -4 + \sqrt{3}$.

145. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - ln(x + 1) - 1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

δ) Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$, ισχύει:

$e^{2\alpha+\beta-1} - ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - ln(a + 2\beta - 1) \leq 2$, να υπολογίσετε τους a, β .

146. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{2x}}$, $x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι: $\sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[6]{3}$.

147. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1) \cdot ln\, x$, $x > 0$.

α) Να δείξετε ότι $2x\, ln\, x + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$.

β) Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A\big(x_0, f(x_0)\big)$

να είναι σημείο καμπής της C_f .

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

148. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + ln(x^2 + 1)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $x - 4 = ln\, 17 - ln(x^2 + 1)$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $x^3 - x^2 > ln\frac{x^4+1}{x^6+1}$.

149. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι: $f'(x + 1) > f(x + 1) - f(x)$ για κάθε $x > 0$.

150. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ και $f(3) = 12$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A\big(\xi, f(\xi)\big)$

να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 21$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B\big(x_0, f(x_0)\big)$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

151. α) Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ.

Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha,\beta \in \Delta$ ισχύει :

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2-x^2}{x+1}$, $x>-1$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii) Αν $\alpha>\frac{1}{e}$, $\beta>\frac{1}{e}$, να δείξετε ότι:

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1}$$

152. Για την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύουν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$ και $f(x+y)=f(x)+f(y)+5xy$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την f .

153. Δίνεται η $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$.

Να βρείτε την εφαπτομένη στην C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0=0$.

154. Δίνεται η $f(x)=\sqrt{x}$. Να βρείτε την εφαπτομένη στην C_f στο σημείο της με τεταγμένη 4.

155. Δίνεται η f με $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leq 1\\ 2x-1, & x>1\end{cases}$.

Να βρείτε τις εφαπτόμενες στην C_f στα σημεία της με τεταγμένη 9.

156. Δίνεται η f με $f(x)=\begin{cases}3x^2-5x+6, & x\leq 1\\ 2\sqrt{x^2+3}, & x>1\end{cases}$.

Να βρείτε την εφαπτομένη στην C_f στο σημείο της με τετμημένη 1.

157. Δίνεται η $f(x)=x^2-5x+6$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που περνάνε από το Μ(1,-2) .

158. Δίνεται η $f(x)=\frac{1+\ln x}{x}$. Δείξτε ότι υπάρχει μία και μόνον εφαπτομένη στην C_f που περνά από την αρχή των αξόνων.

159. Αν g συνεχής στο [0,α], α>0 και παραγωγίσιμη στο (0,α) με g(α)=0 , να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(0,\alpha)$ ώστε $g'(\xi)=-\frac{g(\xi)}{\xi}$.

160. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xe^x=e^x-1$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2-x)e^x=x+2$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

161. Δίνεται συνάρτηση f με $f(1)=f(3)=0$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $A(\xi, f(\xi))$ με $\xi\in(1,3)$, στο οποίο η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη .

β) Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι αρνητικός αριθμός .

162. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=-x+\dfrac{1}{x-2}$

163. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $f'(x) = (2x+2)\,f(x)$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^{x^2+2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

γ) Να βρεθεί το πλήθος των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=\dfrac{3}{2}$.

δ) Δίνεται η $h(x)=(x^2-1)f(x)$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{2\xi f(\xi)}{1-\xi^2}$.

164. Έστω η συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1\,,\,f(1))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon): y=2x+1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g(x)=f(e^x)+1$ στο σημείο $B(0\,,\,g(0))$.

165. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι γνωστό επίσης ότι : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$, $f(0)>0$.

α) Δείξτε ότι η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο .

β) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία ρίζα η οποία είναι θετική .

γ) Να μελετήσετε την $g(x)=x\,f(x)$ ως προς το πρόσημο αν είναι γνωστό ότι η ρίζα του ερωτήματος β) είναι το 1975 .

δ) Αν είναι γνωστό ότι η ρίζα του ερωτήματος β) είναι το 1975 να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0\,,1975)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

ε) Αν $f(1)+f'(1) = f(10)+10f'(10)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,10)$ τέτοιο ώστε : $-\dfrac{2}{x_0} = \dfrac{f''(x_0)}{f'(x_0)}$

166. Δίνεται η $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ με $x\in(-\infty,1)$.

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

167. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$f(x)<0$ για $x<0$ και $f(x)>0$ για $x>0$.

α) Να υπολογίσετε το $f(0)$.

β) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(0,f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=30x+2005$,

να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

168. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :
$f^4(x)+f^3(x)-f(x)=ax^3+\beta x+\gamma$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
όπου a και β ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί .
Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα .

169. Δίνεται συνάρτηση $f:(0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f'(x)=(x-2)\ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(1)=\dfrac{7}{4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $\mathrm{A}\left(1\,,\dfrac{7}{4}\right)$.

β) Να δείξετε ότι $f(x)\le\dfrac{7}{4}$ για κάθε $x\in(0,2)$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει το πολύ ένα $\xi\in(2,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{7}{4}$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.

170. Δίνεται συνάρτηση f με $f''(x)=\dfrac{x\ln x+x-1}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Η γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1\,,f(1))$ έχει εφαπτομένη την ευθεία $y=\dfrac{3}{4}$.

α) Να δείξετε ότι : $f'(x)=(x-1)\ln x$

β) Να δείξετε ότι : $f(x)=\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+x$

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

δ) Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 0^+}f''(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)$

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης $\dfrac{(f''(x)-1975)(x^2+1)}{x^2+2004}=0$ στο $(0,+\infty)$.

στ) Να δείξετε ότι $4\cdot f\left(\frac{x^2+9}{x^2+8}\right)>3$

171. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h για τις οποίες ισχύει :

$$f(0)=f'(0)=0 \;,\; g(x)=\left[f(x)\right]^2+\left[f'(x)\right]^2 \;,\; h(x)=2x\ln\left(x^2+2\right) \;,$$

$$f''(x)+f(x)=0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \,.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_g και C_h έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο .

γ) Δείξτε ότι η C_h δεν έχει ασύμπτωτες .

172. Μια μετοχή εισήχθη στο Χρηματιστήριο Αθηνών πριν από ακριβώς δέκα μήνες .

Η τιμή της μετοχής σε ΕΥΡΩ , t μήνες μετά την εισαγωγή της στο Χρηματιστήριο ,
δίνεται από την συνάρτηση $f(t)=t^2-6t+10 \;,\; 0\le t\le 10$.

α) Ποια ήταν η χαμηλότερη τιμή της μετοχής , από την μέρα εισαγωγής της στο Χρηματιστήριο ;
β) Πόσους μήνες μετά την εισαγωγή της , παρουσίασε την χαμηλότερη τιμή ;
γ) Να δείξετε ότι σήμερα η μετοχή έχει πενταπλάσια τιμή , από την τιμή εισαγωγής της στο Χρηματιστήριο .
δ) Για πόσο χρονικό διάστημα , η μετοχή είχε τιμή μικρότερη ή ίση , από την τιμή εισόδου της ;

173. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+2$.

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να βρείτε το πλήθος των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x'x .

174. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ᾽ όλο το $\mathbb{R}$ με $f(1)=0$.

Για την f είναι γνωστό ότι : $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(1)=0$.

β) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, να δείξετε ότι υπάρχει

μοναδικό $x_0\in(3,9)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\dfrac{2f(3)+6f(9)}{8}$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2-2x}-e^{-1}$.

Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα .

175. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-1$ ως προς το πρόσημο .

176. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο ρίζες .

177. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\dfrac{x}{e^x}$.

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι : για κάθε x>2017 ισχύει $e^{2017-x}<\dfrac{2017}{x}$.

178. Έστω $\alpha>0$, $\alpha\neq 1$ και για κάθε $x>0$ ισχύει $x^{\alpha}\leq \alpha^{x}$. Να αποδείξετε ότι $\alpha=e$.

179. Δίνεται $f:\left(0,+\infty\right)\rightarrow\mathbb{R}$ με $f\left(1\right)=2$ και

$x^2 f'\left(x\right)+2x\,f\left(x\right)=e^{x-1}$ για κάθε $x\in\left(0,+\infty\right)$. Να βρείτε την f .

180. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $6f\left(2\right)=2f\left(6\right)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει

τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(2,6\right)$ τέτοιο ώστε : η εφαπτομένη της C_f στο σημείο

$\mathrm{A}\left(\xi\,,\,f\left(\xi\right)\right)$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

181. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+6\cdot ln\,x$ και η ευθεία (ε) : $y=4x-3$.

α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας (ε) .

β) Είναι η ευθεία (ε) εφαπτομένη της C_f ;

182. Να λύσετε την εξίσωση $x\,ln\,x=2x-e$

183. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}$, $x\in[-2\;,\;2\,]$

Να δείξετε ότι η f έχει 4 θέσεις τοπικών ακροτάτων .

184. Έστω $f:(1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x\,f'(x)\,ln\,x+f(x)=2x^2$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και $f(e)=e^2$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{x^2}{ln\,x}$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

β) Να δείξετε ότι $f(x)\geq 2e$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=-ex^2+2ex+e$.

Να δείξετε ότι οι C_f και C_g δεν έχουν κοινό σημείο .

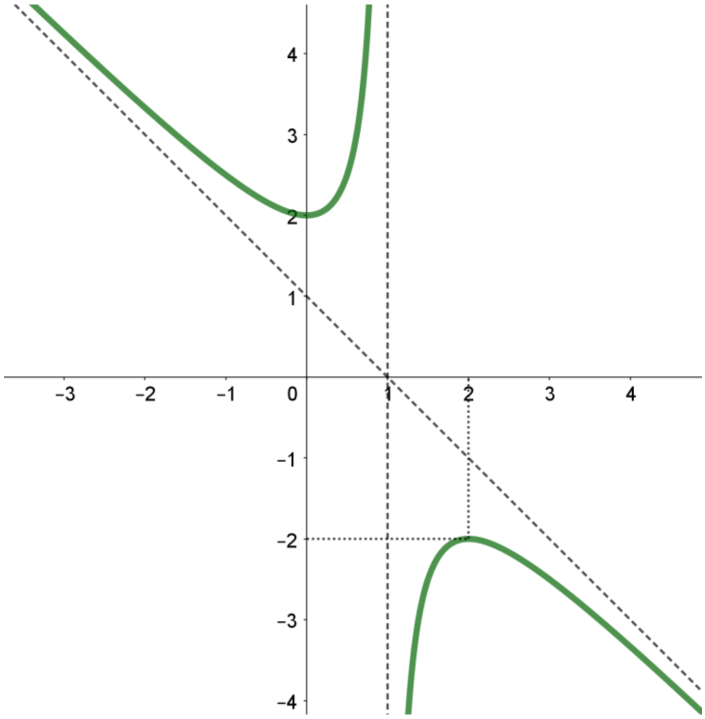
185.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{-x^2+\alpha x+\beta}{x-1}$

Η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(2,-2)$ όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τα α και β .
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Επαληθεύστε τα αποτελέσματά σας με το διπλανό σχήμα



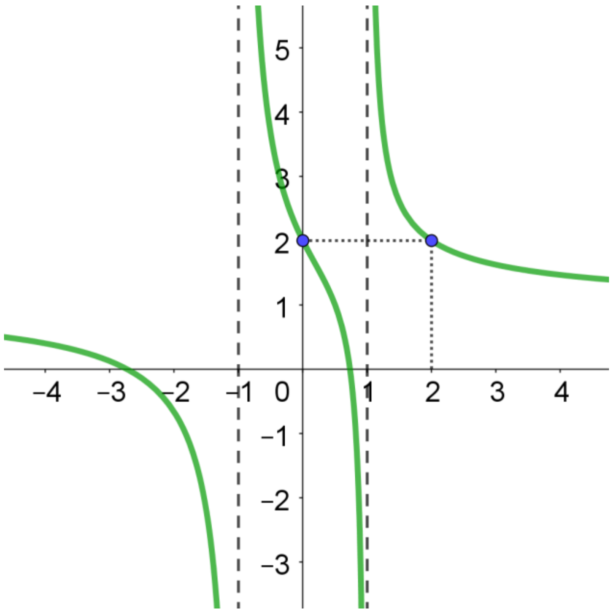
186.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2-1}$

Η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(2,2)$ όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τα α και β .
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

Επαληθεύστε τα αποτελέσματά σας με το διπλανό σχήμα



187. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{-x^2+2x-2}{x-1}$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Μελετήστε την f ως προς τα ακρότατα.

γ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f .

ε) Σχεδιάστε μια πρόχειρη γραφική παράσταση που να φαίνονται τα παραπάνω.

188. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 3x + 1 + ln\,x$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Μελετήστε την f ως προς τα ακρότατα.

γ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

δ) Βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

189. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)^2 - 1$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(4, f(4))$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία y= $-4x$.

190. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-3)\,ln\,x - 1$ και $g(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta$

α) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = -2x + 1$ εφάπτεται στην C_f .

β) Να βρείτε τα α και β ώστε η ευθεία $y = -2x + 1$ να εφάπτεται της C_g στο $A(-1, g(-1))$.

191. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha e^x}{x+\beta}$

Να βρείτε τα α και β ώστε η ευθεία $y = -2x - 1$ να εφάπτεται της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$

192. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

193. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x\epsilon\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) + f(x) < f(x+1)$ για κάθε $x\epsilon\mathbb{R}$.

β) Αν $f'(21) = 0$ και $f(21) = 3$, να δείξετε ότι :

$f(x) \cdot f(x+1) > 9$ για κάθε $x\epsilon\mathbb{R}$.

194. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{e}{2}x^2 + x - 1$

ως προς το πρόσημο.

195. Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο 20 μέτρα.

Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου που μεγιστοποιούν το εμβαδόν του.

196. Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 36 τετραγωνικά μέτρα.

Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου που ελαχιστοποιούν την περίμετρο του.

197. Να βρείτε τα σημεία της παραβολής $y = x^2$ που βρίσκονται πιο κοντά στο σημείο Α(0,1).

198. Έστω ότι ένα σημείο κινείται κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου είναι σταθερός και ίσός με 3 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου τη στιγμή που αυτό βρίσκεται στη θέση Α(2,4).

199. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x+1}$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

δ) Σχεδιάστε την C_f .

ε) Για κάθε x>0 δείξετε ότι $f(x+1) + f(x+2) < f(x+3) + f(x)$

200. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$f^3(x) + f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Μελετήστε την f ως προς το πρόσημο.

Δίνεται η συνάρτηση $f^{-1}(x) = ln(x^3 + x)$, x > 0 .

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f^{-1}(x)$ = 0 .

δ) Μελετήστε την f^{-1} ως προς την κυρτότητα.

ε) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $A\big(1, f^{-1}(1)\big)$.

στ) Να δείξετε ότι $f^{-1}(x) - 2x \leq ln\frac{2}{e^2}$ για κάθε x >0 .