1. ΘΕΜΑ 4 – 24769

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{x}{x+1}$, $x>-1$ και έστω F αρχική της f με $F(1)=\ln 2$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>-1$ ισχύει $f'(x)=\dfrac{x}{(x+1)^2}$

και να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η F είναι κυρτή στο διάστημα $[0,+\infty)$. (Μονάδες 6)

γ) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της F στο $x_0=1$. (Μονάδες 6)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\dfrac{2F(x)-1}{x}\geq \ln 4-1$. (Μονάδες 5)

Επιπλέον ερώτημα :

δ) Υπολογίστε το $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2+2x+1}\,dx$

2. ΘΕΜΑ 4 – 32225

Για μια συνεχή συνάρτηση $f:[-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ ισχύουν:

- $(f(x)+x)^2=x^2(x+1)$, για κάθε $x\in[-1,+\infty)$,
- $f(1)>-1$ και $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)<\dfrac{1}{2}$.

α) Αν $g(x)=f(x)+x$, $x\in[-1,+\infty)$ τότε

i. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $g(x)=0$. (Μονάδες 05)

ii. Να αποδείξετε ότι $g(x)<0$ για κάθε $x\in(-1,0)$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x)=x\left(\sqrt{x+1}-1\right)$, $x\geq -1$. (Μονάδες 07)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι κυρτή τότε να αποδείξετε ότι η $h(x)=f(x+1)-f(x)$, $x\in(-1,+\infty)$

είναι γνησίως αύξουσα και έπειτα ότι

$\displaystyle\int_{2023}^{2024}\big(f(x+1)-f(x)\big)dx<\int_{2023}^{2024}\big(f(x+2)-f(x+1)\big)dx$. (Μονάδες 06)

3. ΘΕΜΑ 4 – 31551

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\eta\mu x}{x} & , \quad x\in[-\pi,0)\cup(0,\pi] \\ 1 & , \quad x=0 \end{cases}$

και $\phi(x)=x\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x$, $x\in[-\pi,\pi]$.

α) Να αποδείξετε ότι η ϕ είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-\pi,\pi]$ και να βρείτε το πρόσημό της. (Μονάδες 10)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 10)

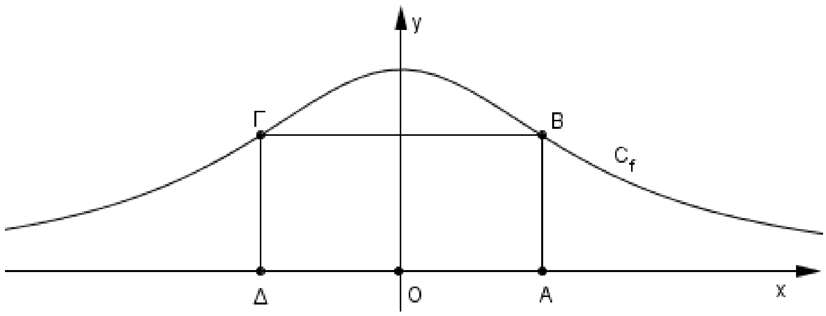
γ) Να βρείτε τις τιμές του $\kappa\in(-\pi,\pi)$ για τις οποίες ισχύει $\int_0^{\kappa}\phi(x)dx=0$. (Μονάδες 5)

4. ΘΕΜΑ 4 – 24771

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(0)=1$ και $(x^2+1)f'(x)+\dfrac{2x}{x^2+1}=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}, x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης.



β) Να αιτιολογήσετε γιατί η C_f είναι συμμετρική ως προς τον άξονα $y'y$ και να βρείτε τις συντεταγμένες των κορυφών Β, Γ, Δ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ με τη βοήθεια της τετμημένης $\alpha, \alpha>0$ του σημείου $A(\alpha, 0)$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(\alpha)$ του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τον τύπο

$E(\alpha)=\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1}, \alpha>0$. Κατόπιν, να βρείτε για ποια τιμή του α το εμβαδόν γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 8)

δ) Αν F είναι μια αρχική της f με $F(1)=\ln 2$, να αποδείξετε ότι $\int_0^1 F(x)dx=\ln\sqrt{2}$ (Μονάδες 6)

5. ΘΕΜΑ 4 – 24770

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-1)+x-1, x>0$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και κοίλη. (Μονάδες 8)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής της παράστασης στο $x_0=\ln 2$. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln(e^x-1)\le 2x-\ln 4$. (Μονάδες 4)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I=\int_{\ln 2}^{\ln 3}\dfrac{2-e^{-x}}{e^{-x}-1}dx$. (Μονάδες 8)

6. ΘΕΜΑ 4 – 23219

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο,

η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(1)=f'(1)=2$.

α) Να βρεθεί η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(1, f(1))$ και κατόπιν να αποδείξετε ότι

$f(x)\geq 2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι :

i. $\int_0^1 f(x)dx>1$. (Μονάδες 6)

ii. $\int_0^1 xf'(x)dx<1$. (Μονάδες 6)

Επιπλέον ερώτημα :

δ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-1}+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$

Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο σε x_0 για το οποίο ισχύει $-1<x_0<0$

και ότι η τιμή του ελαχίστου είναι ίση με $\frac{1}{2}(x_0-1)^2$.

7. ΘΕΜΑ 4 – 33998

Το καπάκι ενός πεντάλιτρου δοχείου βενζίνης αφήνεται ανοιχτό τη χρονική στιγμή $t=0$.

Η βενζίνη που απομένει μέσα στο δοχείο συναρτήσει του χρόνου t (σε εβδομάδες)

δίνεται από τη συνεχή συνάρτηση $g(t)$ (σε λίτρα).

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t\cdot\ln\frac{4}{5}dt$. (Μονάδες 06)

β) Αν η βενζίνη του δοχείου έχει ρυθμό εξάτμισης που δίνεται από τον τύπο $g'(t)=5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t\cdot\ln\frac{4}{5}$, για κάθε $t>0$

, τότε να βρείτε τον όγκο της βενζίνης που περιέχει το δοχείο δυο εβδομάδες μετά το άνοιγμα του καπακιού του δοχείου. (Μονάδες 12)

γ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η συνάρτηση που δίνει την ποσότητα της βενζίνης στο δοχείο μετά από t εβδομάδες είναι η $g(t)=5\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^t$, $t\in[0,+\infty)$ τότε να διαπιστώσετε ότι καθώς ο χρόνος αυξάνεται απεριόριστα μόνο η μυρωδιά της βενζίνης θα υπάρχει στο δοχείο. (Μονάδες 07)

8. ΘΕΜΑ 4 – 35245

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{(x^2+1)^3}}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε (αν υπάρχει) τη θέση του σημείου καμπής της γραφικής της παράστασης. (Μονάδες 08)

γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $f'(x)\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

ii. Για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει: $0<f(\alpha+1)-f(\alpha)<1$. (Μονάδες 07)

9. ΘΕΜΑ 4 – 34565

Θεωρούμε τους αριθμούς α,β με $1<\alpha<\beta$ και την παραγωγίσιμη στο R συνάρτηση f, με συνεχή παράγωγο, ώστε $f(x)>0$, για κάθε $[\alpha,\beta]$. Ας είναι λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(a,f(a))$ και $B(\beta,f(\beta))$, με $f(a)\neq f(\beta)$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)+\lambda a-f(a)}{x}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha,\beta]$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $c\in(\alpha,\beta)$ ώστε $cf'(c)-f(c)-\lambda a+f(a)=0$. (Μονάδες 6)

γ) Αν γνωρίζουμε ότι $f'(c)\neq\lambda$, να αποδείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(c,f(c))$ και η ευθεία AB τέμνονται σε σημείο του άξονα $y'y$. (Μονάδες 7)

δ) Αν είναι $\frac{f(\alpha)}{f(\beta)}=e^2$, να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{\sqrt{\alpha-1}}^{\sqrt{\beta-1}}\frac{x\cdot f'(x^2+1)}{f(x^2+1)}dx$$

ισούται με -1. (Μονάδες 7)

Επιπλέον ερώτημα :

ε) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{-x}$ και $h(x)=\frac{f(x)}{x}$

- Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης h.
- Να εξετάσετε αν έχει λύση η εξίσωση $h(x)=-1+\eta\mu x$
- Να υπολογίσετε το $\int_1^2 x^2\cdot h(x)\,dx$
- Να υπολογίσετε το $\int_e^{e^2} h(ln\,x)\,dx$

10. ΘΕΜΑ 4 – 36816

Θεωρούμε συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$, συνεχή στο $x_o = 0$,

για την οποία ισχύει

$$xf(x) = \eta\mu x \text{ για κάθε } x \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

α) Να βρείτε το $f(0)$. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε τον τύπο της f. (Μονάδες 04)

γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 09)

δ) Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\sqrt{2}}{6} \le \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} f(x)dx \le \frac{1}{4}$$ (Μονάδες 08)

Επιπλέον ερωτήματα :

ε) Εξετάστε αν υπάρχει $x\epsilon \left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x) = \frac{1}{2}$.

στ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = e^x$.

11. ΘΕΜΑ 4 – 33578

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [0,\pi]$ ισχύει $e^x + \eta\mu x \ge 1$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $H(x) = x - ln(e^x + \eta\mu x)$, $x \in [0,\pi]$, είναι μια αρχική (παράγουσα) της συνάρτησης $f(x) = \frac{\eta\mu x - \sigma\upsilon\nu x}{e^x + \eta\mu x}$, $x \in [0,\pi]$. (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^\pi xf'(x)dx = \frac{\pi}{e^\pi}$. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξτε ότι $\int_1^e \frac{1}{(e^x+\eta\mu x)\cdot x}dx < 1$. (Μονάδες 7)

12. ΘΕΜΑ 2 – 33593

Αν f μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $\int_2^3 f(x)dx = 2$, $\int_1^3 f(x)dx = 4$ και $\int_1^7 f(x)dx = 10$ να βρείτε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

α) $\int_3^2 f(x)dx$. (Μονάδες 5)

β) $\int_3^7 f(x)dx$. (Μονάδες 6)

γ) $\int_7^2 f(x)dx$. (Μονάδες 6)

δ) $\int_1^3 (f(x) - x)dx$. (Μονάδες 8)

13. ΘΕΜΑ 4 – 29837

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{1-x}$, με $x\neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τον τύπο της αντιστρόφου. (Μονάδες 9)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ f$. (Μονάδες 6)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι συναρτήσεις $f\circ f$ και f^{-1} είναι ίσες. Συμφωνείτε με τον ισχυρισμό του μαθητή; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

δ) Αν $\varphi(x)=(f\circ f)(x)=\dfrac{x-1}{x}$ με $x\in\mathbb{R}-\{0,1\}$ να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_2^3 \varphi(x)dx$. (Μονάδες 5)

14. ΘΕΜΑ 4 – 26631

Δίνεται η συνάρτηση f (x) = lnx – x , x > 0.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς ασύμπτωτες. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $\ln\left(\dfrac{x^2+3}{2x^2+1}\right)=2-x^2$. (Μονάδες 8)

Επιπλέον ερώτημα:

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f , τον x’x , τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

15. ΘΕΜΑ 4 – 27321

Σε μια χώρα, οι επιστήμονες μελέτησαν για μεγάλο χρονικό διάστημα την μεταβολή του πληθυσμού των ψαριών σε έναν ποταμό και δημιούργησαν ένα προσεγγιστικό μαθηματικό μοντέλο που συσχετίζει τον πληθυσμό x των ψαριών στο τέλος ενός συγκεκριμένου έτους με τον αναμενόμενο πληθυσμό y των ψαριών στο τέλος της αμέσως επόμενης χρονιάς.

Το μοντέλο εκφράζεται από τη σχέση $y=f(x)=axe^{-\beta x}$, $x\in(0,+\infty)$ όπου α,β θετικές σταθερές, με $\beta\in(0,1)$ και $a\in(1,+\infty)$.

(α) Να βρείτε την τιμή του τρέχοντος πληθυσμού x που μεγιστοποιεί τον πληθυσμό y των ψαριών το επόμενο έτος σύμφωνα με αυτό το μοντέλο. Ποια είναι αυτή η μέγιστη τιμή του πληθυσμού y; (Μονάδες 9)

(β) Να εξηγήσετε γιατί ένας απεριόριστα μεγάλος πληθυσμός ψαριών δεν θα είναι βιώσιμος την αμέσως επόμενη χρονιά. (Μονάδες 7)

(γ) Θεωρούμε συνάρτηση F η οποία είναι μια παράγουσα (αρχική) της συνάρτησης f.

Να αποδείξτε ότι $F(\beta)-F(2\beta)=\frac{\alpha}{\beta^2}\cdot\frac{2\beta^2+1-(1+\beta^2)e^{\beta^2}}{e^{2\beta^2}}$. (Μονάδες 9)

16. ΘΕΜΑ 4 – 29549

Δίνεται η δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο τέτοια, ώστε:

$$f'(0)=f(0)=0 \text{ και } \int_0^{\pi}\big(f(x)+f''(x)\big)\eta\mu x dx=0.$$

Να αποδείξετε ότι:

α) $\int_0^{\pi} f''(x)\eta\mu x dx=-\int_0^{\pi} f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx$. (Μονάδες 07)

β) $f(\pi)=0$. (Μονάδες 08)

γ) Στο διάστημα $(0,\pi)$ υπάρχει μια τουλάχιστον πιθανή θέση σημείου καμπής. (Μονάδες 10)

17. ΘΕΜΑ 4 – 27668

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-3)(x-\lambda)(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$ με $1<\lambda<3$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε η συνάρτηση f έχει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής. (Μονάδες 08)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $f(x)=-f(4-x)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^3 f(x)dx$. (Μονάδες 05)

18. ΘΕΜΑ 4 – 27322

Ο νόμος του Νεύτωνα που αφορά την μείωση της θερμοκρασίας T (σε βαθμούς Κελσίου) ενός σώματος συναρτήσει του χρόνου t (σε ώρες), ορίζεται από την εξίσωση $T(t)=E+(T_0-E)e^{-kt}$ όπου:

- E είναι η σταθερή θερμοκρασία του περιβάλλοντος χώρου στον οποίο βρίσκεται το σώμα με $E<T_0$.
- $T_0=T(0)$ είναι η αρχική θερμοκρασία του σώματος τη στιγμή που τοποθετείται στο περιβάλλοντα χώρο.
- k είναι μια θετική σταθερά.

α) Να υπολογίστε το $\lim\limits_{t\to+\infty} T(t)$ και να ερμηνεύστε το αποτέλεσμα. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι $T'(t)=k[E-T(t)]$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $I=\int_0^1(E-T(t))\cdot ln(T(t))dt$ ισούται με $\frac{2e^3-3e^4}{k}$ αν είναι $T(0)=e^4$ και $T(1)=e^3$. (Μονάδες 10)

19. ΘΕΜΑ 4 – 26184

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{lnx}{\sqrt{x}}, x > 0$.

α) Να βρείτε, με απόδειξη, την κατακόρυφη ασύμπτωτη και την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ολικό μέγιστο για $x = e^2$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{e^2} f(x)dx$. (Μονάδες 9)

20. ΘΕΜΑ 4 – 25766

Στον παρακάτω πίνακα φαίνεται το πρόσημο της παραγώγου μιας συνάρτησης f

που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Αν είναι γνωστό ότι η f είναι άρτια και επιπλέον ισχύουν:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ $f(0) = 1$ και $f(2) = 5$ τότε:

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 6)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = |x^2 - 4| + 5$. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $\int_{-1}^{1} xf(x)dx = 0$. (Μονάδες 5)

21. ΘΕΜΑ 4 – 24758

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο, και η συνάρτηση $g(x) = (x^2-1)f(x)$ για την οποία ισχύει $g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

α) η g παρουσιάζει ελάχιστο για $x=1$ και για $x=-1$ και στη συνέχεια ότι $f(1)=f(-1)=0$. (Μονάδες 6)

β) $f'(1)\geq 0$ και $f'(-1)\leq 0$. (Μονάδες 8)

γ) η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

δ) $\int_{-1}^{1}(x^3-3x)f'(x)dx \leq 0$. (Μονάδες 6)

Επιπλέον ερώτημα :

ε) Δίνεται ότι $g(x) = (x^2-1)^2 \cdot (x^2+1)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε το $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} 2xg(x)\,dx$

22. ΘΕΜΑ 4 – 23957

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{ln^2 x}$, $x > 0$.

α) Να αποδείξτε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $f'(x) = 2\frac{lnx}{x}f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξτε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο ίσο με 1. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $I = \int_1^e \frac{2\cdot lnx\cdot f(x) + xe^x}{x(f(x)+e^x)}dx$. (Μονάδες 10)

23. ΘΕΜΑ 4 – 35244

Δίνεται η συνάρτηση με $f(x) = \varepsilon\varphi x - 1$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\eta\mu x = (1+x)\sigma\upsilon\nu x$ έχει μια ακριβώς λύση

στο ανοικτό διάστημα $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για όλες τις πραγματικές τιμές του $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$. (Μονάδες 08)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f τις ευθείες $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$ και τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 09)

24. ΘΕΜΑ 2 – 36838

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g.

Αν $\int_1^3 f(x)dx = 6$, $\int_1^8 f(x)dx = 29$, $\int_3^5 f(x)dx = 8$ και $\int_1^5 g(x)dx = -6$, τότε:

α) Να βρείτε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_3^8 f(x)dx$

ii. $\int_5^8 2f(x)dx$

iii. $\int_1^5 (f(x) + g(x))dx$ (Μονάδες 18)

β) Αν για τη συνάρτηση g ισχύει ότι $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [1,5]$, τότε να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από τη γραφική παράσταση της g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 5$.

(Μονάδες 07)

25. ΘΕΜΑ 4 – 24131

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση f, με τύπο $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2}, \quad x\geq 0.$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 07)

β) Να βρείτε την αντίστροφη της f. (Μονάδες 07)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι καμπύλες C_1, C_2. Με δεδομένα ότι

- η μία από τις δύο καμπύλες αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση της f και η άλλη στην γραφική παράσταση της f^{-1},
- $\int_{-\frac{1}{2}}^{0} f^{-1}(x)dx=\alpha$

Να βρείτε:

i. Ποια καμπύλη παριστάνει την γραφική παράσταση της f και ποια την γραφική παράσταση της f^{-1}, (Μονάδες 04)

ii. Το πρόσημο του α καθώς και το ολοκλήρωμα $\mathrm{I}=\int_0^1 f(x)dx$ συναρτήσει του α. (Μονάδες 07)

26. ΘΕΜΑ 4 – 34566

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to R$, με $\alpha>0$ και $f(x)>0$, για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, για την οποία επιπλέον γνωρίζουμε ότι:

- Η συνάρτηση $f'(x)$ είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- $\int_\alpha^\beta xf(x)f'(x)dx=-ln2.$
- $\beta f^2(\beta)=\alpha f^2(\alpha).$
- $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=xf^2(x), x\in[\alpha,\beta]$ στο οποίο η εφαπτομένη ευθεία είναι παράλληλη προς τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f^2(x)$, τις ευθείες $x=\alpha$, $x=\beta$ και τον άξονα $x'x$, είναι $ln4$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξτε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha,\beta]$. (Μονάδες 6)

δ) Έστω ότι η συνάρτηση G είναι μια αρχική της f στο $[\alpha,\beta]$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x\in(\alpha,\beta]$ ισχύει $\frac{G(x)-G(\alpha)}{x-\alpha}<f(\alpha)$. (Μονάδες 7)

27. ΘΕΜΑ 4 – 33634

Έστω $I=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\eta\mu^2 x dx$ και $J=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sigma\upsilon\nu^2 x dx$.

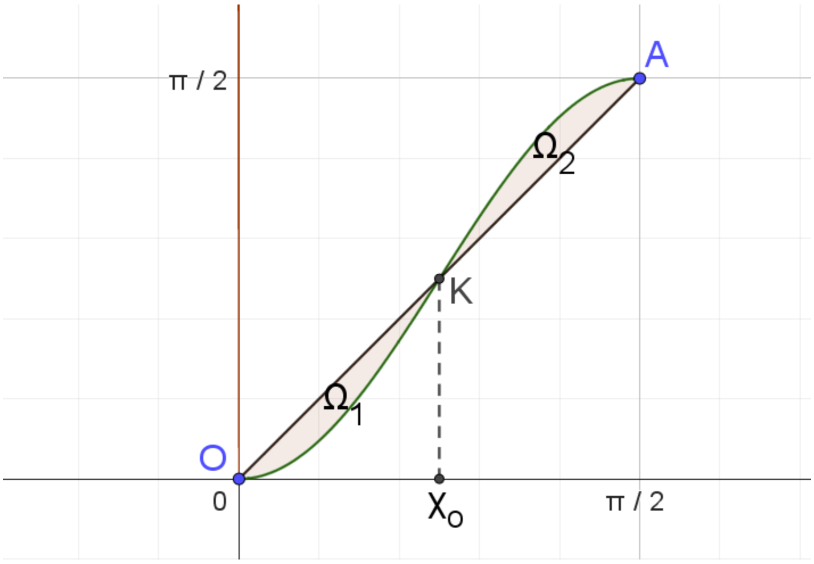
α) Να αποδείξετε ότι $I+J=\frac{\pi^2}{4}$. (Μονάδες 6)

β) Με χρήση της αντικατάστασης $u=\frac{\pi}{2}-x$ να αποδείξετε ότι $I=J$ και κατόπιν ότι $I=J=\frac{\pi^2}{8}$. (Μονάδες 7)

γ) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=\frac{\pi}{2}\eta\mu^2 x$ στο διάστημα $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Η ευθεία ΟΑ τέμνει τη C_f στα σημεία $\mathrm{O}(0,0)$, $\mathrm{A}(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $\mathrm{K}(x_o,f(x_o))$ και ορίζει με τη C_f τα χωρία Ω_1,Ω_2. Να αποδείξετε ότι :

i. το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ της C_f, του άξονα yy' και της ευθείας $y=\frac{\pi}{2}$ είναι το J. (Μονάδες 6)

ii. τα εμβαδά των χωρίων Ω_1,Ω_2 είναι ίσα. (Μονάδες 6)



28. ΘΕΜΑ 2 – 36849

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^2, & \alpha\nu\ x\leq 0\\ 1-\sigma\upsilon\nu x, & \alpha\nu\ x>0\end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f, του άξονα x’x και των ευθειών x = -2 και x = π. (Μονάδες 18)

Επιπλέον ερώτημα :

γ) Εξετάστε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

29. ΘΕΜΑ 2 – 36837

Στο παρακάτω σχήμα η τεθλασμένη γραμμή ΘΑΛ αποτελεί γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f ορισμένης στο $\mathbb{R}$, που διέρχεται από το σημείο Α(0,2) και τέμνει τον άξονα x’x στο Γ(-1,0).

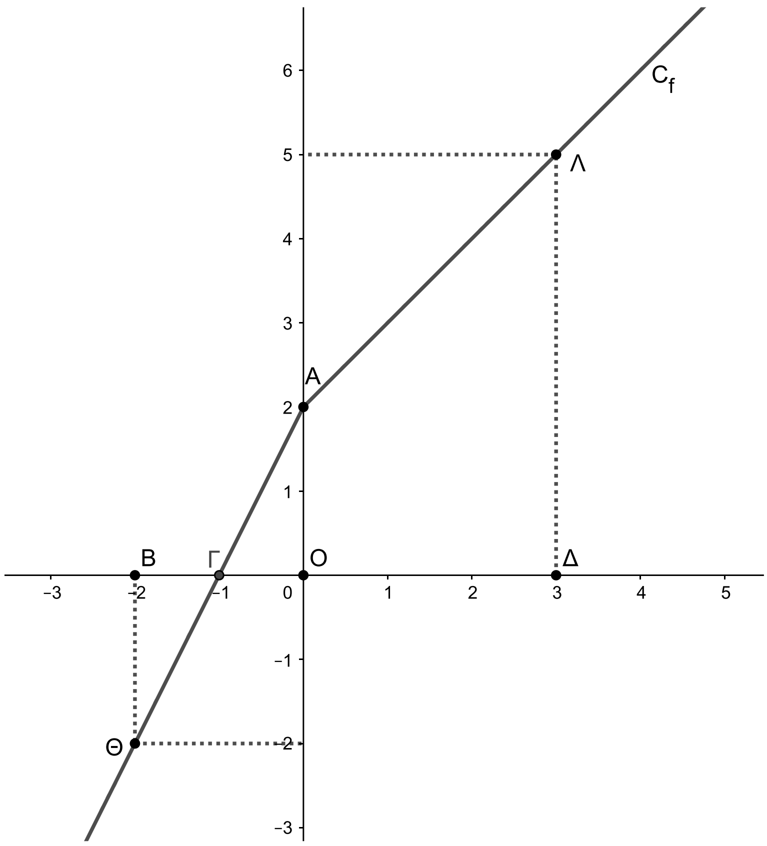
α) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i. $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$

ii. $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

iii. $\int_{0}^{3} f(x)dx$ (Μονάδες 15)

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -2$ και $x = 3$. (Μονάδες 10)



Επιπλέον ερωτήματα :

γ) Βρείτε 2ο τρόπο για να απαντήσετε τα ερωτήματα α) και β) .

δ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x+2 \ , & x<0 \\ x+2 \ , & x \geq 0 \end{cases}$

i) εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

ii) εξετάστε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\eta\mu(f(x)-2)}{x^2-2x}$

iii) εξετάστε αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 0} \left[\ \eta\mu(f(x)-2) \cdot \eta\mu\frac{1}{x} \ \right]$

30. ΘΕΜΑ 4 - 35302

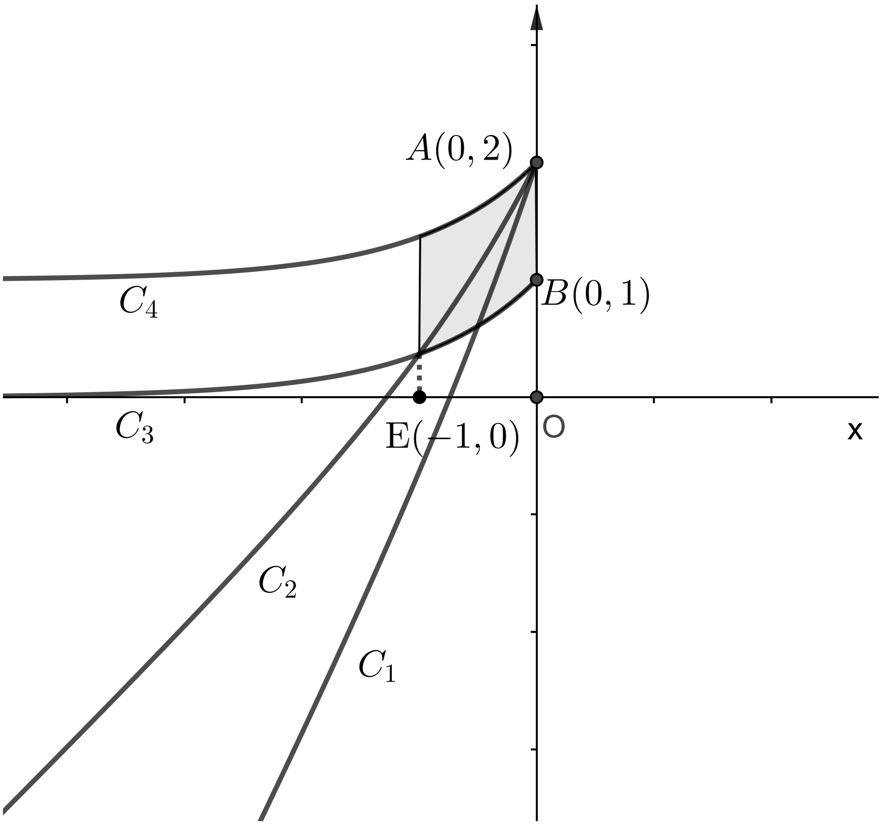
Θεωρούμε τις συναρτήσεις f, g και h με $f(x) = e^x$, $g(x) = e^x + 1$ και $h(x) = e^x + x + 1$, $x \in (-\infty, 0]$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση h ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 09)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνονται 4 γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων, οι C_1, C_2, C_3 και C_4. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε μία από τις συναρτήσεις f, g και h τη γραφική της παράσταση, επιλέγοντας μεταξύ των C_1, C_2, C_3 και C_4 την κατάλληλη και να δικαιολογήσετε πλήρως την επιλογή σας. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι, η καμπύλη C_2 χωρίζει το χωρίο που περικλείεται από τις καμπύλες C_3 και C_4 και τις κατακόρυφες ευθείες x= -1 και x=0 σε δύο ισεμβαδικά χωρία. (Μονάδες 07)



Επιπλέον ερωτήματα :

δ) Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η γραφική παράσταση της h .

ε) Δίνεται η συνάρτηση $K(x) = \begin{cases} h(x) & , \ x \leq 0 \\ \alpha x + \beta & , \ x > 0 \end{cases}$

i) Αν $\beta = 2$ να δείξετε ότι η συνάρτηση K είναι συνεχής ανεξάρτητα από την τιμή του α .

ii) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές των α, β ώστε η συνάρτηση K να είναι παραγωγίσιμη στο 0.

iii) Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε να ορίζεται το $\int_{-1}^{1} K(x)\, dx$ και να ισούται με $6 + e^{-1}$.

31. ΘΕΜΑ 2 – 33588

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για τα εμβαδά των περιοχών $\Omega_1,\Omega_2,\Omega_3$ του παρακάτω σχήματος ισχύει $E(\Omega_1)=E(\Omega_2)=E(\Omega_3)=\frac{4}{3}$.

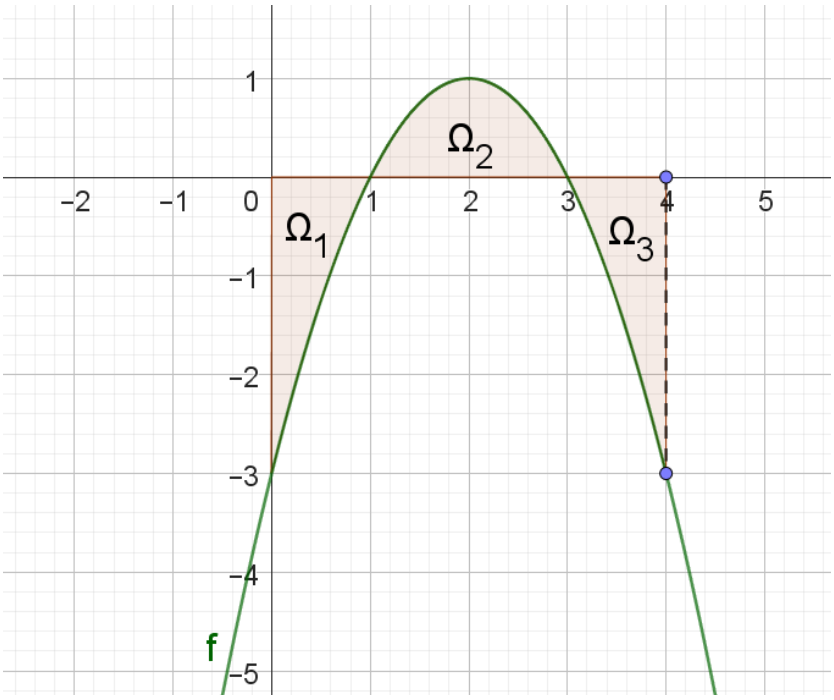
α) Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα:

i. $\int_0^1 f(x)dx$. (Μονάδες 6)

ii. $\int_0^3 f(x)dx$. (Μονάδες 6)

iii. $\int_0^4 f(x)dx$. (Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\int_0^{2023} f(x)dx - \int_4^{2023} f(x)dx$. (Μονάδες 7)



Επιπλέον ερωτήματα :

γ) Αν $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, με τις πληροφορίες που έχετε από τη γραφική παράσταση της f ,

να βρείτε τις τιμές των α,β,γ .

δ) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=-x^2+4x-3$, $g(x)=e^x\cdot f(x)$ και $h(x)=f(x)-3x+\ln x$

i) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

ii) Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα.

iii) Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iv) Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

v) Να βρείτε το σύνολο τιμών της h.

vi) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_h , τον x’x, την x=1 και την x=2.

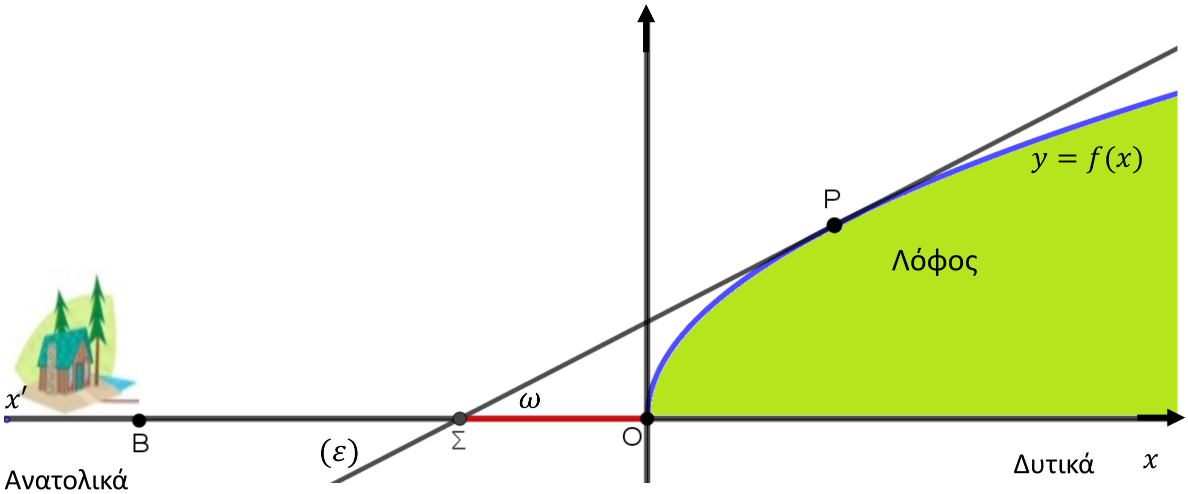
32. ΘΕΜΑ 4 – 33577

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο απεικονίζεται μια αγροικία στην θέση B του αρνητικού ημιάξονα Ox'. Δυτικά της αγροικίας, κατά μήκος του θετικού ημιάξονα Ox, υπάρχει ένας λόφος, το ύψος του οποίου δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ για $x \geq 0$. Όλες οι συντεταγμένες μετρούνται σε μέτρα.

Καθώς ο ήλιος αρχίζει να δύει, ο λόφος ρίχνει στην πεδιάδα την σκιά του $O\Sigma$, η οποία και μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου t, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Θεωρούμε $t = 0$ τη στιγμή που ο ήλιος ρίχνει κάθετα τις ακτίνες του στο σημείο O του λόφου, ενώ στη συνέχεια κινούμενος προς τα δυτικά, αρχίζει να δημιουργείται η σκιά.

Ας είναι $\widehat{\omega} = P\widehat{\Sigma}O$.



α) Αν το σημείο P έχει συντεταγμένες $P(x_P, y_P)$, να αποδείξετε ότι η τετμημένη του σημείου Σ είναι $x_\Sigma = -x_P$.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ ισχύει $\varepsilon\varphi\big(\omega(t)\big) = \frac{1}{2}\big(x_P(t)\big)^{-\frac{1}{2}}$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε πόσο γρήγορα μεγαλώνει η σκιά $(O\Sigma)$ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία οι ακτίνες του ήλιου σχηματίζουν γωνία $\omega = \frac{\pi}{6}$ με τον οριζόντιο άξονα, ενώ αυτή τη χρονική στιγμή t_0 η γωνία ω μειώνεται με ρυθμό $\frac{1}{16}\, rad$ ανά λεπτό. (Μονάδες 10)

Δίνεται ότι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = 1 + \varepsilon\varphi^2\omega$.

Επιπλέον ερωτήματα :

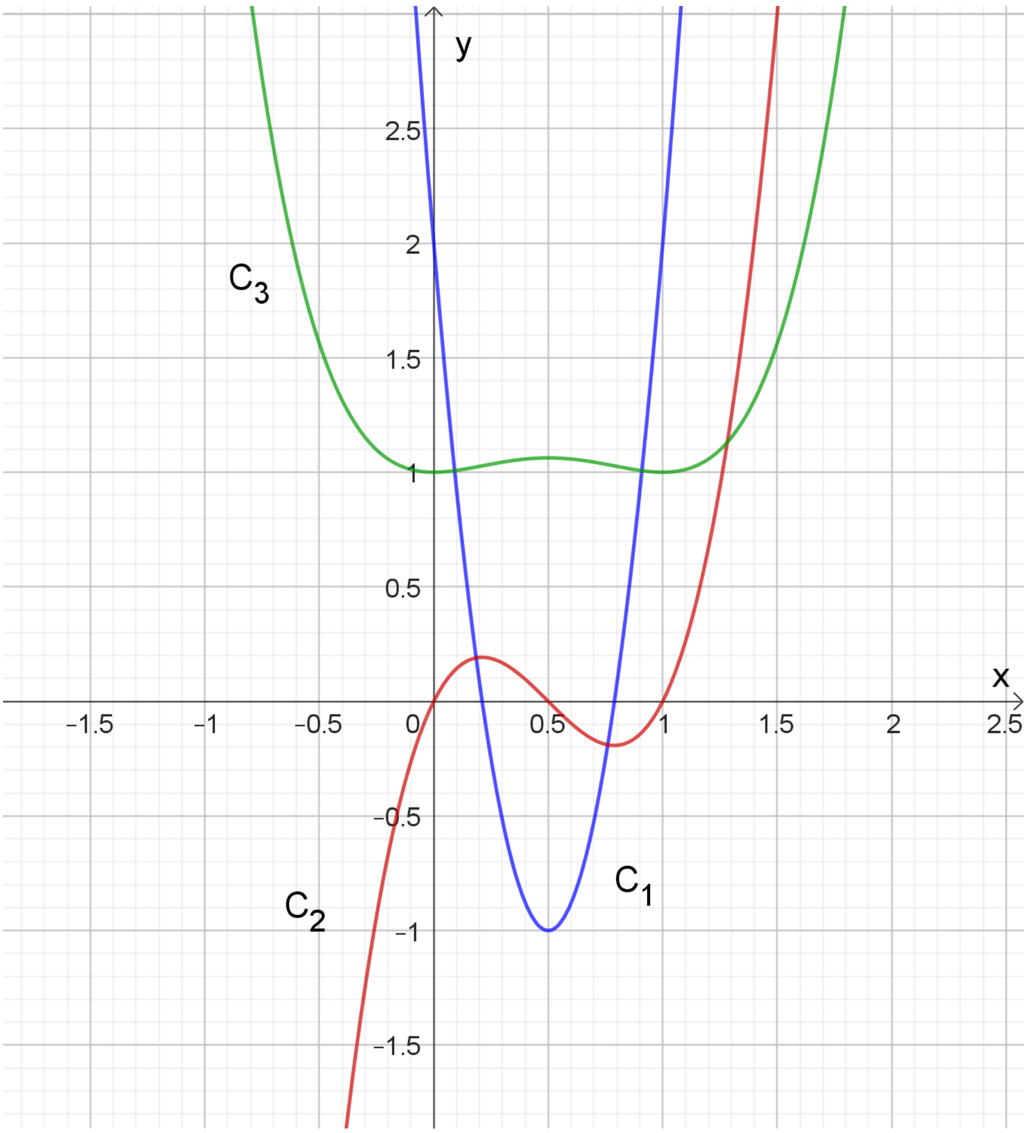
δ) Ένας άνθρωπος κινείται πάνω στο λόφο και συγκεκριμένα πάνω στην C_f.

Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του είναι ίσος με το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την εφαπτομένη της στο $P\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ και τον άξονα x΄x .

33. ΘΕΜΑ 4 – 34151

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2, C_3 τριών συναρτήσεων f, f' και F, όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι η C_3 τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 1 ενώ η C_2 διέρχεται από την αρχή των αξόνων και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο ακόμη σημεία με τετμημένες $\frac{1}{2}, 1$. Με δεδομένο ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x$ και η γραφική της παράσταση είναι η C_2,



α) να μελετήσετε, με τη βοήθεια του σχήματος ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, τη συνάρτηση F ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

β) να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση C_3 αντιστοιχεί στην συνάρτηση F. (Μονάδες 6)

γ) να βρείτε τον τύπο των συναρτήσεων f' και F. (Μονάδες 6)

δ) να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ του άξονα $x'x$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f. (Μονάδες 6)

34. ΘΕΜΑ 4 – 33598

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς και γνησίως αύξουσας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $[0,1]$, η οποία διέρχεται από τα σημεία $(0,0)$ και $(1,1)$. Το χωρίο Ω περικλείεται από τον άξονα yy' την ευθεία $y=1$ και τη γραφική παράσταση της f.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1}. (Μονάδες 5)

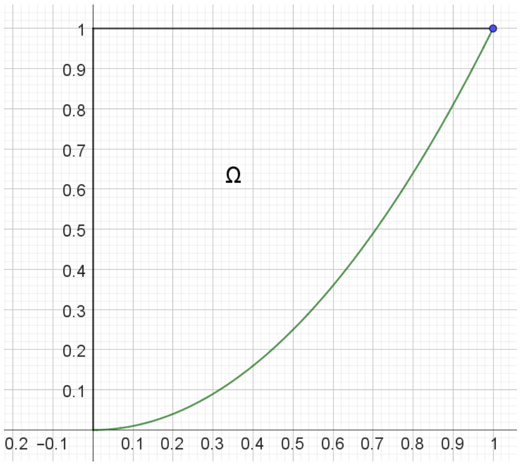
β) Να μεταφέρετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα και σχεδιάσετε σε αυτό τη γραφική παράσταση της f^{-1}. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)dx < \frac{1}{2}$. (Μονάδες 5)

δ) Αν θεωρήσουμε ότι η f^{-1} είναι συνεχής αξιοποιώντας το παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι

i. $\int_0^1 f^{-1}(x)dx = 1 - \int_0^1 f(x)dx$. (Μονάδες 5)

ii. $\mathrm{E}(\Omega) = \int_0^1 f^{-1}(x)dx$, όπου $\mathrm{E}(\Omega)$ το εμβαδόν του χωρίου Ω. (Μονάδες 5)



35. ΘΕΜΑ 4 – 29645

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -3x^2+1, x<0 \\ -x^3+3x^2+1, x \geq 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο ακριβώς ρίζες τις x_1, x_2 με $x_1 < 0$ και $x_2 > 3$. (Μονάδες 12)

β) i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμία από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[x_1, x_2]$ με x_1, x_2 οι ρίζες της f του ερωτήματος α). (Μονάδες 04)

ii) Να βρείτε όλα τα $\xi \in (x_1, x_2)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$. (Μονάδες 04)

γ) Αν ε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη 2, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f, την ευθεία ε και την ευθεία x=0.

(Μονάδες 05)

36. ΘΕΜΑ 4 – 29646

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1, x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η f παρουσιάζει στο $x_1 = 0$ τοπικό ελάχιστο, στο $x_2 = 2$ μέγιστο και το σημείο $\Gamma(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f. (Μονάδες 09)

ii. Τα σημεία$\mathrm{A}(x_1, f(x_1), \mathrm{B}(x_2, f(x_2)$ και $\Gamma(x_3, f(x_3)$ είναι συνευθειακά και το σημείο Γ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ. (Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία ΑΒ ορίζει με τη γραφική παράσταση της f δύο ισεμβαδικά χωρία. (Μονάδες 08)

γ) Έστω ε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της Β, η οποία τέμνει τον άξονα y'y στο Δ. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΔ ισούται με το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f, της ευθείας ε και του άξονα y'y. (Μονάδες 05)

37. ΘΕΜΑ 4 – 31792

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -x^2 + x + 1\,, & -1 \leq x < 1 \\ 1 + \frac{(lnx)^2}{x}\,, & x \geq 1 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής, αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f. (Μονάδες 7)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^{-x}$. Να υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$, $g(x)$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = 1$ και $x = e$. (Μονάδες 9)

38. ΘΕΜΑ 4 – 25147

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = e^{-x}, g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x, x \in [0,2\pi]$.

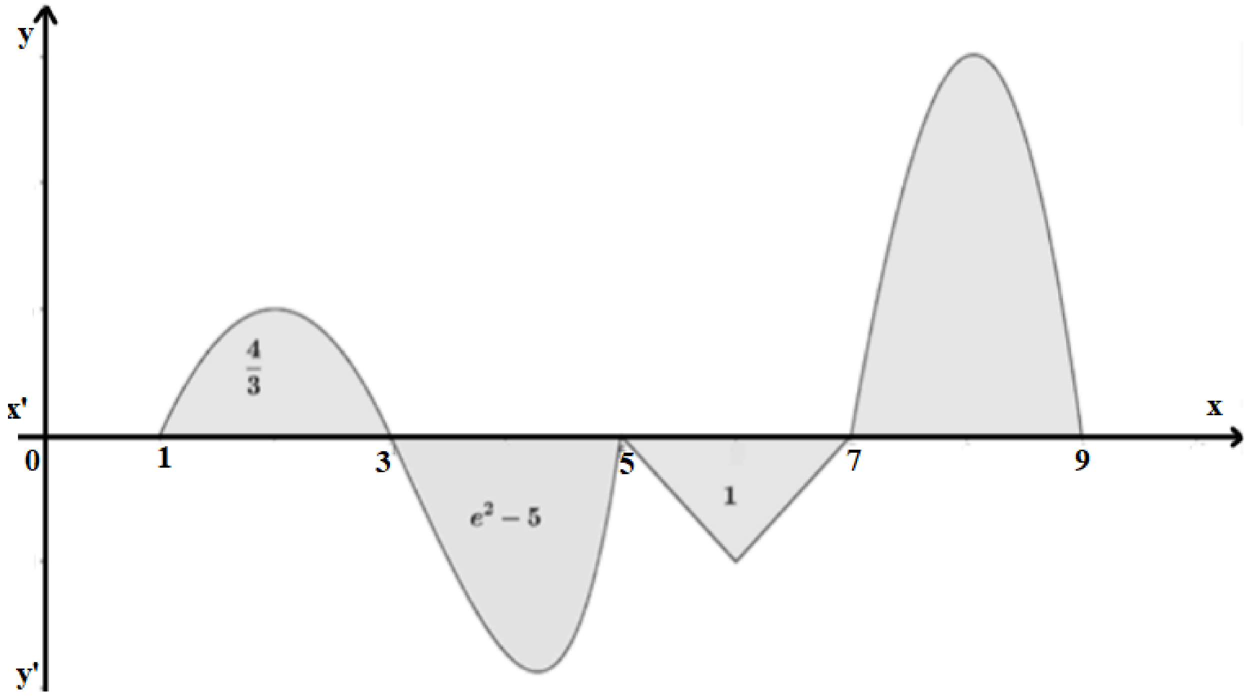
α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g έχουν μοναδικό κοινό σημείο το $A\left(\frac{\pi}{2}, e^{\frac{-\pi}{2}}\right)$, στο διάστημα ορισμού τους $[0,2\pi]$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δέχονται κοινή εφαπτομένη στο σημείο τομής τους. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τον άξονα $y'y$ και τις γραφικές παραστάσεις των C_f, C_g. (Μονάδες 9)

39. ΘΕΜΑ 2 – 32800

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,9]\to\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Πάνω στο σχήμα έχουν σημειωθεί οι τιμές των εμβαδών των χωρίων που σχηματίζει η γραφική παράσταση της f με τον άξονα $x'x$, όταν $x\in[1,7]$.



Δίνονται ακόμη ότι: $\left(\int_7^9 f(x)dx\right)^2=16$ και ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ μόνο στα σημεία με τετμημένες 1, 3, 5, 7 .

α) Να αποδείξετε ότι $\int_7^9 f(x)dx=4$. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f

και τον άξονα $x'x$, όταν $x\in[1,9]$. (Μονάδες 07)

γ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^9 f(x)dx$. (Μονάδες 08)

Επιπλέον ερώτημα :

δ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\int_1^3 ln\,x\cdot f(t)\,dt+\int_5^7 x\cdot f(t)\,dt$, $x\in(0,+\infty)$

i) Να δείξετε ότι $g(x) = \frac{4}{3}ln\,x-x$, $x\in(0,+\infty)$.

ii) Να μελετήσετε την g ως προς τα ακρότατα και να δείξετε ότι $g(x)<0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

40. ΘΕΜΑ 4 – 28870

Δίνεται μία συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα [-3,2], η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη στο -1.

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου της f , η $C_{f'}$

που στο διάστημα (-1,2] είναι ευθύγραμμο τμήμα.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία της. (Μονάδες 08)

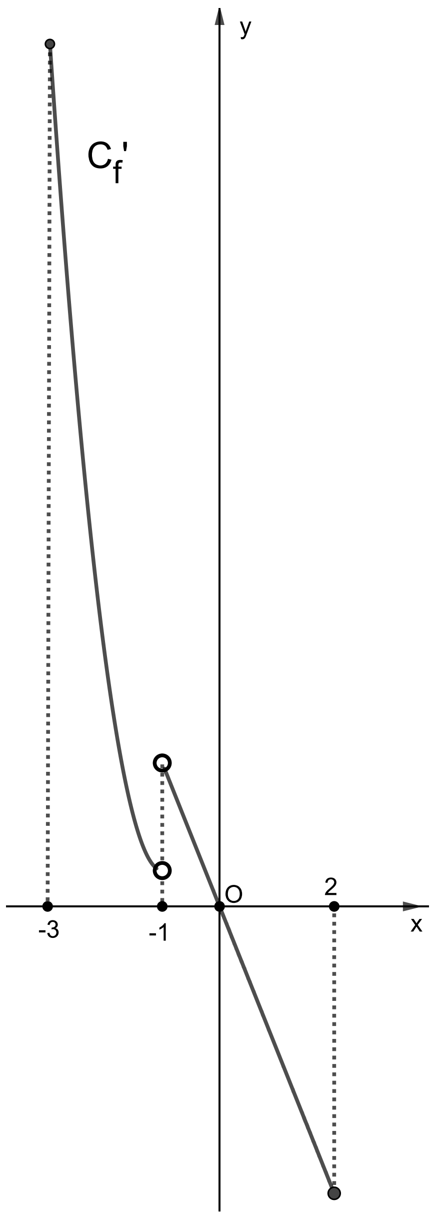
β) Να βρείτε:

i. Τα κρίσιμα σημεία της f, αν υπάρχουν, δικαιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 06)

ii. Τις θέσεις τοπικών ακροτάτων και το είδος τους. (Μονάδες 05)

γ) Αν η f' είναι συνεχής στο [0,2] και ισχύει ότι $\int_0^2 f'(x)dx = -4$, να υπολογίσετε την τιμή $f'(2)$.

(Μονάδες 06)



41. ΘΕΜΑ 4 – 28476

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)(x-1)}{lnx} = 0 \text{ και}$$

$$f'(x) = \sqrt{x^2+1} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α)

i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1}\frac{lnx}{x-1}$ (Μονάδες 03)

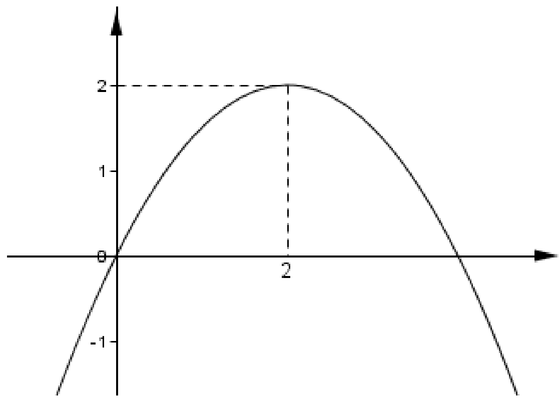
ii. Να αποδείξετε ότι $f(1) = 0$. (Μονάδες 03)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα. (Μονάδες 06)

γ) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου E, που περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, τον άξονα $x'x$ και των ευθειών $x = 0$ και $x = 1$. (Μονάδες 07)

42. ΘΕΜΑ 4 – 31534



Η παραβολή του διπλανού σχήματος διέρχεται από την αρχή των αξόνων, η κορυφή της είναι το σημείο Κ(2, 2) και είναι η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x,\ x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 8)

β) Αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0, 1), να αποδείξετε ότι $f(x) = -\frac{1}{6}x^3 + x^2 + 1$ (Μονάδες 6)

Θεωρούμε επιπλέον τη συνάρτηση $g(x) = x^2 + x + 1 - \eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$

γ) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράστασης της g είναι πάνω από τη γραφική παράσταση της f για κάθε $x > 0$. (Μονάδες 6)

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = \pi$. (Μονάδες 5)

Επιπλέον ερώτημα :

δ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\eta\mu x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\eta\mu^2 x}$, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{\eta\mu^4 x}$

43. ΘΕΜΑ 4 – 31533

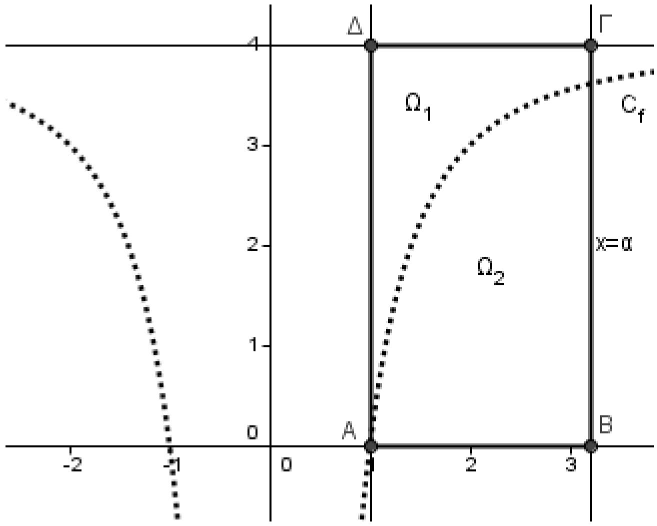
Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4-\frac{4}{x^2}$, $x\neq 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία, την κυρτότητα και να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της f. (Μονάδες 9)

β) Αν οι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ είναι κάθετες, να αποδείξετε ότι $x_1x_2=-4$.

(Μονάδες 6)

γ) Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της f (διακεκομμένη γραμμή) και το ορθογώνιο ΑΒΓΔ που ορίζεται από τον άξονα x′x και τις ευθείες $x=1$, $x=\alpha$, $\alpha>1$ και $y=4$. Η C_f χωρίζει το ορθογώνιο σε δυο χωρία Ω_1, Ω_2.



i. Να υπολογίσετε, συναρτήσει του α, τα εμβαδά $E(\Omega_1)$, $E(\Omega_2)$ των χωρίων. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του α ισχύει $E(\Omega_1)=E(\Omega_2)$. (Μονάδες 5)

44. ΘΕΜΑ 4 – 31148

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=\frac{x^2+1}{e^x}$, $x\in R$ και $g(x)=e^{-x}$ με $x\in R$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x)\geq g(x)$ για κάθε $x\in R$. (Μονάδες 5)

β) Θεωρούμε τα σημεία $B(x, f(x))$ και $\Gamma(x, g(x))$ με $x>0$. Η παράλληλη ευθεία από το B προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Δ, ενώ η παράλληλη ευθεία από το Γ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο Z.

(i) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου $B\Gamma Z\Delta$ είναι $E(x)=\frac{x^3}{e^x}$, $x>0$. (Μονάδες 6)

(ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x, το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξτε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της συνάρτησης $h(x)=\frac{f(x)-g(x)}{x}$, τον άξονα $x'x$ καθώς και τις ευθείες με εξισώσεις $x=ln2$ και $x=1$, είναι $ln\sqrt{2e}-\frac{2}{e}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 7)

45. ΘΕΜΑ 4 – 31149

Θεωρούμε τη συνάρτηση f με $f(x)=\frac{ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ με $x\in(0,+\infty)$.

α) Να αποδείξτε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x>0$ και ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση $ln(1+f(x))-\ln\big(f(x)\big)>f^2(x)\cdot f(ln2)$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τις ευθείες με εξισώσεις $x=\frac{1}{2}$, $x=1$ και τον άξονα $x'x$ είναι $ln\left(\frac{27}{4e}\right)$. (Μονάδες 9)

46. ΘΕΜΑ 4 – 31530

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+5x-2,\ x\in\mathbb{R}$.

α) i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη x_o που περιέχεται στο διάστημα (0, 1). (Μονάδες 5)

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός x_o είναι πιο κοντά στο 0 ή στο 1. (Μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x_o+\theta)x^3+2x-5}{f(x_o-\theta)x-5}$, αν x_o είναι ο αριθμός του ερωτήματος (α) και θ ένας θετικός αριθμός. (Μονάδες 9)

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση C_f της f, την εφαπτομένη της στο σημείο A(1, 4) και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$. (Μονάδες 7)

Επιπλέον ερώτημα :

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-8\cdot ln\,x$ ως προς το πρόσημο και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g , τον x'x , την $x=1$ και την $x=2$.

47. ΘΕΜΑ 4 – 26183

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi x}{4}\right), 0\le x\le 1\\ 1-\frac{4lnx}{x},\ x>1\end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 1, αλλά όχι παραγωγίσιμη στο 1. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς δύο κρίσιμα σημεία στο διάστημα $[0,+\infty)$. (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$, τον άξονα $y'y$ και την ευθεία με εξίσωση $x=1$, είναι $E=\frac{ln4}{\pi}$ τετραγωνικές μονάδες. (Μονάδες 10)

48. α) Αν f συνεχής και περιττή στο [−α,β] ,α>0 δείξτε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\chi)d\chi = 0$

β) Αν f συνεχής και άρτια στο [−α,β] ,α>0 δείξτε ότι $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(\chi)d\chi = 2\int_{0}^{\alpha} f(\chi)d\chi$.

49. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x - 2$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-1}^{e} f^{-1}(x)\,dx$

50. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{e}{x} + ln\,x + 1 \ \ , x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,4)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = 3^{\xi-1}$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e^2$.

51. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{2\,ln\,x}{x} + \lambda x + 3$, $x > 0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$.

α)) Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη προς την ευθεία (ε) με εξίσωση $y = 3x$

να υπολογίσετε το λ .

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , την ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και τις ευθείες με εξισώσεις: $x = 1$ και $x = e$.

52. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = -2 + \frac{2}{x}$ και $g(x) = 3 \cdot ln\,x$, όπου $x \in (0, +\infty)$.

α) Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης h με $h(x) = f(x) - g(x)$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g και τις ευθείες με εξισώσεις: $x = 1$ και $x = \lambda$, όπου $\lambda > 0$.

γ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} E(\lambda)$.

δ) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{\lambda \to 0^+} E(\lambda)$.

53. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα : α) $\int_1^e (2x+1)\cdot \ln x \; dx$ β) $\int_{\ln\pi}^{\ln 2\pi} e^x \sigma\upsilon\nu e^x \, dx$

54. Δίνεται συνάρτηση f με $f(1)=f(3)=0$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $A(\xi, f(\xi))$ με $\xi\in(1,3)$, στο οποίο η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη .

β) Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι αρνητικός αριθμός .

γ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=(x-3)\ln x$, να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τον $x'x$.

55. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $f'(x) = (2x+2)\, f(x)$.

α) Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = e^{x^2+2x}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

γ) Να βρεθεί το πλήθος των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=\dfrac{3}{2}$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της $g(x)=(x+1)f(x)$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

ε) Δίνεται η $h(x)=(x^2-1)f(x)$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{2\xi f(\xi)}{1-\xi^2}$.

56. α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^\alpha (-2x-1)\, dx$.

β) Έστω η συνάρτηση $I(\alpha) = \int_1^\alpha (-2x-1)\, dx$.

Ποια είναι η μέγιστη τιμή της ;

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$ ορισμένη στο $[0,2]$.

α) Δείξτε ότι $0 \le f(x) \le \dfrac{4}{3}$ για κάθε $x\in[0,2]$.

β) Δείξτε ότι $0 \le \int_0^2 f(x)dx \le \dfrac{8}{3}$.

58. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_1^e 2004\, x^{2003} \ln x \; dx$ β) $\int_0^1 e^x x^2 \, dx$

γ) $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x} dx$ δ) $\int_1^e \dfrac{\ln x}{x^2} dx$

59. Αν $f(2004)-f(2003) = -1975$ και $2004f'(2004) = 2003f'(2003)$

να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_{2003}^{2004} x f''(x)dx$.

60. Αν για την f με συνεχή παράγωγο στο $[0,1]$ ισχύει $f(1)=\ln 2004$

να δείξετε ότι : $\int_0^1 \left(2004x^{2003}e^{f(x)} + x^{2004}e^{f(x)}f'(x)\right)dx = 2004$.

61. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_{\sqrt{2003}}^{\sqrt{2004}} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ β) $\int_0^2 x^2\sqrt{9-x^3}\,dx$

62. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x)dx$ κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{\pi}{2}-u$.

63. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\pi} x f(\eta\mu x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\eta\mu x)dx$ κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $x = \pi - u$.

64. Αν $I_1 = \int_0^{2004}\frac{e^x}{e^x+e^{2004-x}}dx$ και $I_2 = \int_0^{2004}\frac{e^{2004-x}}{e^x+e^{2004-x}}dx$

να δείξετε ότι : α) $I_1 = I_2$ β) $I_1 + I_2 = 2004$ γ) $I_1 = 1002$

65. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_{-2004}^{2004} \eta\mu x\cdot\eta\mu\left(x^2+1\right)dx$

66. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_{-1}^{1}\frac{x^3+x^2+x}{x}dx$ β) $\int_1^2\frac{x^2-1}{x+1}dx$ γ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)dx$

δ) $\int_1^{81}\frac{1}{4\sqrt{x}}dx$ ε) $\int_1^{\sqrt{27}}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}dx$ στ) $\int_1^e\frac{5+x}{x}dx$

67. Να υπολογίσετε την παράγωγο της $f(x)=x^2e^x$ και το ολοκλήρωμα $\int_0^1 xe^x(2+x)dx$.

68. Να υπολογίσετε την παράγωγο της $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ και το ολοκλήρωμα $\int_1^e\frac{2002(1-\ln x)}{x^2}dx$.

69. Να αποδείξετε ότι $\int_{1975}^{2005} e^{2002x}\left(x^3-3x^2+2x\right)dx \geq 0$

70. Να υπολογίσετε το $\alpha\in\mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\int_0^1\left(4\alpha x^3+2x+\alpha\right)dx = 7$.

71. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\int_0^1\frac{x-2}{2x^2-5x-3}dx \geq 0$.

72. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3\ln x$.

Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f και το ολοκλήρωμα $\int_1^e 10x^2(3\ln x+1)dx$.

73. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 \left(2e^x+1\right)dx$ β) $\int_1^e \frac{x-e}{x}dx$ γ) $\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

δ) $\int_{-1}^1 \left|x^3+x^2-2x\right|dx$ ε) $\int_0^1 \left|x^2+x+1\right|dx$ ζ) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\sigma\upsilon\nu x-3\eta\mu x\right)dx$

η) $\int_9^{16} \frac{3\sqrt{x}}{x}dx$ θ) $\int_0^8 \sqrt[3]{x}dx$

74. Έστω η συνάρτηση $f\left(x\right)=\alpha x^2+\beta x$. Να βρεθούν τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι :

$\int_0^1 f\left(x\right)dx = \frac{4}{3}$ και $\int_1^2 f\left(x\right)dx = \frac{16}{3}$

75. Έστω $f\left(x\right)=\alpha\ln x+\beta x$, με $f\left(2004\right)-f\left(2002\right)=1975$.

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{2002}^{2004} \frac{1}{1975}\left(\frac{\alpha}{x}+\beta\right)dx$.

76. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_0^1 \left(4x^3+3x^2+2x+1\right)dx$ β) $\int_{-1}^1 \frac{x^2+x}{x}dx$ γ) $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ δ) $\int_1^2 \frac{x^3-x}{x+1}dx$

77. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^2 \left|x-1\right|dx$

78. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

α) $\int_4^9 \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$ β) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)dx$ γ) $\int_{-1}^1 \left|x^3-x\right|dx$ δ) $\int_1^e \frac{x^2+1}{x}dx$

79. Έστω $f\left(x\right) = x^2\,\eta\mu x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = 0$.

80. Έστω $f\left(x\right) = 2004 - x\ln x$, $x\in\left[1,e\right]$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

81. Έστω $f\left(x\right) = 2004 - \ln x$ και $g\left(x\right) = 2004 + \ln x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$

82. Έστω η $f\left(x\right)=x\ln x$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\left(1\,,\,f\left(1\right)\right)$.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο $\left(1\,,\,f\left(1\right)\right)$ και την ευθεία $x=e$.

83. Έστω $f:[\alpha,\beta]\to(0,+\infty)$ δύο φορές παραγωγίσιμη , με $f(\alpha)=e^{\alpha}$ και $f(\beta)=e^{\beta}$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=f(\xi)$.

β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της $g(x)=\dfrac{f(x)}{2e^{x+2004}}$ έχει εφαπτομένη παράλληλη στον $x'x$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε :

$$f'(x_o)\ -\ f(x_o)\ +\ (x_o-\alpha)\big(f''(x_o)-f'(x_0)\big)\ =\ 0$$

δ) Να υπολογίσετε το γινόμενο : $\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta}\frac{f'(x)}{f(x)}dx\ \cdot\ \int_{\alpha}^{\beta}\frac{2004}{(\beta-\alpha)^2}dx$.

ε) Έστω συνεχής συνάρτηση $h:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$\left(1+x^{1975}\right)h(x)\ +\ f(x)\ \le\left(x^{29}+x^{2004}\right)h(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Να αποδείξετε ότι η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

84. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)\ =\ \alpha x^4-\beta x^3+(\alpha+1)x+\beta$ η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο

στο $x_1=-\dfrac{1}{2}$ και έχει σημείο καμπής το $A\big(1\ ,\ f(1)\big)$.

α) Να βρείτε την f .

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα

γ) Να δείξετε ότι $f(e^{2x}+2)>f(2e^{x})$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να εξετάσετε αν η f έχει ασύμπτωτες .

ε) Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\lim_{x\to-\infty}\log\left[f(x)\right]\quad,\quad\lim_{x\to-\infty}\log\left[\frac{1}{f(x)}\right]\quad,\quad\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{\log\left[f(x)\right]}$$

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της

$g(x)=\dfrac{f(x)}{x^2}$, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

85. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ` όλο το $\mathbb{R}$.

Για την f είναι γνωστό ότι : $f(x)\ge0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(1)=0$

και $\displaystyle\int_0^1 x^3f'(x)dx\ =\ -12$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x)=x^2f(x)$.

α) Να δείξετε ότι $f'(1)=0$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $2\xi f(\xi)+\xi^2f'(\xi)\ =\ 0$.

γ) Να δείξετε ότι : $\displaystyle\int_0^1 g(x)dx\ =\ 4$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\displaystyle\int_1^{\sqrt{2}} x\,g\left(x^2-1\right)dx$

ε) Δίνεται η συνάρτηση h με $h(x)=-g(x)-1$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται : από την γραφική παράσταση της h , τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=0$, $x=1$.

86. Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$.

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .
β) Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.
δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=1$, $x=1$, $x=e$.
ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\alpha)$ του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=1$, $x=\alpha$ με $\alpha>1$.
Να υπολογίσετε επίσης το όριο : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}E(\alpha)$. Τι εκφράζει το όριο αυτό ;
στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $\mathrm{E}(\beta)$ του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=\beta$, $x=1$ με $0<\beta<1$.
Να υπολογίσετε επίσης το όριο : $\lim\limits_{\beta\to0^+}E(\beta)$. Τι εκφράζει το όριο αυτό ;

87. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και οι αριθμοί α , β με $\alpha<\beta$. Δίνεται επιπλέον ότι $f(\alpha+\beta-x)=x+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$.
β) Να δείξετε ότι οι αριθμοί α , β είναι αντίθετοι .
γ) Για κάθε $x>0$ να δείξετε ότι υπάρχει ξ με $|\xi|<x$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-\dfrac{1}{2}$.
δ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η f είναι περιττή να βρείτε τις f και f^{-1} .

Υπόδειξη – Συνοπτική Λύση

α) $u=\alpha+\beta-x$, $du=(-1)dx$,
για $x=\alpha$ έχουμε $u=\beta$, για $x=\beta$ έχουμε $u=\alpha$
Οπότε $\int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx = \int_\beta^\alpha f(u)(-1)du = \int_\alpha^\beta f(u)du = \int_\alpha^\beta f(x)dx$

β) $f(\alpha+\beta-x)=x+f(x) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f(\alpha+\beta-x)dx = \int_\alpha^\beta x\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)dx \overset{\text{A)}}{\Rightarrow} \Rightarrow \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_\alpha^\beta = 0 \Rightarrow$

$\dfrac{\beta^2}{2}-\dfrac{\alpha^2}{2}=0 \Rightarrow (\beta-\alpha)(\beta+\alpha)=0 \Rightarrow \beta=-\alpha$ ($\beta\neq\alpha$)

γ) Από το β) έχουμε : $f(-x)=x+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Από Θ.Μ.Τ. στο $[-x,x]$ υπάρχει $\xi\in(-x,x)$ τέτοιο ώστε
$f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(-x)}{x-(-x)} \Leftrightarrow f'(\xi)=\dfrac{-x}{2x} \Leftrightarrow f'(\xi)=-\dfrac{1}{2}$

δ) Αν η f είναι περιττή ισχύει $f(-x)=-f(x)$
Οπότε $f(-x)=x+f(x) \Leftrightarrow -f(x)=x+f(x) \Leftrightarrow 2f(x)=-x \Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{1}{2}x$

88. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=2$.

Δίνεται ότι : $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{e^x+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

δ) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

Υπόδειξη – Συνοπτική Λύση

α) $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1}{e^x+1} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{1+e^x-e^x}{e^x+1} \Leftrightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)}=1-\dfrac{e^x}{e^x+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \ln\left(f(x)\right)=x-\ln\left(e^x+1\right)+c$ (η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζει , συνεπώς διατηρεί σταθερό πρόσημο , το οποίο είναι θετικό αφού $f(0)=2$)

$f(0)=2 \Rightarrow c=2\ln 2 \Rightarrow c=\ln 4$ άρα $\ln\left(f(x)\right)=x-\ln\left(e^x+1\right)+\ln 4$

$\ln\left(f(x)\right)+\ln\left(e^x+1\right)-\ln 4=x \Leftrightarrow \ln\dfrac{f(x)\left(e^x+1\right)}{4}=x \Leftrightarrow$ ...... $f(x)=\dfrac{4e^x}{e^x+1}$

β) $f'(x)=\dfrac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}>0$, συνεπώς f γνησίως αύξουσα .

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4e^x}{e^x+1}=\dfrac{0}{0+1}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^x}{e^x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(4e^x)'}{(e^x+1)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4e^x}{e^x}=4$

f γνησίως αύξουσα και συνεχής συνεπώς το σύνολο τιμών είναι το $(0\,,4)$.

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$ άρα η $y=0$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=4$ άρα η $y=4$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

δ) $E=\displaystyle\int_0^1\dfrac{4e^x}{e^x+1}dx=\left[4\ln\left(e^x+1\right)\right]_0^1=4\ln(e+1)-4\ln 2$ τ.μ.

89. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$\displaystyle\int_0^1 e^{1-x}f(x)\,dx=f(x)+e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=-e^x+\dfrac{e}{e-2}$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x)=0$.

γ) Να δείξετε ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι θετικός αριθμός .

δ) Αν x_0 η λύση της παραπάνω εξίσωσης , να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,x_0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=-\xi f'(\xi)$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

90. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\sqrt{x-1}$.

α) Δείξτε ότι για κάθε $x\in[1,5]$ ισχύει $f(x)\in[0,10]$.

β) Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=5$.

91. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x\ln 2x$.

α) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g .

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g .

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(m)$ του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της g και τις ευθείες $x=m$, $x=\frac{1}{2e}$ με $0<m<\frac{1}{2e}$.

στ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{m\to 0^+}E(m)$.

92. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,f(1))$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , την ευθεία (ε) και τον άξονα $y'y$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\alpha$ με $\alpha>1$.

στ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\mathrm{E}(\alpha)$.

93. Δίνονται συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με $g'(x)=f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(21)=f(21)$.

Για την συνάρτηση f ισχύει :

$f(1)=e$, $f'(x)>0$ και $x f'(x)=(1+2x^2)f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(0)=0$ και να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο.

β) Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=xe^{x^2}$.

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=0$ με $\alpha<0$.

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to-\infty}E(\alpha)$.

στ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,5)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)=e^{25}$.

ζ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

94. α) Να δείξετε ότι αν K , N συνεχείς στο $[\alpha,\beta]$ και $K(x)>N(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} K(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} N(x)dx$$

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1013$ με $x\in(0,+\infty)$.

i) Να δείξετε ότι για κάθε $t\in(x,\, x+2)$ ισχύει : $f(x) > f(t) > f(x+2)$.

ii) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\int_{x}^{x+2} f(t)dt\right)$.

95. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(0)=0$.

Για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $f'(x) = \dfrac{f(x)}{x} + \dfrac{2x^2}{x^2+1}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = 0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = x\ln(x^2+1)$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = -\sqrt{e-1}$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{f(x)}{x^2+1}dx$

96. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(0) = 0$ και $f'(x) = f(x) - 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2 - 2e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Εξετάστε αν έχει ασύμπτωτες η γραφική παράσταση της f .

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.

ε) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 \frac{x^2}{2}\left(2 - f(x)\right)dx$

97. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση g , για την οποία ισχύει :

$g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(1) = 2$.

Δίνεται επίσης δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση f με

$f''(x) = g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f'(0) = f(0) = 0$.

α) Να μελετήσετε την g ως προς το πρόσημο .

β) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

δ) Αν $g(x)=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε την f .

ε) Αν $g(x)=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζουν οι γραφικές παραστάσεις των f και g .

98. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ` όλο το $\mathbb{R}$.

Για την f είναι γνωστό ότι : $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(1)=0$

και $\int_0^1 x^3 f'(x)dx = -12$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x)$.

α) Να δείξετε ότι $f'(1) = 0$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 0$.

γ) Να δείξετε ότι : $\int_0^1 g(x)dx = 4$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_1^{\sqrt{2}} x\, g\left(x^2-1\right) dx$

ε) Δίνεται η συνάρτηση h με $h(x) = -g(x) - 1$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της h , τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=0$, $x=1$.

99. Δίνεται f συνεχής στο $[0,1]$ με $0 < f(1) < \dfrac{2}{e^2}$. Αν $\int_0^1 e^{2x} f(x)dx = 2$ και $\int_0^1 e^{2x} f'(x)dx = 0$,

να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

100. α) Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+1} - \mu x\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(\mu^2-\mu\right)x^4 - \mu x^3 + x + 2004}{(\mu-1)x^3 + x + 1975}$

β) Δίνεται η $f(x) = \sqrt{4x^2+1} - \mu x$ η οποία έχει την $y = -2x$ ασύμπτωτη στο $-\infty$.

i) Να βρείτε το μ.

ii) Αν μ = 0 να υπολογίσετε το $\int_0^{\sqrt{2}} x f(x)\, dx$.

101. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \begin{cases} e^x + 3 & , \ x \in (-\infty, 0] \\ -\ln x + 8 & , \ x \in (0\,,\,e) \end{cases}$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 x \cdot f(x)\, dx$.

102. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(\ln x) = \dfrac{1}{x} - \ln x - 1$ για κάθε x > 0 .

α) Να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x} - x - 1$ για κάθε x ∈ $\mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

γ) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο .

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\left(x^2+1\right)e^{x^2} = 1$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον $x'x$ και την $x = 1$.

103. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = xe^{x^2+1}$.

α) Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f(x_0)=1975$.

β) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=-1$.

γ) Δείξτε ότι $\int_{-1}^{0} |f(x)| dx = \int_{0}^{1} |f(x)| dx$.

δ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα .

ε) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1, f(1))$ και τον άξονα $y'y$.

104. Δίνονται συναρτήσεις $f(x) = \dfrac{e^{\alpha x}+1}{x+1}$ και $g(x) = (x+1)f(x)$

με $x \in (-1, +\infty)$, $\alpha \neq 0$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

α) Δείξτε ότι $\alpha < 0$.

β) Δείξτε ότι $f'(x) = \dfrac{\alpha e^{\alpha x}(x+1) - e^{\alpha x} - 1}{(x+1)^2}$

γ) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία .

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$.

στ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\alpha\to 0^-} E(\alpha)$.

105. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) - f(y) = f\left(\dfrac{x}{y}\right)$ για κάθε x , y $\in (0, +\infty)$.

Δίνεται επίσης ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα .

α) Να υπολογίσετε το $f(1)$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 .

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2-2) + f(x) = f(5x-6)$.

δ) Αν $f(x)<0$ για κάθε $x>1$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα .

ε) Αν $f(x) = -\ln x$, $x \in (0, +\infty)$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την $y = -x$, την $x = 1$ και την $x = 2$.

106. α) Αν $f(x) = e^{3-x} - 1$ και $g(x) = \ln x$ να βρείτε τις $f \circ g$ και $g \circ f$.

β) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 (f \circ g)(x)\, dx$

107. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g για τις οποίες ισχύει : $f(x) = x\,g(x) + 2\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Αν είναι γνωστό ότι g συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = 19$

να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0\,,\,f(0))$

β) Αν $g(x) = (x+1)^2 + 18$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 (f(x) - 2 \cdot \eta\mu x)\,dx$.

108. Δίνεται η συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-2} + 5 & , \quad x > 2 \\ \\ \dfrac{1}{x-2} + 1 & , \quad x < 2 \end{cases}$$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Δίνεται η $h(x) = (f(x) - 5)(f(x) - 1)$. Να δείξετε ότι η C_h είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον x'x , την x=0 και την x=1 .

109. Δίνονται συναρτήσεις f , g συνεχείς στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει

$5f(2) < g(2) + 1$ και $10f(3) > g(3) + 1$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2,3)$

τέτοιο ώστε $f(\xi) = \dfrac{g(\xi) + 1}{\xi^2 + 1}$.

β) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι $g(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε :

i) να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο τομής της C_f με την ευθεία $y = 1$.

ii) να υπολογίσετε το $\int_0^1 e^x \cdot g(x)\,dx$

iii) να υπολογίσετε το $\int_0^1 x \cdot g(x) \cdot \ln(x^2+1)\,dx$

110. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3 + \alpha x}{x^2 + 1}$ και συναρτήσεις g , h με

$h(x) - f(x) \le 0$, $g(x) - f(x) \ge 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to -\infty}\left[f(x) - \dfrac{x^3}{x^2+1}\right]$

β) Αν $\lim\limits_{x\to 1} h(x) = \lim\limits_{x\to 1} g(x) = 11$ να υπολογίσετε το α .

γ) Αν $\alpha = 21$ να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\,dx$

111. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f με $D_f = (-\infty, 2)$ για την οποία ισχύει

$[f(-1)]^3 f(0) < -f(-1)f(0)$.

Για $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

γ) Για το x_0 του ερωτήματος β , να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} \quad \text{και} \quad \lim_{x \to x_0} \left[\frac{x}{f(x)} - \frac{1}{[f(x)]^2} \right]$$

δ) Αν $f(x) = -x + \dfrac{1}{x-2}$, $x \in (-\infty, 2)$ τότε :

i) να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii) να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\, dx$.

112. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \sqrt{2-x}}{2x^2 + x - 3} & , \quad x \in (1, 2] \\ \beta + 5 & , \quad x = 1 \\ \dfrac{\alpha\, \eta\mu(8x - 8)}{x - 1} & , \quad x < 1 \end{cases}$

Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

113. Δίνονται $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ και $g(x) = \dfrac{1}{2}$ ορισμένες στο $\left[0, \sqrt{e-1}\right]$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g .

γ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 x^3 \cdot f(x)\ dx$

114. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(x-3)^2} + 5 & , \quad x < 3 \\ -\dfrac{1}{(x-3)^2} & , \quad x > 3 \end{cases}$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)\, dx$

115. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{1-\sqrt{x}} , & 0 \le x < 1 \\ \gamma , & x=1 \\ ax+\beta , & x>1 \end{cases}$, με $a , \beta , \gamma \in \mathbb{R}$

α) Αν η C_f διέρχεται από το σημείο Α (2 , -1) και η f είναι συνεχής στο $x_0=1$, να προσδιορίσετε τις τιμές των a , β και γ .

β) Για τις τιμές των α, β, γ που βρήκατε να υπολογίσετε το $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}$ dx

116. Δίνεται η $f(x)=x^2-4$.

α) Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο $A(2,0)$ και τον άξονα $y'y$.

β) Να υπολογίσετε το $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cdot \eta\mu x \; dx$

117. Δίνονται οι συναρτήσεις f , g , h για τις οποίες ισχύει :

$f(0)=f'(0)=0$, $g(x)=\left[f(x)\right]^2+\left[f'(x)\right]^2$, $h(x)= 2x \ln\left(x^2+2\right)$,

$f''(x)+f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_g και C_h έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο .

γ) Δείξτε ότι η C_h δεν έχει ασύμπτωτες .

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζουν οι C_g , C_h και η ευθεία $x=-1$.

118. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2+\ln x}{x}$, $x>0$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Δείξτε ότι : $\ln x \le ex-2$, για κάθε $x>0$

γ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\dfrac{1}{e^3}$, $x=1$

δ) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 x^2 \cdot f(x)\, dx$

119. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι γνωστό επίσης ότι : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 5$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -2$, $f(0)>0$.

α) Δείξτε ότι η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο .

β) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία ρίζα η οποία είναι θετική .

γ) Να μελετήσετε την $g(x)=xf(x)$ ως προς το πρόσημο

αν είναι γνωστό ότι η ρίζα του ερωτήματος β) είναι το 1975 .

δ) Αν είναι γνωστό ότι η ρίζα του ερωτήματος β) είναι το 1975

να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0\,,1975)$

τέτοιο ώστε $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

ε) Αν $f(1)+f'(1) = f(10)+10f'(10)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,10)$ τέτοιο ώστε : $-\dfrac{2}{x_0} = \dfrac{f''(x_0)}{f'(x_0)}$

120. Να υπολογίσετε , αν ορίζονται , τα ολοκληρώματα :

1) $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} x\ln x^2\,dx$ 2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x^2\sigma\upsilon\nu 2x\,dx$ 3) $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\,dx$

4) $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-x}\sigma\upsilon\nu x\,dx$ 5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2x}}{e^x+1}dx$ 6) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{3}} \frac{e^{3x}}{e^{3x}+2004}dx$

7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varepsilon\phi x\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ 8) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \ln(\varepsilon\phi x)\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}dx$ 9) $\displaystyle\int_{\sqrt{e}}^{e} \frac{2}{x\ln x^2}dx$

10) $\displaystyle\int_1^{e} \frac{\ln x}{x}e^{2\ln x}\,dx$ 11) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \eta\mu 2x\cdot\ln(\eta\mu x)\,dx$ 12) $\displaystyle\int_1^{2} \frac{x^{20}+x^{10}+1}{x^{10}}\,dx$

121. Έστω συναρτήσεις f και g με $f''(x)=g''(x)+6x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν $f(1)-g(1)=3$, $f'(0)-g'(0)=1$ και οι αριθμοί $x_1=-1$ και $x_2=2004$ είναι ρίζες της g

i) να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(-1\,,2004)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

ii) να αποδείξετε ότι $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx+\frac{7}{4}$

iii) να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε α,β με $0<\alpha<\beta$ ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

122. Να αποδείξετε ότι :

α) για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $2xe^x+e^x-1>0$

β) $\int_1^{2026} e^x(2x+1)\,dx > 2025$

123. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-(x-1)^2}$

α) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο.

β) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 \sqrt{1-(x-1)^2}\,dx$

124. Αν f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ για την οποία ισχύει $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta -x f'(x)dx$ να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi) = -f(\xi)$.

125. **Α)** Δίνεται συνάρτηση f γνησίως φθίνουσα και συνεχής σ' όλο το $\mathbb{R}$ καθώς και συνάρτηση h με $h(x)=f(2x+1)-f(2-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $h(\xi)=0$.

β) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της h είναι πάνω από τον $x'x$ στο διάστημα $\left(-\infty\ ,\ \frac{1}{3}\right)$.

Β) Δίνεται επιπλέον ότι ο τύπος της h είναι $h(x)=e^{1-3x}-1$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της h .

β) Να υπολογίσετε τα όρια : i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+h(x)}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1-x}{1+h(x)}$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της h που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-3x+2008$.

δ) Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{0} x\cdot h(x)\ dx$

126. Δίνεται η $f(x)=\frac{x}{\ln x}$.

α) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες .

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in(1,+\infty)$ ισχύει $\ln x \le \frac{x}{e}$.

δ) Συγκρίνετε τους αριθμούς e^π και π^e .

ε) Αν Ε είναι το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x=e$, $x=e^2$, να δείξετε ότι $E>e^3-e^2$.

127. Δίνεται f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=f(4-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f''(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η $g(x)=\left(f(x)\right)^2+\left(f'(x)\right)^2$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

γ) Αν η C_f τέμνει τον $x'x$ στο σημείο Α(2,0) να βρείτε την f .

δ) Να δείξετε ότι $\int_0^2 f(x)dx = f(4)$.

128. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-x}{x^2}=2008$.

α) Να δείξετε ότι i) $f(0)=0$ ii) $f'(0)=1$

β) Να βρείτε τον $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-\lambda\left(f(x)\right)^2}{2x^2+\left(f(x)\right)^2}=3$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2008x^2+x$

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ii) Αν $0\le\alpha<\beta$ να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx > (\beta-\alpha)\cdot f(\alpha)$

129. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2e^x+x$

i) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

ii) Αν $0\le\alpha<\beta$ να δείξετε ότι $\int_a^\beta f(x)\,dx < (\beta^2-\alpha\beta)\cdot\left(\beta e^\beta+1\right)$

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον x'x, την x=0 και την x=1.

130. Να δείξετε ότι :

α) για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $2xe^x+e^x-1>0$

β) $\int_1^{2009} e^x(2x+1)dx>2008$

γ) $\int_2^3 \frac{x}{1-x}dx<\int_2^3\frac{e^x-1}{e^x}dx$

131. Δίνεται f συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{2026}\frac{f(x)}{f(x)+f(2026-x)}dx$.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $h(x)=f(x)-\frac{1}{6}x^3$

i) Να δείξετε ότι η h παρουσιάζει ελάχιστο σε $x_0\in(-1,0)$

ii) Να δείξετε ότι $h(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

132. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+2$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να βρείτε το πλήθος των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x'x .

δ) Να υπολογίσετε το $\int_{-3}^0 f(x)\ dx$

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^{2026}}$

133. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ` όλο το $\mathbb{R}$ με $f(1)=0$.

Για την f είναι γνωστό ότι : $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(1) = 0$.

β) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1\,,+\infty)$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (3,9)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \dfrac{2f(3)+6f(9)}{8}$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x^2-2x} - e^{-1}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

ii) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 (f(x)+e^{-1})(4x-4)\ dx$

134. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=1$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = (2x+2)\,f(x)$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση f .

β) Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x^2+2x}$ και $h(x) = (x^2-1)f(x)$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρεθεί το πλήθος των σημείων τομής της C_f με την ευθεία $y=\dfrac{3}{2}$.

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (-1,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \dfrac{2\xi f(\xi)}{1-\xi^2}$

iv) Να υπολογίσετε το $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{h(x)}{x-1}\,dx$

135. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι : για κάθε x>2027 ισχύει $e^{2027-x} < \frac{2027}{x}$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον x’x , την x=0 και την x=1.

136. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς το πρόσημο .

β) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)\,dx$

137. Έστω $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $x^\alpha \leq \alpha^x$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

β) Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 x^e dx \leq e - 1$

138. Δίνεται η $f(x) = e^x + x - 1$

α) Να λύσετε την ανίσωση $e^x + x < e + 1$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^x + x + 1\right) > 1 + e^2$.

γ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 x^2 \cdot f(x)\;dx$

139. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$

α) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η C_f είναι κάτω από τον x'x .

β) Να λύσετε την ανίσωση $\ln\dfrac{3x}{x^2+2} < x^2 - 3x + 2$

γ) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - \ln x}{x^2 - 4x + 3}$ ii) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{f(x) - \ln x - 21}{(x-2)^2}$ iii) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{f(x) - \ln x}{3 - x}$

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 x \cdot f(x)\;dx$

140. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 2x - 1$

α) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα .

β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2\eta\mu x - 1} + 4\eta\mu x - 2 = 1$

γ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 x^2 f(x)\,dx$

δ) Αν g συνεχής στο [0,1] , $g(0) < 0$ και $g(1) = 0$, να δείξετε ότι η εξίσωση

$f(x) + g(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (0,1) .

ε) Αν f^{-1} είναι η αντίστροφη της f , να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x^{21} + x - 2) = 0$

141. Με ένα σύρμα μήκους 6 μέτρων δημιουργούμε ορθογώνιο. Η μια πλευρά του ορθογωνίου έχει μήκος x και το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από συνάρτηση f .

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 3x - x^2$, $x \in (0,3)$ και να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου.

β) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x)}{x^2 - 9}$.

γ) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - 1}{(x-3)^2}$.

δ) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{f(x) - 2}$.

ε) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^{x-1}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα (1,2) .

στ) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)\, lnx \ dx$

142. Δίνεται f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(2) = 0$, $f'(0) = 0$ και $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο και η μέγιστη τιμή της είναι θετικός αριθμός.

β) Αν $f(x) = -x^2 + 4$ και $g(x) = -x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε :

i) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^x f(x)\, dx$

ii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} f(x)$

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f και C_g .

143. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^{2025} + 2x - 5$

α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα x’x και τον άξονα y’y .

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)\eta\mu x_0 + f(x_0)\sigma\upsilon\nu x_0 = 0$$

144. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x - 2$

α) Να δείξετε ότι ορίζεται η συνάρτηση f^{-1} και να υπολογίσετε το $\int_{-1}^{e} f^{-1}(x)\, dx$

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^3 f(x^2 + 1)\, dx$

145. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x + kx - 1$.

α) Αν η εφαπτομένη της C_f στο $A\big(0, f(0)\big)$ είναι παράλληλη στην $y = 3x + 21$ να βρείτε το k.

β) Αν $k = 2$, να δείξετε ότι η $y = 2x - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

γ) Αν k = 2 να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα x'x .

δ) Αν k = 2 να δείξετε ότι υπάρχει αρνητικός αριθμός x_0 για τον οποίο ισχύει $f(x_0) = -2025$.

ε) Αν k = 2 να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο $\mathrm{A}\big(0, f(0)\big)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την (ε) και την ευθεία x = 1

146. α) Αν η ευθεία $y = 2x + 2$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^x - \dfrac{1}{2}x^2 + \alpha x + \beta$ στο σημείο $\mathrm{A}\big(0, f(0)\big)$ να βρείτε τα α, β .

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

ii) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα η οποία είναι αρνητική .

iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)\eta\mu x - 2\eta\mu x}{x^2}$

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες x = 0 , x = 1 .

147. α) Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$x f'(x) + f(x) = 2x$ για κάθε $x \neq 0$, $\big(f(1)\big)^{2019} + f(1) = 2^{2019} + 2$

και $e^{f(-1)} + f(-1) = \dfrac{1}{e^2} - 2$. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

β) Δίνεται η $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα .

iii) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες .

iv) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

v) Αν $\alpha \in (-2,2)$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \alpha$ είναι αδύνατη.

vi) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον x'x , την x=1 και την x=2.

148. Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0)=0$, $f(3)=18$ και $f'(x)\neq 2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα κοινό σημείο της C_f με την ευθεία $y=2x+4$.

Αν επιπλέον γνωρίζετε ότι $f(x)=\frac{1}{3}x^3+3x$ και $h(x)=e^x f(x)$ τότε :

β) Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η C_h .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_h , τον x'x και την ευθεία x=1

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $h'(x_0)=e^2 f'(x_0)$

149. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f''(x)-f'(x) = x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Η ευθεία $y=x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο της $\mathrm{O}(0,0)$.

α) Να υπολογίσετε τα $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}$

β) Να δείξετε ότι $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f .

ε) Δίνεται η $g(x) = x f'(x)+x^2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g , τον x'x και την ευθεία x = - 1 .

150. α) Αν f συνεχής στο 3 και $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=1$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(3,f(3))$.

Δίνεται επιπλέον ότι $f(x)=\frac{\ln(x-2)}{x-2}$, $x\in(2,+\infty)$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες.

δ) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο.

ε) Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x = 4 και x=5 , να δείξετε ότι $\mathrm{E}<\frac{1}{e}$.

151. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)-f(x)=x^2-2x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

και $e^{f(0)}+f(0)=e^2+2$.

α) Να δείξετε ότι $f(0)=2$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)+x^2-1}{e^x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-x^2+1$

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα x_o , η οποία είναι αρνητική.

ε) Αν x_o η ρίζα της f , να αποδείξετε ότι $\int_{x_o}^{0} f(x)dx < 4$.

152. Δίνεται f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ και $f^3(x)+f(x)=x+10$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα .

γ) Να βρείτε το $f'(0)$ και να δείξετε ότι για κάθε $x>-10$ ισχύει $f(x)\le \dfrac{1}{13}x+2$.

δ) Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις

ευθείες x=0 και x=1 , να δείξετε ότι $E<\dfrac{53}{26}$.

ε) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια :

i) να βρείτε την f^{-1} ii) να υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_{-10}^{f^{-1}(1)} f(x)\, dx$

153. Αν F είναι μια παράγουσα της f στο R, τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση G (x) = $\dfrac{1}{\alpha}$ F (αx + β)

είναι μια παράγουσα της h (x) = f (αx + β) , $\alpha\neq 0$ στο R.

154. α) Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι $\int_{\alpha+\gamma}^{\beta+\gamma}$ f (x - γ) dx $=$ $\int_{\alpha}^{\beta}$ f (x) dx.

β) Αν f συνεχής στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι $\int_{\alpha-\gamma}^{\beta-\gamma} f(x+\gamma)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$

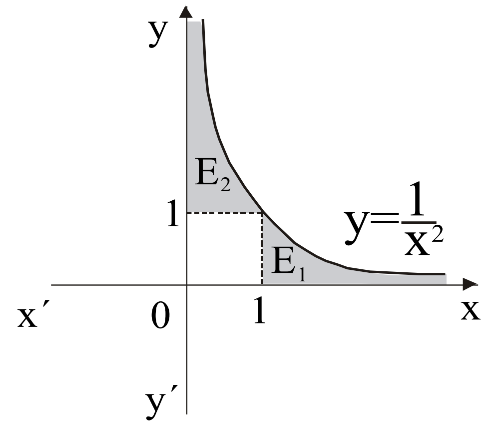
γ) Να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία των παραπάνω.

155. α) Στο διπλανό σχήμα να εκτιμήσετε τη σχέση που φαίνεται να έχουν τα εμβαδά E_1, E_2.

β) Προσπαθήστε τώρα να ελέγξετε τα συμπεράσματά σας με αυστηρά μαθηματικό τρόπο, π.χ.:

για το E_1: θεωρήστε λ>1 και υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\int_1^{\lambda}\frac{1}{x^2}\,dx$

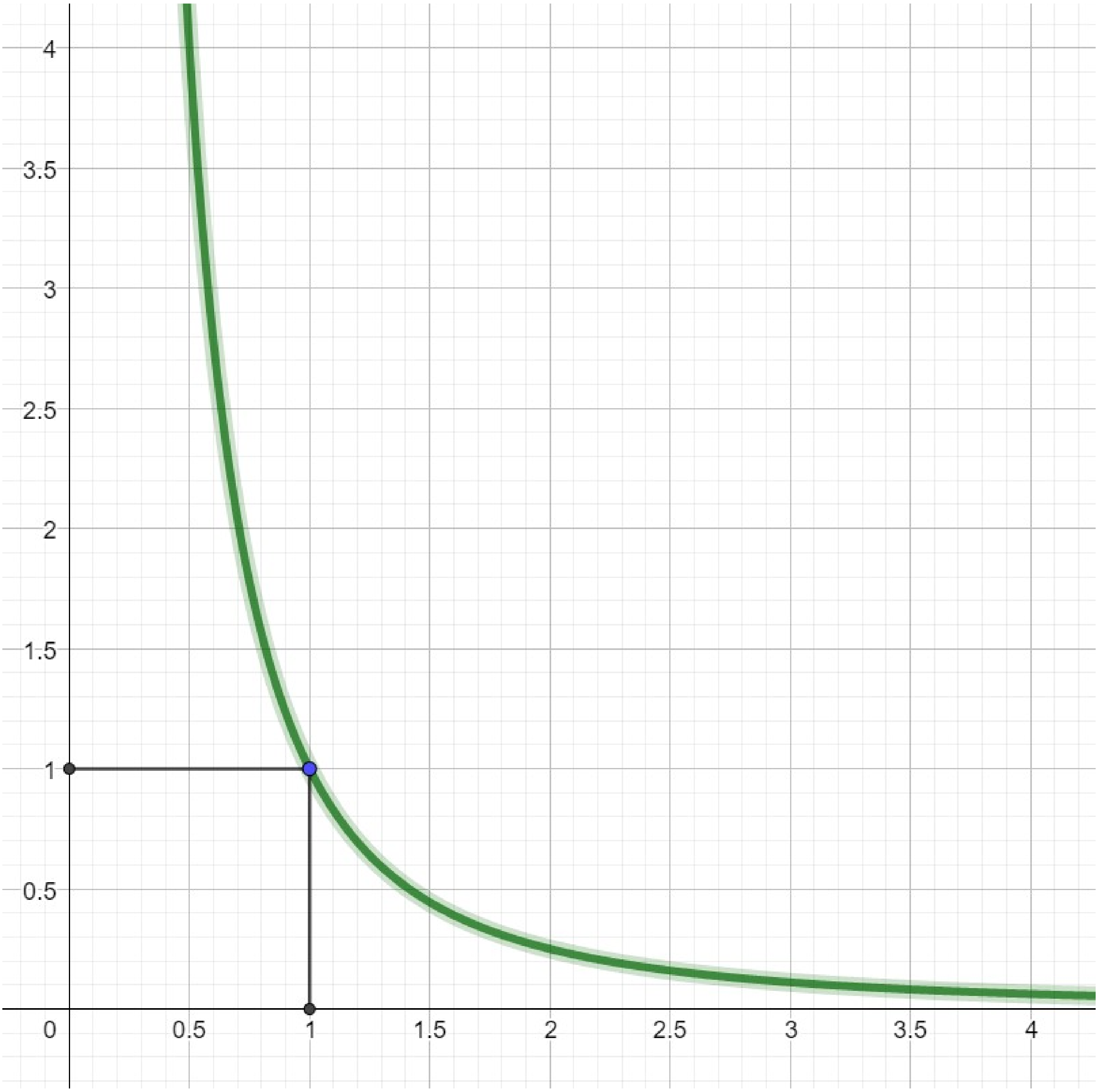
και για το E_2: $0<\lambda<1$ και υπολογίστε το $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\int_{\lambda}^{1}\frac{1}{x^2}\,dx$.

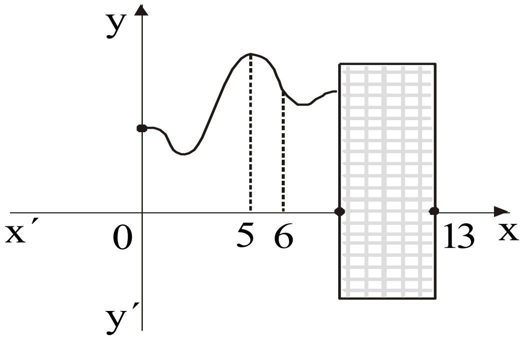


Είναι συμβατά τα όσα είχατε υποθέσει στο ερώτημα (α) με τα αποτελέσματα του ερωτήματος (β);

Παρακάτω φαίνεται ένα πολύ μικρό μέρος της γραφικής παράστασης της $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$

Δείχνει ότι τα E_1 και E_2 είναι διαφορετικά. Όμως το ερώτημα β) δείχνει ότι είναι πολύ διαφορετικά.



156. Ένα μέρος της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f έχει καλυφθεί από μια αδιαφανή ετικέτα. Η f είναι ορισμένη στο [0, 13] και έχει παράγωγο οποιασδήποτε τάξεως. Να εκτιμήσετε τα πρόσημα των παρακάτω παραστάσεων: α) $\int_5^{12} f'(x)\,dx$ β) $\int_0^{13} f(x)\,dx$ γ) $\int_5^{6} f''(x)\,dx$	

157. α) Η εφαπτομένη του διαγράμματος μιας συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη x = α σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{\pi}{3}$ και στο σημείο με τετμημένη x = β γωνία $\frac{\pi}{4}$. Αν η f΄΄ είναι συνεχής στο [α, β], να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_\alpha^\beta f''(x)\,dx$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \cdot x^2 + \sqrt{3} \cdot x$

i) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη του διαγράμματος της συνάρτησης f στο σημείο με τετμημένη x = 0 σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\frac{\pi}{3}$ και στο σημείο με τετμημένη x = 1 γωνία $\frac{\pi}{4}$.

ii) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο σε θέση x_0 με $x_0 \in (2,3)$.

158. α) Αν η συνάρτηση f, που είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα [α, β], με συνεχή δεύτερη παράγωγο, στρέφει τα κοίλα άνω και είναι γνησίως αύξουσα, να βρεθεί το πρόσημο της παράστασης: $\int_\alpha^\beta f''(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f'(x)\,dx$

β) Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot e^x + \beta \cdot x$. Αν είναι γνωστό ότι η ευθεία $y = 3x + 2$ εφάπτεται της C_f στο $A\big(0, f(0)\big)$, να υπολογίσετε τις τιμές των α, β.

γ) Αν $f(x) = 2 \cdot e^x + x$ τότε :

i) να δείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω και είναι γνησίως αύξουσα.

ii) να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii) να δείξετε ότι η f έχει μια μόνο ρίζα x_0 η οποία είναι αρνητική.

iv) να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτες της C_f .

δ) Το $B(0,3)$ είναι σημείο της γραφικής παράστασης μιας παράγουσας F της $f(x) = 2 \cdot e^x + x$

i) Να βρείτε την F .

ii) Να δείξετε ότι η F παρουσιάζει ελάχιστο σε θέση x_0 με $x_0 \in (-1,0)$.

iii) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 F(x)\,dx$

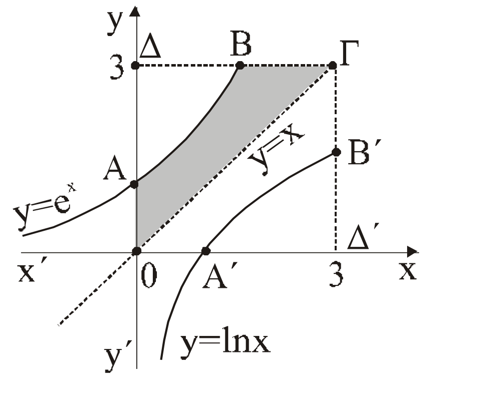
159. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = $\begin{cases} \frac{1}{x^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι προφανώς ορισμένη σε όλο το R και παίρνει θετικές τιμές ή μηδέν. Υπολογίζουμε το $I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -2 < 0$.

Αυτό όμως είναι αδύνατο, αφού f (x) $\geq$ 0. Πού βρίσκεται το λάθος;

160. α) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Α΄Β΄Δ΄.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου.

γ) Μπορείτε να υπολογίσετε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου με δεύτερο τρόπο ;



161. Δίνεται η συνάρτηση f (x) = $1 + \frac{1}{x^2}$.

α) Να μελετηθεί και να παρασταθεί γραφικά.

β) Να αποδείξετε ότι $\frac{5}{4} \leq \int_{1}^{2} f(x)\,dx \leq 2$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 2 και x = 4.

δ) Να προσδιορίσετε την κάθετη ευθεία στον άξονα x΄x που χωρίζει το χωρίο του προηγούμενου ερωτήματος σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

162. Δίνεται η συνάρτηση f(x) = |x - 3| + x + 2.

α) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα $x_1 = 3$ και $x_2 = 4$

β) Μπορούμε να εφαρμόσουμε Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[3,4]$;

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f'(x) = 2$

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^4 f(x)\,dx$

163. α) Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει η σχέση:

f (2 + x) − f (2 - x) = − 2x για κάθε x $\in$ R.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο (2, f (2)) είναι κάθετη στην ευθεία y = x.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{4}x^2$

i) Να δείξετε ότι ισχύει f (2 + x) − f (2 - x) = − 2x για κάθε x $\in$ R.

ii) Να υπολογίσετε τη διαφορά: $\int_0^{\sqrt{21}} f(2+x)\,dx - \int_0^{\sqrt{21}} f(2-x)\,dx$

164. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = -2x + ln\,2x$

i) Να μελετήσετε τις f, g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f , C_g , την x=1 και την x=2.

iii) Αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης μιας τυχαίας εφαπτομένης της C_g να δείξετε ότι $\lambda > -2$.

iv) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x + 1$ (εφόσον υπάρχει), σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) έχει συντελεστή διεύθυνσης λ = 3.

β) σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x΄x.

γ) είναι παράλληλη στην ευθεία y = x + 4.

δ) είναι κάθετη στην ευθεία y = $-\frac{1}{2}$ x + 3.

ε) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

στ) άγεται από το σημείο (- 1, 0).

165. Ένα πολυώνυμο P (x) ικανοποιεί τη σχέση P (x) = P ΄ (x) + x^3.

α) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου.

β) Να βρείτε το πολυώνυμο P (x).

γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των πραγματικών ριζών του.

δ) Να βρείτε το πρόσημο των ριζών του.

ε) Αν $P(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 6$, να υπολογίσετε το $\int_1^2 \frac{P(x)}{x^2}\,dx$

166. α) Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο + ∞ την ευθεία y = 5x + 1,

να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 + x \cdot ημx}{x^2 \cdot f(x) - 5x^3}$.

β) Αν $f(x) = e^{-x} + 5x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε :

i) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο σε $x_0 < 0$.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την C_f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες x = 0 και x = 1.

167. α) Για ποιες τιμές του κ η συνάρτηση f (x) = x^3 + κx^2 + 1 έχει σημείο καμπής για x = 1;

β) Αν $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ τότε :

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς 3 ρίζες οι οποίες ανήκουν στο διάστημα $(-1,3)$

iii) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^{\pi} f(x) \cdot ημx$ dx

168. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+\lambda$ και το $\mathrm{A}(0,3)$ που είναι ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(e^{x}-21\right)<3$

δ) Να εξετάσετε αν η ευθεία $y=1$ τέμνει την C_f.

ε) Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα: i) $\int_3^4 f^{-1}(x)\,dx$ ii) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x)\cdot \sigma\upsilon\nu x\ dx$

169. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ;

β) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ;

γ) Να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

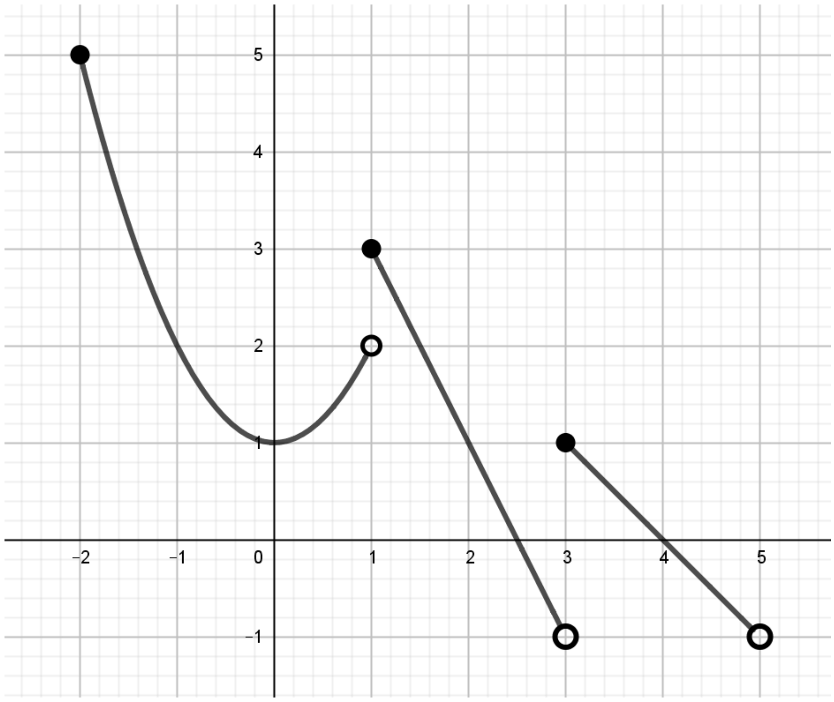
δ) Να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$

ε) Ποιες είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x)>1$;

στ) Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες ορίζεται το $\int_1^{\alpha} f(x)\,dx$



170. i) Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f\left(f(x)\right)=x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii) Αν f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η $h=f-g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

iii) Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=x+3$ και $g(x)=e^{-2x+1}-e+3$.

α) Να βρείτε την g^{-1}.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)-g(x)=0$.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f, C_g, την x$=-1$ και την x$=1$.

171. α) Δίνεται η συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x^2-1}+\alpha x+\beta & , \quad x>1 \\ \\ \dfrac{2\eta\mu(x-1)}{x-1}+3x-12\alpha & , \quad x<1 \end{cases}$

Αν $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = -1$ να υπολογίσετε τα α, β .

β) Δίνεται η συνάρτηση : $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+1}\ -2}{2x^2-18} & , \quad x>3 \\ \\ \dfrac{\gamma}{x^2+1}+\dfrac{x}{2} & , \quad x\le 3 \end{cases}$

Αν $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = 1$, να υπολογίσετε το γ και να εξετάσετε

αν υπάρχει το όριο $\lim\limits_{x\to 3} g(x)$.

γ) Αν $\alpha=\dfrac{1}{2}$, $\beta=-3$, $\gamma=-5$ τότε :

i) να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to 2}\left(f(x)+g(x)\right)$

ii) να υπολογίσετε το $\int_0^1 x\cdot g(x)\ dx$

iii) να υπολογίσετε το $\int_2^3 f(x)\,dx$

172. Δίνεται η γραφική παράσταση συνάρτησης f .

Να βρείτε :

α) το πεδίο ορισμού της f

β) το σύνολο τιμών της f

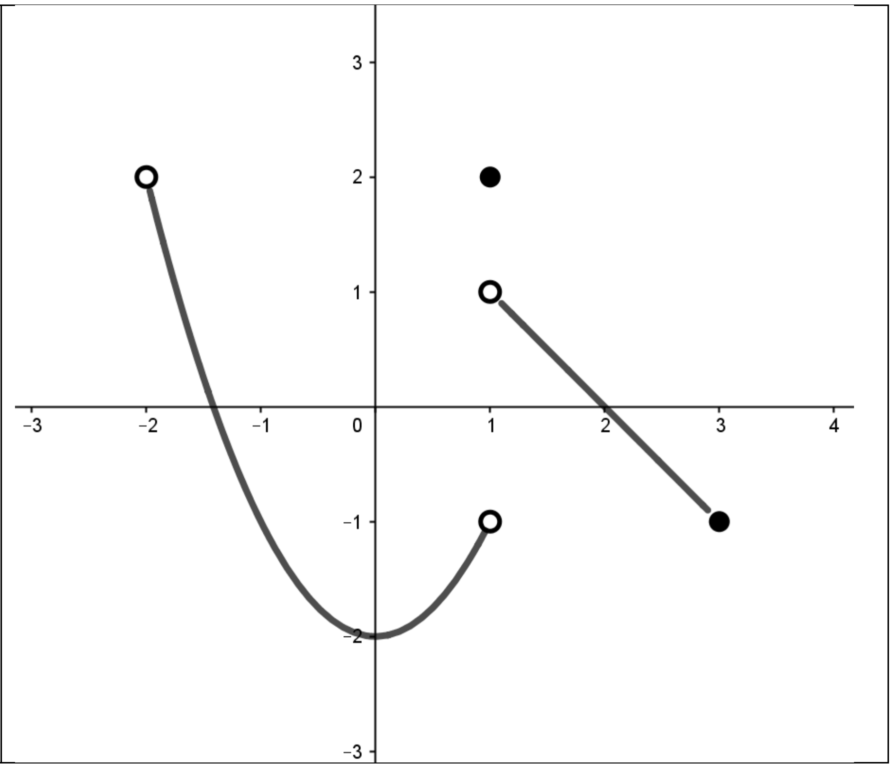
γ) το πλήθος των ριζών της f

δ) τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

ii) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$

ε) την τιμή του $\int_2^3 f(x)\,dx$



173. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta & , \ x\in[-2,1] \\ (\beta+1)x+4\alpha & , \ x\in(1,2]\end{cases}$

α) Αν $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 1$ και $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = -1$,

να υπολογίσετε τα α,β .

β) Αν $\alpha=-1$ και $\beta=2$ τότε :

i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

ii) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ;

iii) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{f(x)+x}{\sqrt{-x}-1}$

iv) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}\left(\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^1 f(x)\,dt\right)$

174. α) Αν $\left|x^2 f(x)-\eta\mu^2 x\right|\le 2x^4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x f(x)-\eta\mu 4x}{x+\eta\mu x}$

β) Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(f(x)-1\right)^2\eta\mu\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(f(x)\right)^3+f(x)-2}{\sqrt{f(x)}-1}$

γ) Αν $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ και $\lim\limits_{x\to 0}\left(3f(x)g(x)+x^{21}-60\right)=3$

i) να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

ii) να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\left(\int_0^1 f(x)\,dt+\int_0^1 4t\,dt\right)$

175. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$f(0)=1$, $f(1)=e^2$ και $f'(x)=2\cdot f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\,dx$

γ) Αν $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι :

i) η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ ii) η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$

δ) Αν $f(x)=e^{2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε την αντίστροφη της f

176. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$\left(f(x)\right)^3+e^{f(x)}-1 = x \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} .$$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται .

β) Να βρείτε την αντίστροφη της f .

γ) Αν $f^{-1}(x)=x^3+e^x-1$ και $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x\sqrt{x}-1}{x-1}+\alpha x+\beta &, \quad x>1\\ 2\alpha x-\beta+f(0) &, \quad x\leq 1\end{cases}$

τότε :

i) να βρείτε το πρόσημο της f^{-1} για τις διάφορες τιμές του x .

ii) να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f^{-1}(x)-e^x}{\eta\mu(x-1)}$

iii) να βρείτε τις τιμές των α,β ώστε να ισχύει : $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=\dfrac{7}{2}$

iv) να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα x΄x , την ευθεία $x=-1$ και την ευθεία $x=1$.

177. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x} &, \quad x>2\\ \alpha x+\beta &, \quad 1\leq x\leq 2\\ x^2-3 &, \quad x<1\end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x) = 2$

β) Να υπολογίσετε τα α,β ώστε να υπάρχουν τα όρια :

$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

γ) Για κάθε $x\in(2,+\infty)$ να δείξετε ότι : $f(x)=1+\dfrac{2}{x}$

δ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2,+\infty)$.

ε) Αν $\alpha=4$ και $\beta=-6$ να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες συντεταγμένων .

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα x΄x , την ευθεία $x=3$ και την ευθεία $x=4$.

178. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+x-2$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και στη συνέχεια να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

β) Να λύσετε την ανίσωση : $x^{12}+x^4 < 16^3+16$

γ) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\eta\mu(x-1)}$

δ) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\eta\mu(f(x))\cdot(x-1)}{(f(x))^2}$

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x΄x , την ευθεία $x=-1$ και την ευθεία $x=1$.

179. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

f γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\sqrt{5}\right]$, f γνησίως αύξουσα στο $\left[\sqrt{5}\,,+\infty\right)$

$f(1)=f(3)=0$ και f άρτια .

α) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο .

β) Αν $f(x)=(x^2-1)(x^2-9)$ τότε :

i) να δείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται .

ii) να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3} f(x)\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-3}\right)$

iii) να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x+1}-2}$

iv) να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x΄x , την ευθεία $x=0$ και την ευθεία $x=2$.

180. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x+\beta+2 & , \ x\geq 1\\ \beta x+3\alpha & , \ x<1\end{cases}$ με $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$

α) Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=-1$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να εξετάσετε αν είναι 1-1 .

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f και να βρείτε την ελάχιστη τιμή της.

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)\,\mathrm{dx}$

181. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=x^7+x^5+x-3$ και $g(x)=e^{1-x}-1$.

α) Να δείξετε ότι οι f και g αντιστρέφονται .

β) Να δείξετε ότι για $x<1$ ισχύει $f(x)<0$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{\eta\mu(x-1)}$

δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g

έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο .

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\left[|f(x)|\eta\mu\left(\dfrac{1+x^2}{f(x)}\right)\right]$.

στ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 2x\cdot f(x)\,dx = -\int_0^1 x^2\cdot f'(x)\,dx$

182. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{-x^2+x+1}{1-x}$, $x\in(1,+\infty)$

α) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)$ και $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1^+}\left[\left(\sqrt{x}-1\right)f(x)\right]$

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=x+\dfrac{1}{1-x}$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$.

δ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται .

ε) Να υπολογίσετε το $\int_2^3 f(x)\,dx$

183. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(1-x)$ και $g(x)=e^{2-x}$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f\circ g$, να δείξετε ότι είναι 1-1 και να βρείτε την αντίστροφή της

β) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της $(f\circ g)^{-1}$ έχει σημείο τομής με τον x΄x .

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{f(x)}}{\sqrt{3x+1}-2}$

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x}{x\,f^2(x)}$

ε) Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^0 f(x)\,dx$

184. Για την συνάρτηση f ισχύει $x^4+x^3<xf(x)<x^3+x^2$ για κάθε $x\in(0,1)$.

α) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$

β) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{f(x)}$

γ) Να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\eta\mu^2 f(x)}{f(x)}$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\eta\mu f(x)}{f^2(x)}$

δ) Δίνεται η $g(x)=\dfrac{\left(f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{5}{8}\right)x^3 + x}{\left(f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{3}{4}\right)x^2 + 1}$

Αν το όριο $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to f\left(\frac{1}{2}\right)} \dfrac{x-1}{\left(x-\frac{5}{8}\right)^2}$

ε) Αν $0<\alpha<\beta<1$ να δείξετε ότι : $\frac{\beta^4-\alpha^4}{4}+\frac{\beta^3-\alpha^3}{3} < \int_\alpha^\beta f(x)\,dx < \frac{\beta^3-\alpha^3}{3}+\frac{\beta^2-\alpha^2}{3}$

185. Δίνονται συναρτήσεις f , g για τις οποίες είναι γνωστά τα παρακάτω :

i. $g(2x-1)+2f(x) = g(1-x)+f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$
ii. H g είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.
iii. $f(1+f(x)) - f\left(e^{x-2}+3x-6\right)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

γ) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο .

δ) Να λύσετε την εξίσωση : $g\left(2016+f\left(x^{21}+x\right)\right) = g(2016)$.

ε) Να λύσετε την ανίσωση : $g(3)<g\left(f^{-1}\left(e+e^x\right)\right)$.

στ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\,dx$

186. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$f(x+1)+f(2x) = 5x^2+2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(2,f(2))$.

β) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\int_0^1 f(x+1)\,dx + \int_0^1 f(2x)dx$

187. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x)=\frac{3}{2-x}-\frac{4}{4-x^2}$ και $g(x)=\sqrt{x^2+1}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο : $\lim_{x\to 2} f(x)$.

γ) Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim_{x\to -\infty}(g(x)+2x)$ και $\lim_{x\to -\infty}(g(x)+x)$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x\to -\infty}\frac{|x^2-5x|+x}{g(x)}$

ε) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 (2-x)\cdot f(x)\,dx$

188. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{(\mu^2-4)x^3+(\mu-2)x+1}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$.

i) Για τις διάφορες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to +\infty} f(x)$.

ii) Αν $\mu=2$ τότε :

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

β) Να λύσετε την εξίσωση : $f(x)+e^{-x}-2=0$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\,dx$

189. α) Αν $\lim_{x\to -\infty}\frac{f(x)}{x}=2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x\to -\infty}\frac{3x-2f(x)}{f(x)+5x+1}$

β) Αν $f(x)=2x+4$ τότε :

i) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{\frac{f(x)}{2}}-\sqrt{2f(x)}\right)$

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{x+2})-f(-x-1)<0$

iii) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{(x+2)^3}$

iv) Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to -2}\frac{f(x)}{\sqrt{x+3}-1}$

v) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 \frac{f(x)}{x}\,dx$

190. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x-2} & , \quad x\in(-\infty,2) \\[2ex] \dfrac{x^2-16}{x-4} & , \quad x\in[2,4) \\[2ex] \sqrt{x^2+x+1} & , \quad x\in[4,+\infty) \end{cases}$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-21x\right)$

γ) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)$

δ) Για τις διάφορες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\left(\mu x^2+x+1\right)f(x)\right]$

ε) Να υπολογίσετε το $\int_2^3 f(x)\,dx$

191. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{16\sqrt{x}-16\alpha}{x^2-4x} & , \quad x>4 \\[2ex] \alpha x+\beta & , \quad x\le 4 \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

β) Αν $\alpha=2$ και $\beta=-7$ τότε να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to\frac{7}{2}}\dfrac{f(x)}{\left(x-\frac{7}{2}\right)^3}$

ii) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}-1}$

iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)\eta\mu\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\right]$

iv) $\lim\limits_{x\to0}\left[x^2\,\eta\mu\left(\dfrac{1}{f(x)}\right)\right]$

γ) Αν $f(x)=2x-7$ για κάθε $x\le 4$, να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{f(x)}\,dx$ ii) $\int_0^1 \ln x\cdot f(x)\,dx$

δ) Έστω $f(x)=2x-7$ και $g(x)=ln\,x$ για $x\in(0,4]$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,4)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)\cdot g(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)=0$

192. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x+1}-e$

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη της f.

β) Να λύσετε την εξίσωση $x^3 + f(x) = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^3 - x^6 < f(x^2) - f(x)$

δ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{(e^{2x}-1)x^2}$

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x , την ευθεία $x=-2$ και την ευθεία $x=-1$.

στ) Να υπολογίσετε το $\int_0^{e^2-e} f^{-1}(x)\,dx$

193. i) Έστω συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(0)+e^4+1=f(2)$ και $f(0)+f(2)=(e^2-1)^2$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο τομής της C_f με τον $x'x$.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $e^{2x}+x=e^2+1$.

iii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+x-e^2-1$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της f στο $(0,2)$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f και τους άξονες συντεταγμένων.

194. Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & , \ x<-1 \\ \alpha x^2+\beta & , \ x\in[-1,2] \\ \dfrac{\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+2}\ -2} & , \ x>2 \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε τα α,β .

β) Να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2,7)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$.

δ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $\int_{-3}^{-2} f(x)\,dx + \int_0^1 f(t)dt$

195. i) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ συνεχής με $f(21)<21$ και $(f(x)-x)^2=x^2+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε την f.

ii) Έστω $f(x)=x-\sqrt{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,\sqrt{3})$ τέτοιο ώστε $2f(x_0)-\sqrt{3}+3=0$.

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

δ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+f(x)}{x}$

ε) Να δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta (f(x)-x)^2dx = \frac{\beta^3-\alpha^3}{3}+\beta-\alpha$

196. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=xe^x$ και η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$x+1\le f(x)\le x^2+x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το $f(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $\mathrm{A}(0,g(0))$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

ε) Να δείξετε ότι: $\int_{-1}^{0} g(x)\,dx < \int_{-1}^{0} f(x)\,dx < \frac{5}{6}$

197. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x-3} , & x>3\\ 2^x-10 , & x\le 3\end{cases}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=\sqrt[3]{21}+\sqrt{21}+21$

ε) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}\cdot f(x)\right)$.

στ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\,dx$

198. Δίνεται η παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta & , x<1\\ 2x+1 & , x\geq 1\end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=2$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $\mathrm{A}(1,f(1))$.

γ) Έστω g συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $g(-2)=11$ και $g(-3)=6$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο τομής των C_f και C_g το οποίο έχει τετμημένη στο διάστημα $(-3,-2)$.

δ) Δίνεται συνάρτηση h με $h(x)<\eta\mu x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $f(x)\neq h(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Για τις διάφορες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mu x^3+21x^2}{f(x)}$

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα x΄x , την ευθεία $x=0$ και την ευθεία $x=2$.

199. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-3e^{2x+1}-5x+3$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο, το οποίο έχει αρνητική τετμημένη.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην $y=\dfrac{1}{11}x+21$

ε) Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη.

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την εφαπτομένη της στο $A\left(-\frac{1}{2},f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ και την ευθεία $x=-1$.

200. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f'(x)-f(x)=x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x)=f(x)+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Αν $f(x)=e^x-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε:

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Αν $\alpha<\beta$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>\beta-\alpha$

iii) Να δείξετε ότι $f(x)>\eta\mu(5x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

201. i) Αν f παραγωγίσιμη σ΄ όλο το $\mathbb{R}$ και $f\left(x^2-1\right)=x^4-2x^2+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}\left(3,f\left(3\right)\right)$.

ii) Αν $f\left(x\right)=x^2+1$ τότε:

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-8x+21$

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f οι οποίες διέρχονται από το σημείο $\mathrm{E}\left(0,-3\right)$

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(x\right)-1}{f\left(x^3\right)-1}$

δ) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την εφαπτομένη της στο $A\big(1,f(1)\big)$ και τον άξονα $y'y$.

202. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f\left(x-h\right)-f\left(x\right)=-2h$ για κάθε $x,h\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σ΄ όλο το $\mathbb{R}$ με $f'\left(x\right)=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0-h\right)}{h}=4$

γ) Αν g συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g\left(x\right)}{x}=42$, να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 και στη συνέχεια ότι ισχύει $g'\left(0\right)=21\cdot f'\left(21\right)$

δ) Αν $f\left(x\right)=2x+21$ και $g\left(x\right)=42e^x-42$ να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,1\right)$ τέτοιο ώστε $f\left(x_0\right)=g\left(x_0\right)$.

ε) Αν $f\left(x\right)=2x+21$ τότε:

i) να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια: $\lim\limits_{x\to -11}\frac{1}{f(x)+1}$ και $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{1}{f(x)+1}$

ii) να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{1}{f(x)+1}\,dx$

203. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\,dx$

γ) Αν $2<\alpha<\beta<\gamma$ να δείξετε ότι $\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}<\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$

δ) Για τις διάφορες τιμές του $k\in\mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=k$

204. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\sqrt{x}$ και $g(x)=21-e^{x}$.

α) Να βρείτε τη συνάρτηση $f\circ g$.

β) Να δείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

γ) Να δείξετε ότι οι C_f και C_g δεν έχουν παράλληλες εφαπτόμενες.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη

στην ευθεία $4y-x-21=0$.

ε) Ένα κινητό ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της C_f.

Τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο $\mathrm{A}(4,2)$ ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης

του είναι 1 cm/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του όταν διέρχεται

από το $\mathrm{A}(4,2)$.

στ) Να υπολογίσετε το $\int_0^{16}(f\circ f)(x)\,dx$

205. i) Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x)>1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν $f(-3)=5$, $f(-3)\cdot f(-1)<0$, $f(21)>21$, να δείξετε ότι η C_f

έχει ακριβώς 2 κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

ii) Αν $1\le g'(x)\le 2$ για κάθε $x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$ και $g(1)=0$, να δείξετε ότι $-1\le g\left(\frac{1}{2}\right)\le -\frac{1}{2}$

iii) Αν $f(x)=x^2-4$ και $g(x)=\ln x$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη με την

εφαπτομένη της C_g στο σημείο τομής της με τον $x'x$.

β) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f,

την εφαπτομένη της στο $A(1,f(1))$ και τον άξονα $y'y$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)g(\xi)=-f(\xi)g'(\xi)$

206. Δίνεται $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f''(x)<0$ για κάθε x<0 , $f''(x)>0$ για κάθε x>0 και $f'(0)=f(0)=0$

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$ και το $O(0,0)$ είναι σημείο καμπής της C_f

β) Αν $f(x)=x\cdot ln(x^2+1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)dx$

207. i) Αν η παράγωγος της f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$ και $\alpha<\beta<\gamma<0$

α) Να δείξετε ότι $(\gamma-\beta)(f(\beta)-f(\alpha)) < (\beta-\alpha)(f(\gamma)-f(\beta))$

β) Να δείξετε ότι $f'(\alpha)-f'(\beta)<\beta^3-\alpha^3$

ii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\dfrac{1}{x}-21$, $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς δυο κοινά σημεία με τον $x'x$.

γ) Εξετάστε αν η f είναι 1-1 .

δ) Υπολογίστε το άθροισμα: $\int_1^2 f(x)dx$ + $\int_1^2 f'(x)dx$

208. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+1$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να δείξετε ότι η f έχει μια αρνητική και δυο θετικές ρίζες.

δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y=9x$.

ε) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 21}\dfrac{f(x-21)-1}{x-21}$

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x΄x , την ευθεία $x=2$ και την ευθεία $x=3$.

209. Δίνεται η $f(x)=e^{x-1}-2\ln x+x$ και συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $g(\mathbb{R})=\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g^3(x)+g(x)=-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=ex+21$.

γ) Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα .

δ) Να δείξετε ότι οι C_f και C_g δεν έχουν κοινά σημεία.

ε) Να υπολογίσετε: i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g^{-1}(x)}{\eta\mu x}$ ii) $\int_{-1}^{0} g^{-1}(x)\,dx$

210. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x\,f'(x) = f(x)+x \quad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty) \quad \text{και} \quad f(1)=0$$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=x\ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=21$.

δ) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f(x+3)+f(x+1)>2f(x+2)$

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,21)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)(\xi-21)^4+4f(\xi)(\xi-21)^3 = 0$$

στ) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)\,dx$

211. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία .

β) Βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha$

για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$.

δ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f

που είναι παράλληλες στην ευθεία $16y+x+21=0$

ε) Αν $1<\alpha<\beta$ να δείξετε ότι $\alpha\beta f'(\alpha)-\beta < \alpha\beta f'(\beta)-\alpha$

στ) Να υπολογίσετε το $\int_2^3 f(x)\,dx$

212. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{2+\ln x}{x+1}$ και $g(x)=e^x-x+1$

α) Να μελετήσετε τις f και g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχει κοινό σημείο των C_f και C_g

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $2g(x_0)=5-2x_0$

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)=\dfrac{1-2x_0}{2x_0}$

ε) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 g(x)\,dx$

213. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(21)>21$ και

$f^2(x)-2xf(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=x+\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να δείξετε ότι $f'(x)<f'(x+1)+e^x(e-1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ε) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x^{21}+21\cdot x}$

στ) Να δείξετε ότι $\int_0^1 f(x)\,dx > 1$

214. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{(1-x)\ln x}{x}$

α) Να δείξετε ότι $f'(x)=\dfrac{1-x-\ln x}{x^2}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)\,dx$

δ) Να δείξετε ότι η $h(x)=x^3+x-2$ είναι 1-1 .

ε) Δίνεται συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

με $g^3(x)+g(x)=e^x-x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i) Να βρείτε το ακρότατο της g .

ii) Να εξετάσετε αν έχουν κοινό σημείο οι C_f και C_g .

215. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=2e^x+x^2+\alpha x-6$ για την οποία ισχύει $f(x)+4\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=-2$.

β) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς 2 ρίζες.

δ) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x+3)+2f(x) > 3f(x+1)$.

ε) Να δείξετε ότι $f(x)+x^{2020}+21>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

στ) Αν $\alpha<\beta$ να δείξετε ότι: $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq 4a-4\beta$

216. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $g(x) = xf(x) - 5x$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ έχει εξίσωση $y = 18x - 31$.

α) Να υπολογίσετε τα $f(2)$ και $f'(2)$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$.

γ) Αν $f''(x) = 12x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε τον τύπο της f.

δ) Δίνεται ότι $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f.

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 21$.

iv) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2}\, dx$

217. Δίνεται η $f(x) = \alpha x + \dfrac{\beta}{x^2}$ και η ευθεία $y = 9x - 12$ που είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -4$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

ε) Αν $g(x) = (x^2 - 3x + 2) f(x)$ να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $g''(\xi) = 0$.

στ) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)\, dx$

218. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και

$(x^2 + 1) f'(x) + 2x f(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

δ) Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|4 f(\alpha) f(\beta)| \le 1$.

ε) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

στ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\, dx$

219. α) Αν $f'(x)f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$,

να δείξετε ότι η f έχει ακρότατο.

β) Αν $f'(x)f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$, να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Αν $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ και $g(x)=x-f(x)$ τότε :

i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
ii) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.
iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.
iv) Αν $\alpha<\beta$ να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta}\big(f(x)+g(x)\big)dx = \frac{(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)}{2}$

220. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\dfrac{\beta}{x}$ και η ευθεία (ε) : $y=-3x+8$

η οποία εφάπτεται της C_f στο $\mathrm{A}(1\,,\,f(1))$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=x+\dfrac{4}{x}$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

γ) Έστω $g(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+x+3$. Να δείξετε ότι $|f(x)|\geq 4$ και $|f(x)|>g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

ε) Να σχεδιάσετε την C_f.

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται

από την C_f και τις ευθείες $y=x$, $x=1$, $x=2$.

221. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+\alpha x+\beta$ και η ευθεία $y=x$ που είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=0$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Δίνεται η $g(x)=-e^{-x}+\dfrac{1}{2}x^2$.

i) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία .
ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g.
iii) Να δείξετε ότι η g έχει ακριβώς μια ρίζα x_0 για την οποία ισχύει $0<x_0^{21}<1$.
iv) Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
v) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 g(x)\,dx$

222. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=f(x)+e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2 f(x)-f(x)}{x-1}=2e$

α) Να δείξετε ότι $f(x)=xe^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

δ) Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η C_f.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\sqrt{f(\xi)}-e=0$.

στ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\,dx$

223. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x+10}{x+3}$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Βρείτε (αν υπάρχουν) τις ασύμπτωτες της C_f.

δ) Σχεδιάστε την C_f.

ε) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες x=0 , x=1 .

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f,

τον άξονα x΄x , την ευθεία $x=0$ και την ευθεία $x=1$.

224. Δίνεται η $f(x)=x\cdot\ln\left(9+x^2\right)$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\left(f(x)-21\right)\left(f(x)+2020\right)=0$

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση της

εφαπτομένης της C_f στο $\mathrm{O}(0,0)$.

δ) Να δείξετε ότι $f(x)>\ln 9^x$ για κάθε x>0 και στη συνέχεια αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται

από την C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες x=1 , x=21 , να δείξετε ότι Ε > $\left(\dfrac{21^2}{2}-\dfrac{1}{2}\right)\cdot\ln 9$

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, τον $x'x$ και τις ευθείες x=0 , x=1.

225. Έστω f, g με $f(0)=g(0)$, $f(1)=g(1)+1$ και $f''(x)=g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=g(x)+x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν η g έχει δυο ρίζες α, β με $\alpha < 0 < \beta$, να δείξετε ότι

η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α, β).

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από

τις C_f , C_g και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=\beta$.

δ) Αν $g(x)=(x-\alpha)(x-\beta)$ τότε :

i) Να δείξετε ότι $g(x) \geq -\dfrac{(\beta-\alpha)^2}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g και τον $x'x$

να δείξετε ότι Ε < $\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{4}$

226. Δίνεται η $f(x)=x\ln x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $3f(x)+1=0$.

δ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να σχεδιάσετε την C_f .

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες x=1 και x=2.

227. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)+f(x)=e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $f(0)+\left(f(0)\right)^{21}=0$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=xe^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα και την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών

της εξίσωσης $2ef(x)-1=0$.

δ) Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η C_f και να τη σχεδιάσετε .

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες x=0 και x=1.

228. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\to\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

α) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=x_0$.

β) Αν f παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ και η εξίσωση $f(x)=x$ έχει δυο ρίζες α,β με $\alpha<\beta$

να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην $y=x+21$.

γ) Αν $f(x)=x\cdot\eta\mu x$, $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τότε :

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, τον $x'x$ και την ευθεία $x=\frac{\pi}{2}$.

iii) Αν g συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} g(x)<0$ και $f^2(x)+g^2(x)=x^2$ για κάθε $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$,

να βρείτε την g.

229. Δίνεται η $f(x)=\frac{2}{x}+\frac{4\ln x}{x}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

δ) Να σχεδιάσετε την C_f.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x=1, x=2.

230. Δίνεται η $f(x)=e^x+x-1$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1}, να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να την μελετήσετε ως προς το πρόσημο.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$

και τις ευθείες x=0 και x=e .

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $2f(x_0)=e^2+e+1$

ε) Για κάθε $x>0$ να δείξετε ότι $20f(2x)<f(21x)+19f(x)$

231. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=x\cdot(\ln x-1)$ και συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$x f'(x)= \ln x - f(x) \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty) \text{ και } \lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0 .$$

α) Να δείξετε ότι η g είναι παράγουσα της $h(x)=\ln x$ και να βρείτε

το σύνολο τιμών της συνάρτησης g.

β) Αν $\theta\in(\pi,2\pi)$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g(x)=\eta\mu\theta$.

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1$

δ) Να δείξετε ότι $x^x\geq e^{x-1}$ για κάθε x>0 .

ε) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_1^2 x^x dx > e-1$

232. i) Αν f συνεχής στο 3 και $\displaystyle\lim_{x\to 3}\frac{f(x)}{x-3}=-\frac{1}{3}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(3,f(3))$.

ii) Αν $f(x)=\begin{cases} -x & , \ x<-1 \\ \alpha x^2+\beta x & , \ x\in[-1,0] \\ \dfrac{3}{x}-1 & , \ x>0 \end{cases}$

Να υπολογίσετε τα α,β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο -1 .

iii) Για τις τιμές των α,β που βρήκατε στο προηγούμενο ερώτημα:

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να βρείτε το πλήθος των σημείων τομής της C_f με τον άξονα $x'x$.

γ) Να υπολογίσετε το $\int_{-2}^{0} f(x)dx$

δ) Ένα σημείο $\mathrm{M}(x,y)$ με x<0 κινείται στη C_f , $\mathrm{N}(x,0)$ η προβολή του Μ στον $x'x$ και $\mathrm{O}(0,0)$ η αρχή των αξόνων . Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ είναι ίσος με 2 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΝ τη στιγμή κατά την οποία το Μ έχει τετμημένη -3 .

233. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)-f(x)=x^2-2x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

και $e^{f(0)}+f(0)=e^2+2$.

α) Να δείξετε ότι $f(0)=2$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)+x^2-1}{e^x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x)=e^x-x^2+1$

δ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ε) Αν $g(x)=-\sqrt{x}+\dfrac{3}{2}$, να δείξετε ότι οι C_f και C_g δεν έχουν κοινό σημείο.

στ) Να δείξετε ότι: $\int_{-1}^{0} f(x)dx \ > 1$

234. Δίνεται f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R})=\mathbb{R}$

και $f^3(x)+f(x)=x+10$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

β) Αφού δείξετε ότι υπάρχει , να βρείτε την αντίστροφη της f .

γ) Αν $g'(x)=3x^2+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $g(0)=-10$, να δείξετε ότι $g=f^{-1}$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,\pi)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi)\varepsilon\varphi\xi + g(\xi) = 0$

ε) Για τις διάφορες τιμές των $\mu,\lambda\in\mathbb{R}$ να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\mu x^4+\lambda x^3+x+1}{g(x)}$

στ) Αν $\alpha<\beta$ να δείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f^3(x)\,\mathrm{dx} \ + \ \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \ = \ \frac{(\beta-\alpha)\cdot(\beta+\alpha)}{2}+10(\beta-\alpha)$

235. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{x-2}$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες .

γ) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο .

δ) Αν Ε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες x = 4 και x=5 , να δείξετε ότι $\mathrm{E}<\dfrac{1}{e}$.

236. i) Αν $f(x)=\dfrac{x^3+\alpha x+\beta}{x-1}$ και η $y=-27x$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο $A(0,f(0))$ τότε:

Να υπολογίσετε τα α,β .

ii) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^3+27x}{x-1}$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $2f(x)-42 = 0$

γ) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$x^3+27x-\alpha x+\alpha=0$

δ) Έστω $g:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=(x-1)f(x)$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει : $g(x+1)<\dfrac{g(x)+g(x+2)}{2}$

ε) Να κάνετε τη διαίρεση $(x^3+27x):(x-1)$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_2^3 f(x)\,dx$

237. α) Να βρείτε συνάρτηση g για την οποία ισχύει

$$x g'(x)+g(x) = -3x^2+2e\cdot x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ και } \lim_{x\to 1}\frac{g(x)}{x^{21}} = e$$

β) Αν $f(x)=e^x+\alpha x+\beta$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, να υπολογίσετε τα α,β .

γ) Αν $f(x)=e^x$ και $g(x)=-x^2+ex+1$ να αποδείξετε ότι :

i) Υπάρχουν ακριβώς 2 κοινά σημεία των C_f και C_g

ii) Υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0,f(x_0))$ είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της C_g στο $B(x_0,g(x_0))$.

δ) Αν $f(x)=e^x$, να λύσετε την εξίσωση : $f(x+2)+f(19)=f(x)+f(21)$

ε) Αν $g(x)=-x^2+ex+1$ να δείξετε ότι $\int_{\frac{e-1}{2}}^{\frac{e+1}{2}} g(x)dx < \frac{e^2}{4}+1$

238. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{3x+1}{x^2+x}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$, να λύσετε την εξίσωση $3x+1=\lambda\cdot(x^2+x)$

γ) Να γράψετε την f στη μορφή $f(x)=\frac{\alpha}{x}+\frac{\beta}{x+1}$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)\,dx$

239. Έστω πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει :

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{x^2}=0$
- το $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{P(x)}{(x-6)^2}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{P(x)}{x+21} = -2$

α) Να δείξετε ότι το $P(x)$ είναι το πολύ 1ου βαθμού.

β) Να δείξετε ότι $P(x)=-2x+12$

γ) Αν $P(x)=-2x+12$ να υπολογίσετε το $\int_2^3 \frac{P(x)}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$

δ) Αν $P(x)=-2x+12$ να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{-2x^3+432}{P(x)}\,dx$

ε) Έστω σημεία $\mathrm{M}(x,P(x))$, $\mathrm{N}(2x,0)$, $O(0,0)$ με $x\in(0,6)$.

i) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ είναι ίσο με $\mathrm{E}=-2x^2+12x$
ii) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδόν του τριγώνου ΟΜΝ.
iii) Αν τα σημεία Μ , Ν κινούνται και η τετμημένη του Μ μεταβάλλεται με ρυθμό 2 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΝ τη στιγμή κατά την οποία το Μ έχει τετμημένη 5 .

240. α) Αν η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η C_f έχει 2 σημεία τομής με τον x΄x , να δείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον x΄x .

β) Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η C_f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον x΄x .

γ) Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και α , β με α<β και $f(\alpha)<0<f(\beta)$. Να δείξετε ότι υπάρχουν x_0 και ξ με $\alpha<x_0<\xi<\beta$ τέτοιοι ώστε $f(x_0)=0$ και $(\beta-x_0)f'(\xi)=f(\beta)$

δ) Αν $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $\alpha<\beta$, να δείξετε ότι

$$f(\alpha)\cdot(\beta-\alpha) \;<\; \int_\alpha^\beta f(x)dx \;<\; f(\beta)\cdot(\beta-\alpha)$$

241. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f'(2)=0$, $f(2)=1$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)\geq 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Αν $g(x)=-x+ln\,x$, να δείξετε ότι :

i) $g(x)\leq -1$ για κάθε $x>0$.

ii) Αν $0<\alpha<\beta$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx - \int_\alpha^\beta g(x)dx > 2\cdot(\beta-\alpha)$

242. *Δίνεται η συνάρτηση* $f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x>2 \\ \alpha x^2+\beta x & , \quad x\le 2 \end{cases}$

α) Να βρείτε τα α , β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 2 .

β) Αν α = 4 , β = -4 τότε :

i) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία y = 4x + 2025

ii) να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,4)$ τέτοιο ώστε

$$\boldsymbol{f'(x_0)(x_0^2-16)+f(x_0)\cdot 2x_0=0}$$

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f και τον x'x.

243. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ για τις οποίες ισχύει $\boldsymbol{f'(x)=e^x+g(-x)}$ για κάθε $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}$. Αν $\boldsymbol{g}$ γνησίως φθίνουσα τότε :

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι γνησίως αύξουσα .

β) Για τους αριθμούς α , β , γ με α<β<γ και β-α=γ-β να αποδείξετε ότι $\boldsymbol{2f(\beta)<f(\alpha)+f(\gamma)}$

γ) Για οποιουσδήποτε αριθμούς α , β με α<β υπάρχει $\boldsymbol{\xi\in(\alpha,\beta)}$ τέτοιο ώστε $\boldsymbol{\left(e^{\xi}+g(-\xi)\right)\cdot(\beta-\alpha)=f(\beta)-f(\alpha)}$

δ) Αν g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\boldsymbol{g(-4)-g(-2)=e^2-e^4}$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(2,4)$ τέτοιο ώστε $\boldsymbol{g'(-x_0)=e^{x_0}}$

ε) Αν $\boldsymbol{\alpha<\beta}$ να δείξετε ότι: $\boldsymbol{f(\beta)-f(\alpha)\ =\ e^{\beta}-e^{\alpha}\ -\ \int_{-\alpha}^{-\beta}g(x)dx}$

244. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+1}$ και $g(x)=\frac{1}{2}x$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να λύσετε την ανίσωση $(e^x-1)(e^{21}+1)>(e^x+1)(e^{21}-1)$

γ) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}

δ) Να δείξετε ότι η C_g εφάπτεται της C_f στην αρχή των αξόνων.

ε) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f είναι πάνω από την C_g και τις τιμές του x για τις οποίες η C_g είναι πάνω από την C_f

στ) Αν $h(x)=e^x\cdot f(x)$, να υπολογίσετε το $\int_0^{ln\,2}h(x)dx$

245. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^3+2}{x}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)dx$

246. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, για την οποία ισχύει $f(x) - ln\, 2^x - 1 \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Δίνεται επίσης συνάρτηση $g(x) = -x^2 + \beta x + 1$ για την οποία είναι γνωστό ότι το $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-2}{x^2-1}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

β) Να δείξετε ότι $\beta = 2$.

γ) Να δείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς 2 κοινά σημεία.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\left(f'(x_0) - g'(x_0)\right)({x_0}^2 + 1) + \left(f(x_0) - g(x_0)\right)2x_0 = 0$$

ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x^3) = f(3x^2 - 3x - 1)$

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες x=0 και x=1.

247. Έστω $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = x^9 + 3x^7 + 3x^5 + 2x^3 + x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Αν f συνεχής στο 0 , να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O\big(0, f(0)\big)$.

β) Αν f παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ τότε :

i) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα.

ii) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι ο άξονας συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$ εφάπτεται σε αυτές.

iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A\big(1, f(1)\big)$

iv) Να βρείτε το σύνολο τιμών της $h(x) = x^3 + x$ και να δείξετε ότι $f = h$.

v) Να υπολογίσετε το $\int_0^2 f^{-1}(x)\,dx$

248. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & , \quad x \geq 1 \\ x^2 + \alpha x + \beta & , \quad x < 1 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = -3$, $\beta = 3$ και να υπολογίσετε το $\int_0^2 f(x)\,dx$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(x^{21}+1\right) - f(3-x) > f\left(x^{21}\right) - f(2-x)$

δ) Να δείξετε ότι $\dfrac{f(x)+f(x+2)}{2} > f(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

249. Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x+1} & , \quad x>-1\\ \\ x^2-5 & , \quad x\leq -1\end{cases}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f , τις τιμές της στα -2 και 0

και να εξετάσετε αν είναι 1-1 .

β) Εξετάστε αν υπάρχει σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον $x'x$.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να φτιάξετε ένα πρόχειρο σχήμα για την C_f

ε) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f\left(x\right)=\alpha$

στ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\,dx$

250. Δίνεται συνάρτηση $f:\left(0,+\infty\right)\rightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f'\left(x\right)=\dfrac{x^3+x-10}{x^2}$ για κάθε $x\in\left(0,+\infty\right)$

και η ευθεία $y=-8x+19$ η οποία εφάπτεται της C_f στο $\mathrm{A}\left(1,f\left(1\right)\right)$

α) Να δείξετε ότι $f\left(1\right)+f'\left(1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\eta\mu\dfrac{3}{x}$

β) Να δείξετε ότι $f\left(x\right)=\dfrac{1}{2}x^2+\ln x+\dfrac{10}{x}+\dfrac{1}{2}$

γ) Να δείξετε ότι $2f\left(x\right)\geq 15+\ln 4$ για κάθε $x>0$

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της παραγώγου της f

ε) Να δείξετε ότι $10f\left(2\right)+f\left(11\right)<f\left(21\right)+10f\left(1\right)$

στ) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)\,dx$

251. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$e^{f(x)}+f(x)=e^x+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $f(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Αν $g(x)=\eta\mu x$, να υπολογίσετε το $\int_0^\pi f(x)\cdot g(x)\,dx$

252. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ln\,x + x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2}$

α) Να δείξετε ότι $f'(x) \geq 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f και f' .

Στη συνέχεια , για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων

$f(x) = \alpha$, $f'(x) = \alpha$, $f'(x) = (\alpha - 21)^2 + 1$

γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια θεωρήστε την f^{-1} παραγωγίσιμη και αποδείξτε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν στο $A(1,1)$ κοινή εφαπτομένη , η οποία είναι ο άξονας συμμετρίας τους.

δ) Να δείξετε ότι $x < e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ε) Να δείξετε ότι αν $x > 1$ τότε $(f'(x) - 1)(e^x - x) < (x - 1)\big(f'(e^x) - f'(x)\big)$

στ) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 x \cdot f'(x)\ dx$

253. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\alpha + ln\,x}{\beta + x}$ και $g(x) = e^{x-e} - x + \frac{e^2 - e + 1}{e}$

Δίνεται ακόμα ότι $\left(f(1) - \frac{1}{e+1}\right)(f^2(1) + 21) = 0$

και $e^{f(x)} + f(x) \leq e^{f(e)} + f(e)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = e$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

γ) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

δ) Δείξτε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο , στο οποίο δέχονται κοινή εφαπτομένη , η οποία είναι οριζόντια.

ε) Να δείξετε ότι αν $e < \kappa < \lambda$ τότε $(e + \lambda)(1 + \ln\kappa) > (e + \kappa)(1 + \ln\lambda)$

στ) Να υπολογίσετε το $\int_1^e x \cdot f''(x)\, dx$

254. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$f^3(x) + f(x) + x = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $x \cdot f(x) < 0$

γ) Να δείξετε ότι $f(-2) = 1$

δ) Να δείξετε ότι $\int_{-5}^{-4} f(x)\, dx > 1$

255. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x^3-\frac{5}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}$

α) Να δείξετε ότι $f'(x)\geq 1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f και f' .

Στη συνέχεια , για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων

$f(x)=\alpha$, $f'(x)=\alpha$, $f'(x)=(\alpha-21)^2+1$

γ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια θεωρήστε την f^{-1} παραγωγίσιμη και

αποδείξτε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν στο $\mathrm{A}(1,1)$ κοινή εφαπτομένη ,

η οποία είναι ο άξονας συμμετρίας τους.

δ) Να δείξετε ότι $x<e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ε) Να δείξετε ότι αν $x>1$ τότε $\left(f'(x)-1\right)\left(e^x-x\right)<(x-1)\left(f'\left(e^x\right)-f'(x)\right)$

στ) Να δείξετε ότι $\int_1^2 x\cdot f'(x)\,dx \;>\; \frac{3}{2}$

256. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{\alpha+\ln x}{\beta+x}$ και $g(x)=e^{x-e}-x+\dfrac{e^2-e+1}{e}$

Δίνεται ακόμα ότι $\left(f(1)-\dfrac{1}{e+1}\right)\left(f^2(1)+21\right)=0$ και $e^{f(x)}+f(x)\leq e^{f(e)}+f(e)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

α) Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=e$

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

γ) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

δ) Δείξτε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο , στο οποίο δέχονται κοινή εφαπτομένη ,

η οποία είναι οριζόντια.

ε) Να δείξετε ότι αν $e<\kappa<\lambda$ τότε $(e+\lambda)(1+\ln\kappa)>(e+\kappa)(1+\ln\lambda)$

στ) Να δείξετε ότι αν $0<\alpha<\beta$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \;<\; \int_\alpha^\beta g(x)\,dx$

257. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\cdot e^x$ και E το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f ,

τον $x'x$, την ευθεία $x=-2$ και την ευθεία $x=-1$. Να δείξετε ότι $E<\frac{1}{e}$

258. Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x\left(f''(x)+1\right)=1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

και $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h+1)-f(1-h)}{h} = 2e-4$. Δίνεται επίσης η $g(x)=x\ln x+(e-2)x-\dfrac{x^2}{2}$

Επίσης είναι γνωστό ότι οι C_f και C_g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο .

α) Να δείξετε ότι $f'(1)=e-2$

β) Να δείξετε ότι $f=g$

γ) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει δυο τοπικά ακρότατα ,

των οποίων οι θέσεις ανήκουν στο διάστημα $\left(e^{-2},e^{2}\right)$

δ) Αν το x_0 είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f , να δείξετε ότι το $\mathrm{A}\left(x_0,f(x_0)\right)$ ανήκει στη

γραφική παράσταση της $h(x)=\dfrac{x^2}{2}-x$ καθώς και ότι $f(x_0)>-\dfrac{1}{2}$

ε) Αν $x>e$, να δείξετε ότι $(x+1)\ln(x+1)-x\ln x < x+\dfrac{5}{2}-e$

στ) Να υπολογίσετε το $\displaystyle\int_1^2\left[g(x)-(e-2)x+\frac{x^2}{2}\right]dx$

259. α) Έστω συνάρτηση $g:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(x)=1-xg'(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Αν το -1 είναι ρίζα της g και $\left(g(1)\right)^{21}+g(1)=2^{21}+2$, να βρείτε την g .

β) Αν $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $x^2f''(x)+1=0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$,

να βρείτε την f .

γ) Αν $g(x)=\dfrac{1}{x}+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ και $f(x)=\ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ τότε :

i) Να δείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο .

ii) Να δείξετε ότι οι $C_{f^{-1}}$ και C_g έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία .

iii) Έχουν οι $C_{f^{-1}}$ και C_g παράλληλες εφαπτόμενες ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις C_f , C_g , την x= 1 και την x = 2 .

260. Δίνεται f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $g(x)=f(x)-x^4+20x^3+25x^2+x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Αν $|g(x)-g(y)|\le(x-y)^2$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xg(x)-\eta\mu x}{x}=0$ τότε :

α) Να δείξετε ότι η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $f(x)=x^4-20x^3-25x^2-x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον 3 ρίζες στο διάστημα $(-2,1)$

δ) Να αποδείξετε ότι :

i) η εξίσωση $4x^3-60x^2-50x-1=0$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες στο $(-2,1)$

ii) η f'' έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-2,1)$

ε) Να δείξετε ότι $f''(x)\ge -350$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

στ) Να δείξετε ότι: $f'(1)-f'(0)>-350$.

261. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f'(x)=2(x-\alpha)(x-\beta)^2+2(x-\alpha)^2(x-\beta) \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Δίνεται επίσης ότι $\alpha<\beta$, $\alpha\beta\neq 0$, $f(\alpha)=0$ και

υπάρχει $\delta>0$ τέτοιο ώστε $f(x)\le f(0)$ για κάθε $x\in(-\delta,\delta)$.

Δίνεται τέλος ότι το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-16}{x}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(0)=0$ και $f(0)=16$

β) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα α , $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, β .

γ) Να δείξετε ότι $f(x)=(x+2)^2(x-2)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια για τις διάφορες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\mu$.

ε) Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές $(x-2)^2$ και $(x+2)^2$ με $x\in[-3,-2)\cup(-2,2)$.

Να υπολογίσετε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδόν του ορθογωνίου.

στ) Να δείξετε ότι : $9 \le \int_0^1 f(x)\,dx \le 16$

262. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}-\alpha x+\beta$

α) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ υπολογίστε το $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

β) Αν $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=3$.

γ) Αν $\alpha=1$ και $\beta=3$ τότε :

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\eta\mu\left(f(x)-2\right)}{f^2(x)-4}$

iv) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\left[\left(f(x)-4\right)\eta\mu\dfrac{1}{f(x)-4}\right]$

v) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)dx$

263. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=-x^2-x$

α) Να δείξετε ότι $f(x)\ge x+1\ge g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y=x+1$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g

και να κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα με την ευθεία και τις C_f και C_g .

γ) Να δείξετε ότι $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε

$$\left(f'(x_0)-1\right)\left(g(x_0)-x_0-1\right)+\left(f(x_0)-x_0-1\right)\left(g'(x_0)-1\right)=0$$

ε) Θεωρούμε τα σημεία $\mathrm{A}\left(x,f(x)\right)$ και $\mathrm{B}\left(x,g(x)\right)$ με $x\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η απόσταση των σημείων A,B γίνεται ελάχιστη όταν η τετμημένη τους πάρει κάποια τιμή $x_0\in(-1,0)$.

στ) Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^\beta g(x)dx$, να βρείτε τη σχέση των αριθμών α,β

264. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^x+x^2-2x$

α) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο.

β) Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, να δείξετε ότι $\alpha=\beta$

265. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:[4,6]\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$x^2+f^2(x)=8x-12$ για κάθε $x\in[4,6]$

$f^2(x_0)+2f(x_0)<0$ για κάποιο $x_0\in(4,6)$

α) Να αποδείξετε ότι :

i) Η f έχει ακριβώς μια ρίζα , το 6 .

ii) $f(x)=-\sqrt{-x^2+8x-12}$ για κάθε $x\in[4,6]$

iii) $\int_4^6 f(x)dx < 0$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{f(x)+\sqrt{3}}{x-5}$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(5,f(5))$.

γ) Να βρείτε συνάρτηση g για την οποία ισχύει $g'(x)=2x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ η οποία έχει εφαπτομένη την ευθεία του προηγούμενου ερωτήματος.

δ) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $\left(-\sqrt{3}\ ,\ f^{-1}\left(-\sqrt{3}\right)\right)$

ε) Έστω $\mathrm{A}(x-1\ ,\ 0)$ και $\mathrm{M}(x,f(x))$ με $x\in[4,6]$

Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της απόστασης των σημείων Α και Μ.

266. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ και για οποιαδήποτε x_1,x_2 με $0<x_1<x_2$ ισχύει

$(x_2-x_1)\left(f'(x_2)-f'(x_1)\right)<0$. Επίσης δίνεται ότι $\lim\limits_{h\to2}\dfrac{f(2h-3)+1}{2h-4} = 0$

α) Να δείξετε ότι $f(1)=-1$ και $f'(1)=0$.

β) Να δείξετε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα καθώς και ότι $f(x)\le-1$ για κάθε $x>0$.

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{f(x)+1}$

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(\dfrac{1}{x^2+2}\right)<f\left(\dfrac{1}{e^x+1}\right)$

ε) Αν $x^2f''(x)+1=0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, να βρείτε τον τύπο της f και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)\,dx$.

267. Δίνεται $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα και $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα

με $f(0)=1$, $f(1)=2$, $g(0)=\frac{5}{2}$, $g(1)=\frac{3}{2}$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=g(x_0)$.

β) Αν f,g παραγωγίσιμες στο $(0,1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$

τέτοιο ώστε $f'(\xi)-g'(\xi)=\dfrac{g(\xi)-f(\xi)}{\xi-1}$

γ) Αν $f(x)\neq 1$ για κάθε $x\in(0,1]$ και $f'(x)\cdot(2f(x)-2)=1$ για κάθε $x\in(0,1]$,

να αποδείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x}+1$ για κάθε $x\in[0,1]$ και να υπολογίσετε το $\int_1^4 f(x)dx$.

δ) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την f^{-1}.

ε) Αν η g είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού και η εφαπτομένη της C_g στο $A\left(\frac{1}{4},g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$

είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-\frac{3}{2}x+21$, να βρείτε την g.

268. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\dfrac{\beta}{x}$ και η ευθεία $y=\dfrac{3}{2}x+40$

που εφάπτεται της C_f στο $A(40,f(40))$

α) Να δείξετε ότι $\alpha=2$ και $\beta=800$

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

γ) Για τις διάφορες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\mu$

δ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x)=20\ln x-x+100-20\ln 20$

ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να δείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο. Στη συνέχεια να δείξετε ότι αν $0<\alpha<\beta$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$.

ε) Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της περιμέτρου ενός ορθογωνίου που έχει εμβαδόν 400 m^2 ;

269. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-2x^2$. Αν $0<\alpha<\beta$ να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx<0$.

270. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα.

γ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες.

δ) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$.

ε) Δείξτε ότι $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$ για κάθε $x \neq -1$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$.

Κάποιες απαντήσεις :

α) Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -3 το $f(-3) = -6$ και τοπικό ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 2$

β) Κυρτή στο $(-1, +\infty)$
Κοίλη στο $(-\infty, -1)$

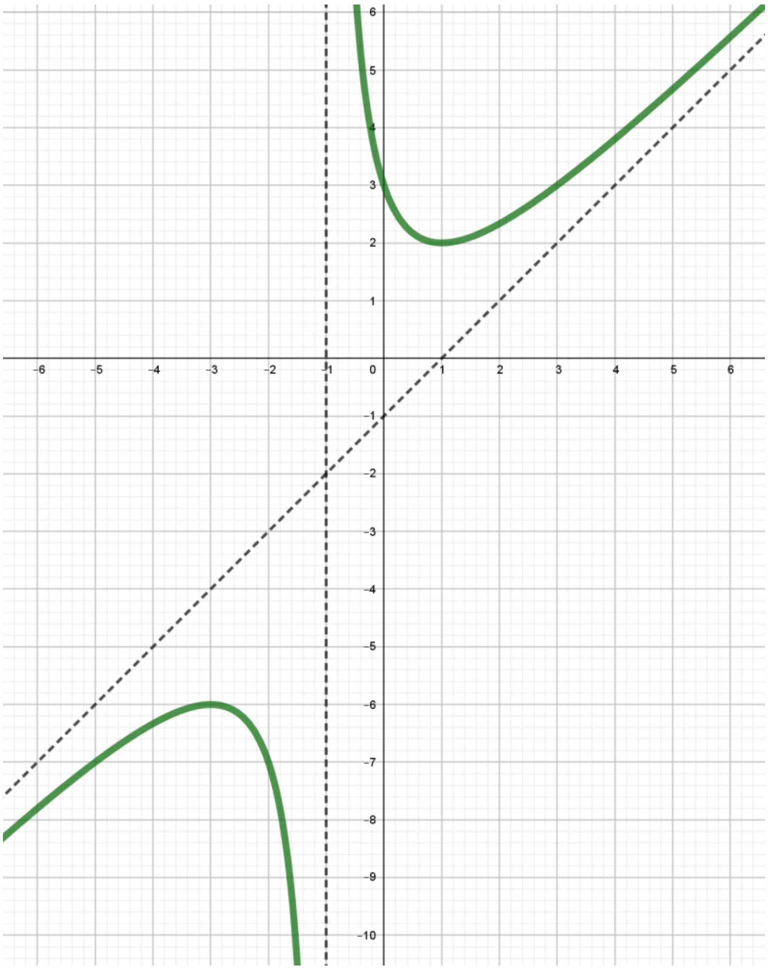
γ) $x = -1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη
$y = x - 1$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$

δ) Για $\alpha > 2$ έχει 2 ρίζες
Για $\alpha = 2$ έχει μια ρίζα
Για $-6 < \alpha < 2$ δεν έχει ρίζα
Για $\alpha = -6$ έχει μια ρίζα
Για $\alpha < -6$ έχει 2 ρίζες

ε) $x - 1 + \frac{4}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{4}{x+1} =$

$$= \frac{x^2 - 1 + 4}{x + 1} = f(x)$$

$E = 4\ln 2 - \frac{1}{2}$ τ.μ.



271. Δίνεται η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}}$.

α) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 \boldsymbol{f(x)dx}$

β) Αν $\boldsymbol{\alpha > -1}$, να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\alpha+1} \boldsymbol{f(x)dx} > 2$

272. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{\alpha}{x}+\beta\cdot x$ και η ευθεία $y=x+2$ η οποία εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{x}+2x$.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα.

δ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες.

ε) Από όλα τα ορθογώνια που έχουν εμβαδόν $\frac{1}{2}$ να βρείτε αυτό που έχει την ελάχιστη περίμετρο καθώς και την τιμή της περιμέτρου του.

στ) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)\,dx$

Κάποιες απαντήσεις :

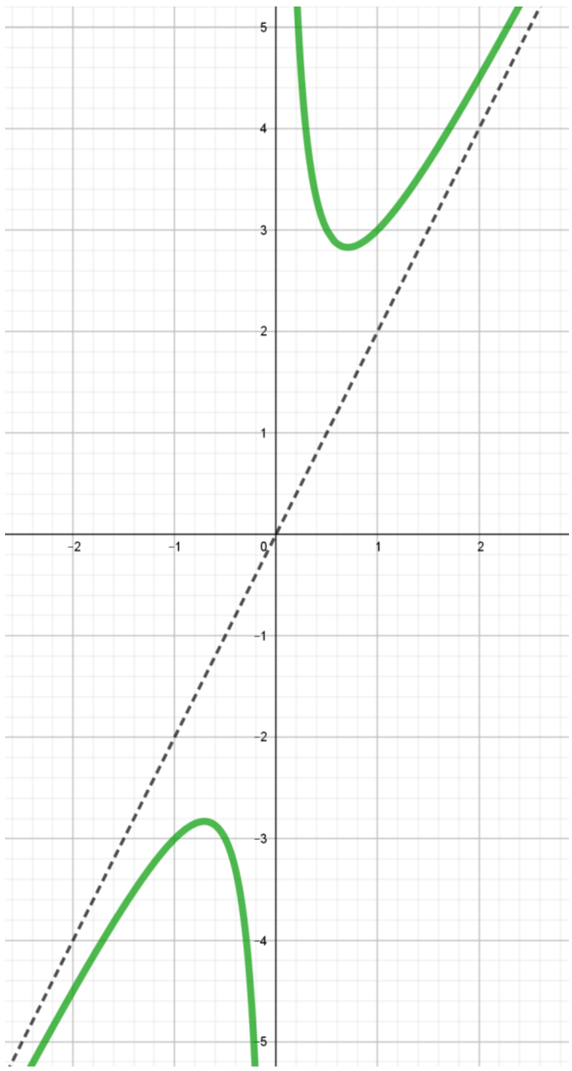
α) $f'(1)=1 \quad \Rightarrow \quad -\alpha+\beta=1$
$f(1)=3 \quad \Rightarrow \quad \alpha+\beta=3$
Από το σύστημα $\alpha=1$ και $\beta=2$
Άρα $f(x)=\frac{1}{x}+2x$.

β) Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ το $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-2\sqrt{2}$ και τοπικό ελάχιστο στο $\frac{\sqrt{2}}{2}$ το $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}$.

γ) Κυρτή στο $(0,+\infty)$
Κοίλη στο $(-\infty,\ 0)$

δ) $x=0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη
$y=2x$ πλάγια ασύμπτωτη
στο $-\infty$ και στο $+\infty$

ε) Έστω οι πλευρές x,y του ορθογωνίου.
Είναι $xy=\frac{1}{2} \Rightarrow y=\frac{1}{2x}$, $x>0$
Η περίμετρος είναι ίση με :
$2x+2y=2x+2\cdot\frac{1}{2x}=2x+\frac{1}{x}$, $x>0$
Περίμετρος : $f(x)=\frac{1}{x}+2x$ με $x>0$
Από β) ελάχιστη περίμετρος όταν $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$
(τότε και $y=\frac{\sqrt{2}}{2}$ δηλαδή είναι τετράγωνο)
Ελάχιστη περίμετρος $2\sqrt{2}$.



στ) $\int_1^2 f(x)\,dx = [\,\ln x+x^2\,]_1^2 = \ln 2+4-\ln 1-1 = \ln 2+3$

273. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{-x^2-3}{2x-2}$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

δ) Να σχεδιάσετε τη C_f .

ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

στ) Να υπολογίσετε το $\int_2^3 f(x)\,dx$

274. Έστω συνάρτηση $f\colon (1,+\infty) \to \mathbb{R}$

α) Έστω $f''(x) < 0$ για κάθε $x \epsilon (1,+\infty)$. Να δείξετε ότι αν $1 < \alpha < \beta$

τότε $(\beta-\alpha)\cdot f'(\alpha) + f(\alpha) > f(\beta)$

β) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \epsilon (1,+\infty)$, να δείξετε ότι η συνάρτηση

$h(x) = f(3-x) - f(9+x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

γ) Έστω $f(x) = ln\, x$, $x \epsilon (1,+\infty)$ και

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x > 1 \\ e^{\alpha-1} + \alpha^{21} - 2 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

Αν g συνεχής , να υπολογίσετε το α .

δ) Έστω $f(x) = ln\, x$, $x \epsilon (1,+\infty)$ και

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

i) Να δείξετε ότι η C_g και η ευθεία (ε): $y = \frac{1}{e-1}\cdot(x-1)$ έχουν ακριβώς 2 κοινά σημεία.

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g και την ευθεία (ε) .

275. α) Έστω συνάρτηση $f : (-\infty, 3) \to \mathbb{R}$ με $f(x) - f'(x) = e^x$, x<3 και $\lim_{x \to 3} f(x) = 0$. Να βρείτε την f .

β) Δίνεται η $f(x) = (3 - x) \cdot e^x$, x<3 .

Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και εξετάστε αν η C_f έχει ασύμπτωτες.

γ) Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές $\alpha = 1 - \frac{x}{3}$ και $\beta = e^x$.

Αν $E(x)$ είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου :

i) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού $E(x)$.

ii) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α το $\int_{\alpha}^{-1} E(x)\,dx$ για $\alpha < -1$.

iii) Αν $\varphi(\alpha) = \int_{\alpha}^{-1} E(x)\,dx$ να υπολογίσετε το $\lim_{\alpha \to -\infty} \varphi(\alpha)$.

276. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 6 \cdot \ln x$ και η ευθεία (ε) : $y = 4x - 3$.

α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας (ε) .

β) Να εξετάσετε αν η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη της C_f .

γ) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)dx$

277. α) Να λύσετε την εξίσωση $x \ln x = 2x - e$.

β) Αν $\alpha > 0$, $\beta > 0$ και $\int_{\alpha}^{\beta} x \cdot \ln x \; dx = \int_{\alpha}^{\beta} (2x - e)\,dx$, να δείξετε ότι $\alpha = \beta$

278. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$, $x \in [-2 \, , \, 2]$

α) Να δείξετε ότι η $\boldsymbol{f}$ έχει 4 θέσεις τοπικών ακροτάτων .

β) Να υπολογίσετε το $\boldsymbol{\int_0^1 f(x)\, dx}$

279. Έστω $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x f'(x) \ln x + f(x) = 2x^2$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και $f(e) = e^2$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

β) Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2e$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = -ex^2 + 2ex + e$.

i) Να δείξετε ότι οι $\boldsymbol{C_f}$ και $\boldsymbol{C_g}$ δεν έχουν κοινό σημείο.

ii) Να δείξετε ότι αν $\boldsymbol{1 < \alpha < \beta}$ τότε $\boldsymbol{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx}$

280. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{6\sqrt{x}-18}{x-9} & , \quad x > 9 \\ \alpha x + \beta & , \quad 1 \leq x \leq 9 \\ \frac{2}{x} & , \quad 0 < x < 1 \end{cases}$

Αν $\lim_{x\to 4} f(x) = 5$ και $\int_1^2 f(x)dx = 0$, να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.

281. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{6\sqrt{x}-18}{x-9} & , \quad x > 9 \\ \alpha x + \beta & , \quad 1 \leq x \leq 9 \\ \frac{2}{x} & , \quad 0 < x < 1 \end{cases}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε τα α , β ώστε να υπάρχουν τα όρια : $\lim_{x\to 1} f(x)$ και $\lim_{x\to 9} f(x)$

282. Δίνονται οι αριθμοί Α , Ε , Κ , Ρ : Α = $\lim_{x\to\alpha} \frac{\eta\mu(x-\alpha)}{1-\frac{x}{\alpha}}$ Ε = $\lim_{x\to\alpha} \frac{\alpha(x-\alpha)(x+2\alpha)}{x^2-\alpha x}$

Κ = $\lim_{x\to 4} \frac{\alpha x-4\alpha}{8-2x}$ Ρ = $\lim_{x\to 3} \frac{\alpha^2\cdot\sqrt{x+1}-2\alpha^2}{\alpha x-3\alpha}$

Αν ισχύει η ισότητα Α + Ε + Κ + Α + Ρ + Α = 21 , να υπολογίσετε το α .

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{\alpha x-4\alpha}{8-2x}$ dx

283. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = 2x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 .

β) Να βρείτε το $f(2)$.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\big(4 - f(x^2 + x)\big) - 2 = 0$.

δ) Αν $g(x) = (f \circ f)(x) - f(x)$, να υπολογίσετε τις τιμές του α για τις οποίες ισχύει $\int_0^\alpha g(x)\, dx$

284. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x+2}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

β) Να λύσετε την ανίσωση $3 \cdot f(\, f(x^{21}) - f(4-3x)\,) < 1$

γ) Να βρείτε την f^{-1} .

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)dx$

285. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η C_f .

δ) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^x - x - \alpha = 0$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f ,

τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

286. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot ln\, x$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η C_f .

δ) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \epsilon \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $ln\, x = \frac{\alpha}{x}$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f ,

τον $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$ και $x = \frac{2}{e}$.

287. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x}{x}$ και $g(x) = \frac{x}{e^x}$.

α) Να μελετήσετε τις f και g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε τις f και g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f και g .

δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο,

το οποίο έχει τετμημένη στο διάστημα (-1 , 0) .

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν Ε(α) του χωρίου που ορίζεται από την C_g , τον $x'x$

και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \alpha$ με $\alpha > 1$.

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} E(\alpha)$.

288. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^x$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα.

β) Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η C_f

γ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)dx$

289. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2)=0$ και

$f'(x)=1-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=1-e^{2-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε την αντίστροφη της f.

δ) Αν $g(x)=\sqrt{x}$ να βρείτε τη συνάρτηση $g\circ f$.

ε) Να δείξετε ότι $f(x+1)>\frac{f(x+2)+f(x)}{2}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

στ) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)dx$

290. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\alpha\cdot \ln x+\beta\cdot x+\gamma$ για την οποία ισχύει $f(x)-f(1)\leq 0$ για κάθε $x>0$. Αν η ευθεία $y=\frac{1-e}{e}\cdot x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A\big(e,f(e)\big)$ τότε :

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\ln x-x$ για κάθε $x>0$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι $\frac{f(x)}{x}\leq\frac{1-e}{e}$ για κάθε $x>0$.

Στη συνέχεια να δείξετε ότι $\displaystyle\int_1^e\frac{f(x)}{x}dx\ \leq\ -\ \frac{(e-1)^2}{e}$.

δ) Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η C_f .

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f ,

τον $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$.

291. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x)\cdot(f(x)+2x)=1$

για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν $f(0)=1$ τότε :

α) Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{x^2+1}\ -\ x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται .

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x)=\sqrt{2022}$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $e^{f(x)}-e=1-f(x)$.

στ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 x\cdot f(x)$ dx

292. Δίνεται συνάρτηση $f:[-3,2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - 3x$ για κάθε $x \in [-3,2]$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f .

γ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 e^x \cdot f(x)\ dx$

δ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \beta \cdot x & , \quad x < -3 \\ f(x) & , \quad -3 \le x \le 2 \\ \alpha \cdot x + \beta & , \quad x > 2 \end{cases}$

Να υπολογίσετε τα α και β ώστε η g να είναι συνεχής σ΄ όλο το $\mathbb{R}$.

293. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 \cdot e^{1-x} + 1$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $f^{-1}(x) = 1 - ln\left(\frac{x-1}{3}\right)$, $x > 1$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (4,10)$ τέτοιο ώστε $f^{-1}(x_0) = 0$.

δ) Να βρείτε την εφαπτομένη της c_f στο $A\big(1, f(1)\big)$ και να αποδείξετε ότι

$e^{1-x} \geq -x$ +2 για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 e^x \cdot f(x)\ dx$

294. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) = f(x) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x) dx$

ε) Έστω $g(x) = -\frac{1}{e} - (x-2)^2$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις

των συναρτήσεων f και g δεν έχουν κανένα κοινό σημείο .

295. Δίνεται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 \cdot ln\, x$ και $g(x) = \frac{f(x)}{x^3}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

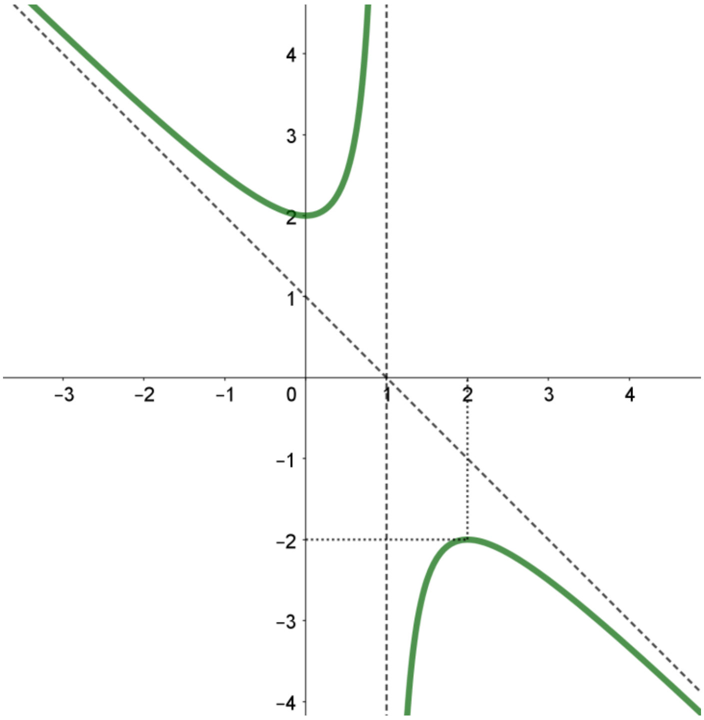
β) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x) dx$

γ) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να υπολογίσετε το $\int_1^e g(x)\ dx$

296. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{-x^2+\alpha x+\beta}{x-1}$$



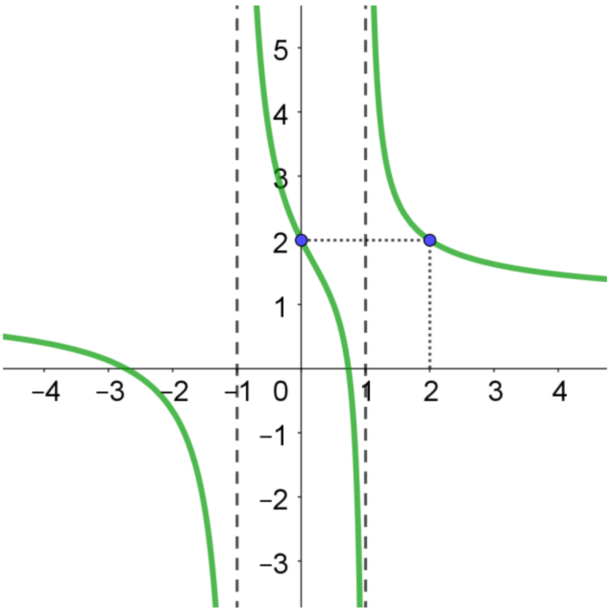
Η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(2,-2)$ όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τα α και β .
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

στ) Να υπολογίσετε το

$$\int_2^3 f(x)\,dx$$

297. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2-1}$



Η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(2,2)$ όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τα α και β .
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

στ) Να υπολογίσετε το

$$\int_2^3 f(x)\,dx$$

298. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + ln\,x$

α) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της f.

β) Αν x_0 η ρίζα της f , να δείξετε ότι $1 < e^{x_0} < e$

γ) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)dx$

δ) Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η C_f

299. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{-x^2+2x-2}{x-1}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f .

ε) Να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση που να φαίνονται τα παραπάνω.

στ) Να υπολογίσετε το $\int_2^3 f(x)\,dx$

300. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 3x + 1 + ln\, x$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

στ) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)\,dx$

301. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)^2 - 1$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\big(4, f(4)\big)$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία y= $-4x$.

γ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\,dx$

302. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-3)\, ln\, x - 1$ και $g(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta$

α) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = -2x + 1$ εφάπτεται στην C_f .

β) Να βρείτε τα α και β ώστε η ευθεία $y = -2x + 1$ να εφάπτεται της C_g στο $A\big(-1, g(-1)\big)$.

γ) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)\,dx$

303. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha e^x}{x+\beta}$

α) Να βρείτε τα α και β ώστε η ευθεία $y = -2x - 1$ να εφάπτεται της C_f στο σημείο της $A\big(0, f(0)\big)$

β) Να δείξετε ότι $\displaystyle\int_2^3 \frac{e^x}{x-1}\,dx > e^2$

304. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma\upsilon\nu x \cdot f(\eta\mu x)\ dx$

305. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) + f(x) < f(x+1)$ για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$.

β) Αν $f'(21) = 0$ και $f(21) = 3$, να δείξετε ότι :

$f(x) \cdot f(x+1) > 9$ για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$.

γ) Να δείξετε ότι $\int_0^9 f(x) \cdot f(x+1)\, dx > 81$

306. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{e}{2}x^2 + x - 1$ ως προς το πρόσημο

και στη συνέχεια να δείξετε ότι αν $\alpha < \beta < 0$ τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\, dx < 0$

307. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^2 - e^x}{e^x}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 .

β) Να βρείτε την f^{-1} .

γ) Αν $g(x) = \sqrt{-x}$, να βρείτε την $g \circ f$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{e^2 - e^{x^{21}}}{e^{x^{21}}} = \frac{e^2 - e^{2-x}}{e^{2-x}}$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f\big(f(x)\big) = e^2 - 1$

στ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\, dx$

308. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $g(x) = f(1-x) - f(x^3 - 9)$ τότε :

α) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το διάστημα των τιμών του x , στο οποίο η C_g είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ) Να δείξετε ότι $g\left(\frac{3}{2}\right) \cdot g\left(\frac{5}{2}\right) < g(2)$

δ) Αν $f(0) = 0$, να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο τομής των C_f και C_g

ε) Αν $f(x) = x$ για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 g(x)\, dx$

309. α) Δίνεται συνάρτηση $f: (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο 1 .

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε $x \epsilon (0,+\infty)$.

Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Έστω $f(x) = 3 - x + \ln x$, $x \epsilon (0,+\infty)$.

i) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

ii) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δυο ρίζες.

iii) Να δείξετε ότι $f(x) \leq 2$ για κάθε $x \epsilon (0,+\infty)$.

iv) Να δείξετε ότι $\int_1^2 x f(x) e^x \, dx < 2e^2$.

310. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο, το οποίο έχει αρνητική τετμημένη.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην $y = \frac{1}{11}x + 21$

ε) Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη.

στ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 x \cdot f(x) \, dx$

311. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+1} - 2x & , \ x > 1 \\ \frac{\alpha x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2+1} & , \ x \leq 1 \end{cases}$

α) Για τις διάφορες τιμές του α να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

β) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

γ) Να βρείτε για ποια τιμή του α είναι η f συνεχής στο 1 .

δ) Να υπολογίσετε το $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}} f'(x) dx$

312. Αν $\alpha f(\alpha) = \beta f(\beta)$ να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta x \cdot f'(x) \, dx = \int_\beta^\alpha f(x) \, dx$

313. Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει $\frac{f(0)}{2} < g(0)$ και $\frac{f(2)}{2} > g(2) - 4$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.

α) Να δείξετε ότι η $h(x) = f(x) + x^3 - 2g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,2]$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) + \xi^3 = 2 \cdot g(\xi)$.

γ) Αν $f(x) = x^3 \cdot ln(x^2 + 1)$, να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\, dx$

314. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x - \frac{1}{x-1} + \alpha & , \quad x \le 0 \\ -3x + 5 & , \quad x > 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε το α .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Για τις διάφορες τιμές του k να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = k$.

δ) Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^1 f(x)\, dx$

315. Δίνεται η $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι

παράλληλη στην $y = -3x + 21$.

γ) Ένα σημείο κινείται στην ευθεία $y = -3x + 21$ και η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό $4\ cm\, /\, sec$. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου ;

δ) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)\, dx$

316. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = -2$ και $f'(x) = f(x) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x} - x$ είναι σταθερή .

β) Να βρείτε την f .

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)dx$

317. Αν $\alpha < \beta$, $f(x) = (x - 2) \cdot e^x$ και $g(x) = -x^2 - e$ να δείξετε ότι $\int_\alpha^\beta f(x)dx > \int_\alpha^\beta g(x)dx$

318. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-4)^2 \cdot (x-1) + 1$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)\,dx$

319. α) Δίνεται $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και

$f(\alpha) = f(\beta)$ για αριθμούς α, β $\mu\varepsilon$ $0 < \alpha < \beta$.

Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-4) \cdot (\ln x - 2)$

i) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο.

ii) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)\,dx$

320. α) Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ η οποία παρουσιάζει ακρότατο στο 1 .

Η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει $f''(x) < 0$ για κάθε $x\epsilon(0, +\infty)$.

Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Έστω $f(x) = 3 - x + \ln x$, $x\epsilon(0, +\infty)$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δυο ρίζες.

iii) Να δείξετε ότι $f(x) \leq 2$ για κάθε $x\epsilon(0, +\infty)$.

iv) Να δείξετε ότι $\int_1^2 x f(x) e^x\,dx < 2e^2$.

321. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{2}{x-1}$, $x \in (1, +\infty)$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται

από την C_f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 3$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $e^{f(x)} + f(x) - 1 = 0$

322. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\frac{e^x-1}{e^x+2}$ και $g(x)=\sqrt{1-2x}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 .

β) Να βρείτε την f^{-1} .

γ) Να βρείτε την $g\circ f$.

δ) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

ε) Να υπολογίσετε το $\int_{-4}^{0} g(x)dx$

323. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{-x+5}-\sqrt{x-4}$ και $g(x)=(x+2)^2+3$.

α) Να εξετάσετε αν η g είναι 1-1 .

β) Να μελετήσετε την g ως προς τα ακρότατα .

γ) Να βρείτε την $f\circ g$.

δ) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

ε) Να υπολογίσετε το $\int_{-2}^{0} g(x)dx$

324. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{-2x+1}-x^3+2$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^{21}+5x)<f(2x-4)$.

β) Αν $\alpha<0$, να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{0} f(x)dx>0$

325. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f στο $x_0=3$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f

η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-2x+21$.

δ) Να υπολογίσετε το $\int_{2}^{3} f(x)dx$

326. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+2)\cdot e^x+x^2$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f .

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\big(0,f(0)\big)$.

γ) Να υπολογίσετε το $\int_{0}^{1} f(x)dx$

327. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (2x+1)^2 & , \quad x < -1 \\ \sqrt{2x+3} & , \quad x \geq -1 \end{cases}$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $f'(-3) + f'\left(\frac{1}{2}\right)$

β) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο -1 .

γ) Να υπολογίσετε το $\int_{-3}^{-2} f(x)dx$

328. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \eta\mu x & , \quad x \leq 0 \\ \alpha x + \beta & , \quad x > 0 \end{cases}$

α) Να βρείτε τα α , β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 0 .

β) Αν f είναι παραγωγίσιμη στο 0 τότε :

i) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\big(0, f(0)\big)$.

ii) αν $g(x) = e^x + \mu$, να βρείτε το μ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\big(0, f(0)\big)$ να εφάπτεται και στην C_g .

γ) Να υπολογίσετε το $\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

329. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{4x+3}$ και $g(x) = ln\, x^2$

α) Να βρείτε την $g \circ f$

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \frac{(g \circ f)(x) - \eta\mu^2 x - 6}{x}$

γ) Να υπολογίσετε το $\int_{-2}^{-1} g(x)dx$

330. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2} & , \quad x > 2 \\ \alpha x + \beta & , \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{x^2-x}{x-1} & , \quad x < 1 \end{cases}$$

α) Να βρείτε τα α, β ώστε να υπάρχουν τα όρια : $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$ και $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

β) Να υπολογίσετε το $\int_{3}^{4} f(x)dx$

331. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x-3} + x - 2$

B1. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B2. Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα .

B3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f .

B4. Να σχεδιάσετε την C_f .

B5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτη της C_f , την ευθεία x = 4 και την ευθεία x = 5 .

Απαντήσεις

B1 $f'(x) = \frac{(x-4)(x-2)}{(x-3)^2}$

B2 $f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}$

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f''(x)$		−	‖	+	
$f(x)$		∩	‖	∪	

B3 x = 3 κατακόρυφη ασύμπτωτη

$y = x - 2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ και στο $+\infty$

B5 Ε = ln2 τ.μ.

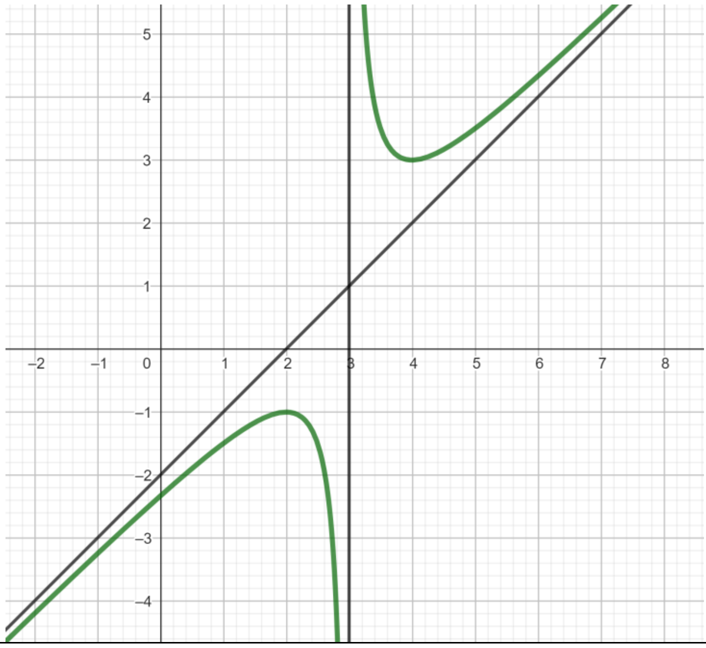
B1

x	$-\infty$		2		3		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘	‖	↘		↗	

τ.μ. $f(2)=-1$

τ.ε. $f(4)=3$

B4



332. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

γ) Να υπολογίσετε το $\int_0^1 f(x)dx$

333. **Γ1.** Έστω $f\colon(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(0)=1$ και $f'(x)=\frac{x\cdot f(x)}{x+1}$ για κάθε $x\in(-1,+\infty)$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{(x+1)f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή

και στη συνέχεια να βρείτε την f .

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα και την κυρτότητα.

Γ3. Για τις διάφορες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών

της εξίσωσης $e^{f(x)}=\mu$

Γ4. Έστω α,β με $-1<\alpha<\beta$. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)<\frac{2f(\alpha)+f(\beta)}{3}$

Γ5. Αν $h(x)=1-(x-1)^{2024}$, να εξετάσετε αν οι C_f και C_h έχουν κοινά σημεία.

Απαντήσεις

Γ1 $g'(x)=0$, $x\in(-1,+\infty)$ $\Rightarrow$ g σταθερή , $g(0)=1$ $\Rightarrow$ $g(x)=1$, $x\in(-1,+\infty)$

$\Rightarrow$ $\frac{(x+1)f(x)}{e^x}=1$, $x\in(-1,+\infty)$ $\Rightarrow$ $f(x)=\frac{e^x}{x+1}$, $x\in(-1,+\infty)$

Γ2 $f'(x)=\frac{xe^x}{(x+1)^2}$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

Ο.Ε.
f(0)=1

$$f''(x)=\frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3}$$

x	-1	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	
$f(x)$	$\cup$	

Γ3 $\Delta_1=(-1{,}0]$ $f(\Delta_1)=[1,+\infty)$ $\Delta_2=(0,+\infty)$ $f(\Delta_2)=(1,+\infty)$

Για $\mu\leq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη Για $\mu>0$ έχουμε : $e^{f(x)}=\mu$ $\Leftrightarrow$ $f(x)=\ln\mu$	Αν $\ln\mu>1$ ⇔ μ>e η εξίσωση έχει 2 ρίζες Αν $\ln\mu=1$ ⇔ μ=e η εξίσωση έχει 1 ρίζα Αν $\ln\mu<1$ ⇔ μ<e η εξίσωση είναι αδύνατη

Γ4 $3f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)<2f(\alpha)+f(\beta)$ $\Leftrightarrow$ .... $\Leftrightarrow$ $\frac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)-f(\alpha)}{\frac{2\alpha+\beta}{3}-\alpha}<\frac{f(\beta)-f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\beta-\frac{2\alpha+\beta}{3}}$ $\overset{2\ \text{ΘΜΤ}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow$ $f'(\xi_1)<f'(\xi_2)$ $\overset{f'\nearrow}{\langle=\rangle}$ $\xi_1<\xi_2$ που ισχύει αφού $\xi_1<\frac{2\alpha+\beta}{3}<\xi_2$

Γ5 $f(x)\geq 1$ (ισότητα για $x=0$) και $h(x)\leq 1$ (ισότητα για $x=1$)

Άρα $f(x)\neq h(x)$, $x\in(-1,+\infty)$ $\Rightarrow$ οι C_f και C_h έχουν κοινά σημεία .

334. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{x}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f

δ) Να σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f

ε) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)dx$

335. **Δ1**. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ και αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $-1 < \alpha < \beta$, $f(a) = \alpha$, $f(\beta) = \beta + 1$.

Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f

η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία μεγαλύτερη από 45° .

Δ2. Δίνεται $f: (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(x) = \frac{x+2}{x+1}$ για κάθε $x > -1$.

i) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{-f(\xi)}{\xi - 1}$

ii) Να βρείτε την f .

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ln(x+1) + x$

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία , τα ακρότατα , το πρόσημο , την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 21$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την (ε) και την ευθεία $x = e - 1$.

Δ5. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το $\int_0^e f^{-1}(x)\, dx$.

Απαντήσεις

Δ1 Από ΘΜΤ $f'(\xi) = 1 + \frac{1}{\beta - \alpha} > 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda > 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon\varphi\theta > 1 \quad \Rightarrow$ ……

Δ2 i) Θ Rolle για την $g(x) = f(x) \cdot (x - 1)$

ii) $f'(x) = (x + ln(x+1))'$, $x\epsilon\ (-1, +\infty) \quad \Rightarrow$ …..

Δ3 $f \nearrow (-1, +\infty)$, δεν παρουσιάζει ακρότατα , f κοίλη , $f(D_f) = (-\infty, +\infty)$

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$		$\frac{\square}{\square}$	0	+	

Δ4 $\quad f'(x) = 2 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$

$(\varepsilon): \quad y = 2x \qquad\qquad E = \frac{e^2+2e-1}{2}$ τ.μ.

Δ5

(1ος τρόπος)

$$E_1 = E_2 = \int_0^{e-1} \big(e - f(x)\big)\,dx$$

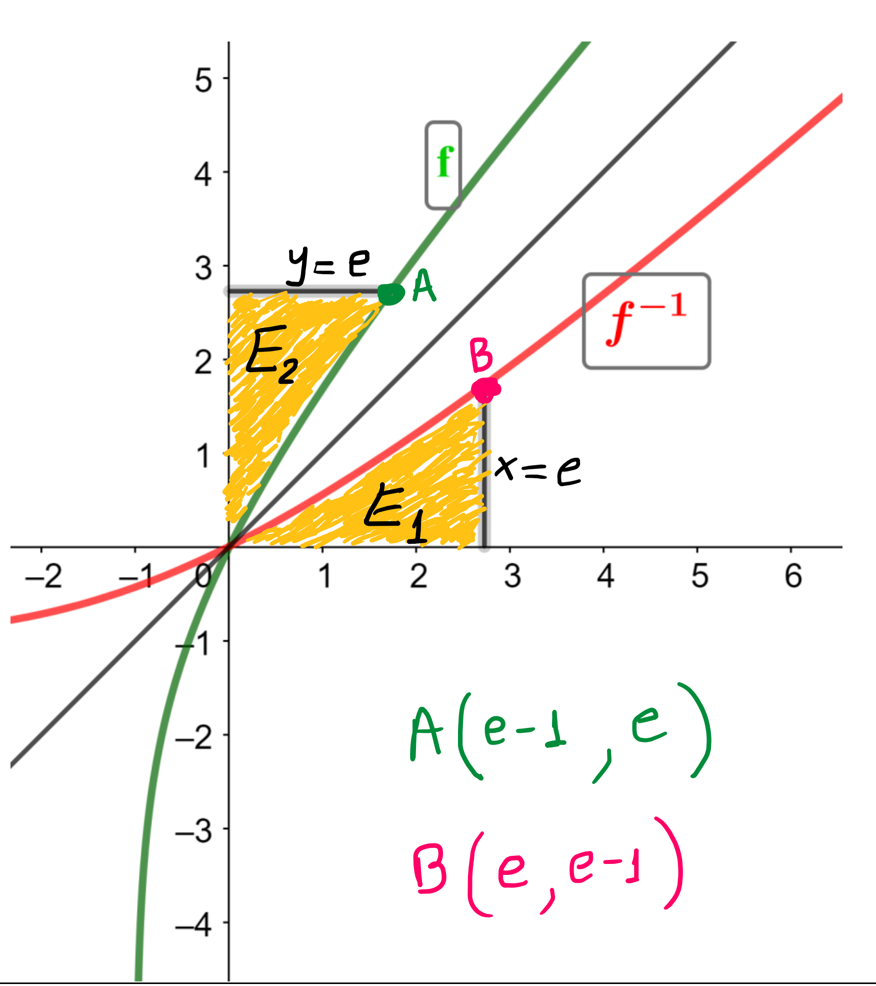
$= \ldots\ldots\ldots = \frac{e^2-3}{2}$

(2ος τρόπος)

$u = f^{-1}(x)$
$f(u) = x$
$f'(u)\,du = dx$
Για x=0 είναι u=0
Για x=e είναι u=e−1

$\int_0^{e-1} u f'(u)\,du =$

$\ldots\ldots\ldots\ldots = \frac{e^2-3}{2}$



336. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ) Να υπολογίσετε το $\int_1^2 f(x)\,dx$

ε) Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = 2\eta\mu x$ και $h(x) = 2\ln x + \frac{1}{x^2}$

i) Να εξετάσετε αν έχουν κοινό σημείο οι C_f και C_g

ii) Να εξετάσετε αν έχουν κοινό σημείο οι C_f και C_h

iii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται

από την C_f, την C_h, την $x = 1$ και την $x = 2$