



Αποδείξεις – Διατυπώσεις - Γεωμετρικές Ερμηνείες

Κεφάλαιο 1^ο: Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης

1. Έστω το πολυώνυμο $P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.
Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

Απόδειξη:

— Έστω τώρα το πολυώνυμο

$$P(x) = a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_1 x + a_0 \text{ και } x_0 \in \mathbb{R}.$$

Σύμφωνα με τις παραπάνω ιδιότητες έχουμε:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} P(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_v x^v + a_{v-1} x^{v-1} + \dots + a_0) \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (a_{v-1} x^{v-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + a_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 \\ &= a_v x_0^v + a_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + a_0 = P(x_0). \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$$

2. Ομοίως αν $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ μια ρητή συνάρτηση με $Q(x) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$$

Απόδειξη:



— Έστω η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$. Τότε,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, \text{ εφόσον } Q(x_0) \neq 0$$

3. Να διατυπώσετε το Κριτήριο Παρεμβολής και το ερμηνεύσετε γεωμετρικά

Διατύπωση:

Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν

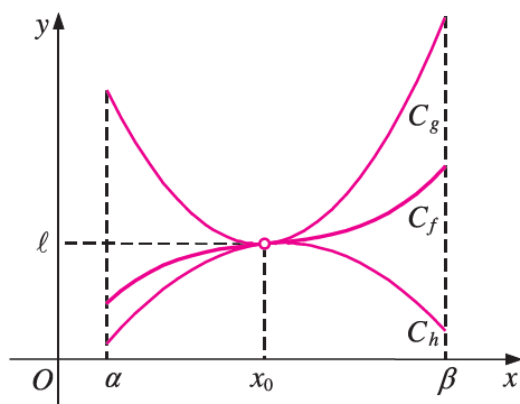
- $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και
- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$,

τότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell.$$

Γεωμετρική Ερμηνεία:

Υποθέτουμε ότι “κοντά στο x_0 ” μια συνάρτηση f “εγκλωβίζεται” (Σχ. 50) ανάμεσα σε δύο συναρτήσεις h και g . Αν, καθώς το x τείνει στο x_0 , οι g και h έχουν κοινό όριο ℓ , τότε, όπως φαίνεται και στο σχήμα, η f θα έχει το ίδιο όριο ℓ . Αυτό δίνει την ιδέα του παρακάτω θεωρήματος που είναι γνωστό ως **κριτήριο παρεμβολής**.



4. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano και το ερμηνεύσετε γεωμετρικά**Διατύπωση:**

Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$,

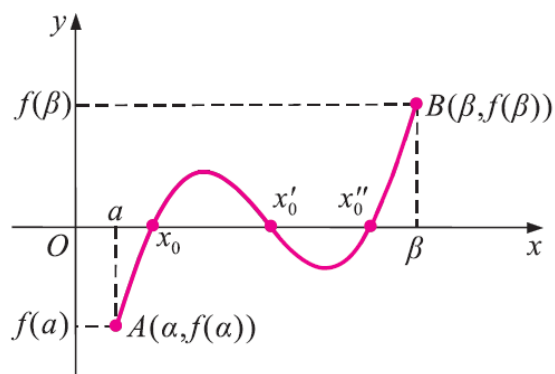
τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f(x_0) = 0.$$

Δηλαδή, υπάρχει μια, τουλάχιστον, ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

Γεωμετρική Ερμηνεία:

Στο διπλανό σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή τα σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x , η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο.

**5. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών (Θ.Ε.Τ.), καθώς και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά****Διατύπωση:**

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν:

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε, για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος, ώστε

$$f(x_0) = \eta$$

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι $f(a) < f(\beta)$. Τότε θα ισχύει $f(a) < \eta < f(\beta)$ (Σχ. 67). Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [a, \beta]$, παρατηρούμε ότι:

- η g είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ και

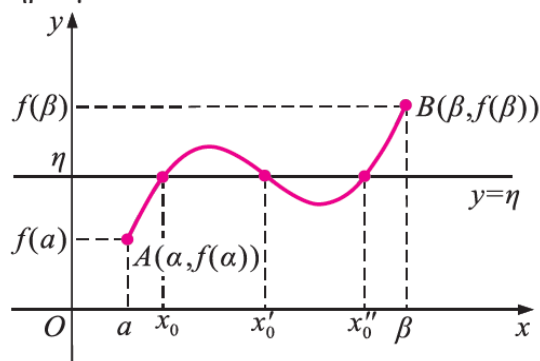
- $g(a)g(\beta) < 0$,

αφού

$$g(a) = f(a) - \eta < 0 \text{ και}$$

$$g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$, οπότε $f(x_0) = \eta$.

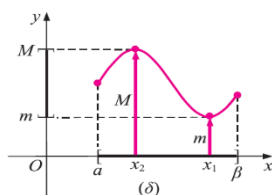
**Γεωμετρική Ερμηνεία:**

Στο παραπάνω σχήμα βλέπουμε την γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο $[a, \beta]$. Επειδή $f(a) \neq f(\beta)$ και ο αριθμός η βρίσκεται μεταξύ των $f(a)$ και $f(\beta)$, η C_f τέμνει την οριζόντια ευθεία $y = \eta$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (a, \beta)$, δηλαδή $f(x_0) = \eta$.

6. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το Θεώρημα Μέγιστης και Ελάχιστης τιμής.

Διατύπωση:

Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[a, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m . (Σχ. 69δ)

Γεωμετρική Ερμηνεία:

Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[a, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m . Δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 \in [a, \beta]$ τέτοια ώστε, αν $m = f(x_1)$ και $M = f(x_2)$, να ισχύει $m \leq f(x) \leq M$, για κάθε $x \in [a, \beta]$.



Κεφάλαιο 2^ο: Διαφορικός Λογισμός

7. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

Απόδειξη:

Για $x \neq x_0$ έχουμε

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0),$$

οπότε

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 . Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0 .

8. Έστω η σταθερή συνάρτηση $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 0$, δηλαδή:

$$(c)' = 0$$

Απόδειξη:

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0,$$

δηλαδή $(c)' = 0$.



9. Έστω η ταυτοτική συνάρτηση $f(x) = x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = 1$, δηλαδή:

Απόδειξη:

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

Επομένως,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} 1 = 1,$$

δηλαδή $(x)' = 1$.

10. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^\nu$, $\nu \in \mathbb{N} - \{0, 1\}$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = \nu \cdot x^{\nu-1}$, δηλαδή:

$$(x^\nu)' = \nu \cdot x^{\nu-1}$$

Απόδειξη:

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbb{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x^\nu - x_0^\nu}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1})}{x - x_0} = x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{\nu-1} + x^{\nu-2}x_0 + \dots + x_0^{\nu-1}) = x_0^{\nu-1} + x_0^{\nu-1} + \dots + x_0^{\nu-1} = x_0^{\nu-1},$$

δηλαδή $(x^\nu)' = \nu x^{\nu-1}$.



11. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ με $x \in [0, +\infty)$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,

Απόδειξη:

Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0, +\infty)$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x - x_0}{(x - x_0)(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} = \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

$$\text{δηλαδή } (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Όπως είδαμε στην παράγραφο 3.1 η $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

12. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
 $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Απόδειξη:

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$



13. Αν οι συναρτήσεις f, g, h είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f \cdot g \cdot h$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:
 $(f \cdot g \cdot h)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0)h(x_0) + f(x_0)g'(x_0)h(x_0) + f(x_0)g(x_0)h'(x_0)$

Απόδειξη:

Επειδή οι f, g, h είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις, κάνοντας χρήση τον κανόνα παραγώγισης για το γινόμενο έχουμε: $(f(x)g(x)h(x))' = [(f(x)g(x)) \cdot h(x)]' = (f(x)g(x))' \cdot h(x) + (f(x)g(x)) \cdot h(x)' = (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)) \cdot h(x) + (f(x)g(x)) \cdot h(x)' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$

14. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$.

Απόδειξη:

Πράγματι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ έχουμε:

$$(x^{-\nu})' = \left(\frac{1}{x^{\nu}} \right)' = \frac{(1)'x^{\nu} - 1(x^{\nu})'}{(x^{\nu})^2} = \frac{-\nu x^{\nu-1}}{x^{2\nu}} = -\nu x^{-\nu-1}.$$

15. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_1 = \mathbb{R} - \{x / \sigma\upsilon\nu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$, δηλαδή:

$$(\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$$

Απόδειξη:

Πράγματι για κάθε $x \in \mathbb{R}_1$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (\varepsilon\phi x)' &= \left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} \right)' = \frac{(\eta\mu x)'(\sigma\upsilon\nu x) - (\eta\mu x)(\sigma\upsilon\nu x)'}{(\sigma\upsilon\nu x)^2} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = \frac{\sigma\upsilon\nu^2 x + \eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x} = 1 \\ &= \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \end{aligned}$$



16. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}_2 = \mathbb{R} - \{x / \eta\mu x = 0\}$ και ισχύει $f'(x) = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$, δηλαδή: $(\sigma\varphi x)' = -\frac{1}{\eta\mu^2 x}$

Απόδειξη:

Πράγματι για κάθε $x \in \mathbb{R}_2$ έχουμε:

$$\begin{aligned} (\sigma\varphi x)' &= \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x} \right)' = \frac{(\sigma\upsilon\nu x)'(\eta\mu x) - (\sigma\upsilon\nu x)(\eta\mu x)'}{(\eta\mu x)^2} = \frac{-\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} = \frac{-\eta\mu^2 x - \sigma\upsilon\nu^2 x}{\eta\mu^2 x} = -1 \\ &= -\frac{1}{\eta\mu^2 x} \end{aligned}$$

17. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^a$, $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ και ισχύει $f'(x) = a \cdot x^{a-1}$, δηλαδή: $(x^a)' = a \cdot x^{a-1}$

Απόδειξη:

Πράγματι, αν $y = x^a = e^{a \ln x}$ και θέσουμε $u = a \ln x$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{a \ln x} \cdot a \cdot \frac{1}{x} = x^a \cdot \frac{a}{x} = a x^{a-1}.$$

18. Έστω η συνάρτηση $f(x) = a^x$, $a > 0$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x) = a^x \ln a$, δηλαδή: $(a^x)' = a^x \ln a$

Απόδειξη:

Πράγματι, αν $y = a^x = e^{x \ln a}$ και θέσουμε $u = x \ln a$, τότε έχουμε $y = e^u$. Επομένως,

$$y' = (e^u)' = e^u \cdot u' = e^{x \ln a} \cdot \ln a = a^x \ln a.$$

19. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^*$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{x}$, δηλαδή: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$



Απόδειξη:

Πράγματι

— αν $x > 0$, τότε $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$, ενώ

— αν $x < 0$, τότε $\ln |x| = \ln(-x)$, οπότε, αν θέσουμε $y = \ln(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = \ln u$.
Επομένως,

$$y' = (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$$

και άρα $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$.

20. Να διατυπώσετε και να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το θεώρημα Rolle

Διατύπωση:

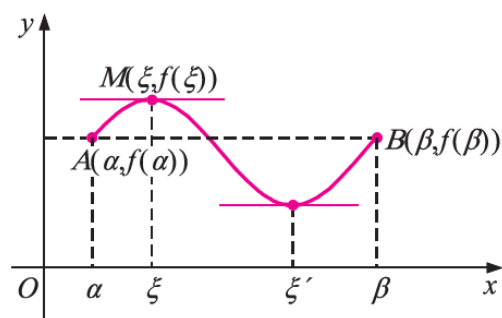
Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β) και
- $f(\alpha) = f(\beta)$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:
 $f'(\xi) = 0$

Γεωμετρική Ερμηνεία:

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x .





21. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.) και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά

Διατύπωση:

Αν μια συνάρτηση f είναι:

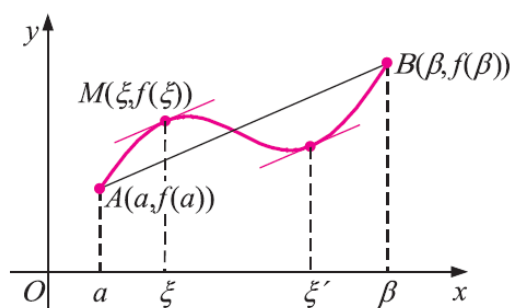
- συνεχής στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Γεωμετρική Ερμηνεία:

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας AB .



22. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

τότε η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ , δηλαδή:

$$f(x) = c$$

Απόδειξη:

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1) = f(x_2)$. Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1) = f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ , ισχύει $f'(\xi) = 0$, οπότε, λόγω της (1), είναι $f(x_1) = f(x_2)$. Αν $x_2 < x_1$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1) = f(x_2)$. Σε όλες, λοιπόν, τις περιπτώσεις είναι $f(x_1) = f(x_2)$.

23. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν

- οι f, g είναι συνεχείς στο Δ και
- $f'(x) = g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

τότε υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $c \in \mathbb{R}$ να ισχύει:

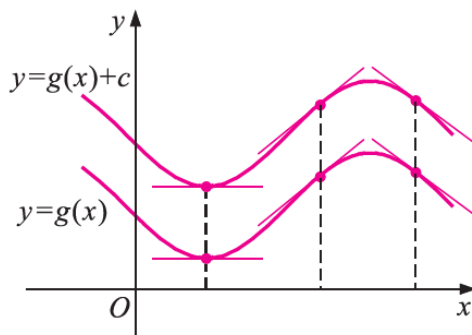
$$f(x) = g(x) + c$$

Απόδειξη:

Η συνάρτηση $f - g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x \in \Delta$ ισχύει

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) = 0.$$

Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, η συνάρτηση $f - g$ είναι σταθερή στο Δ . Άρα, υπάρχει σταθερά C τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει $f(x) - g(x) = c$, οπότε $f(x) = g(x) + c$.



24. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ .

- Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .
- Αν $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το Δ .



Απόδειξη:

Στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$, δηλαδή η f γνησίως αύξουσα στο Δ . Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.), αναλυτικότερα:

- f συνεχής στο $[x_1, x_2]$
- f παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2)

Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε $f'(\xi) \cdot (x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$ έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Ομοίως όταν $f'(x) < 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) > f(x_2)$, δηλαδή η f γνησίως φθίνουσα στο Δ . Πράγματι, στο διάστημα $[x_2, x_1]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.), αναλυτικότερα:

- f συνεχής στο $[x_2, x_1]$
- f παραγωγίσιμη στο (x_2, x_1)

Επομένως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x_2, x_1)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$, οπότε έχουμε $f'(\xi) \cdot (x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2)$

Επειδή $f'(\xi) < 0$ και $x_1 - x_2 < 0$ έχουμε $f(x_1) - f(x_2) > 0$, οπότε $f(x_1) > f(x_2)$.

25. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat και στη συνέχεια να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά

Διατύπωση:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε:

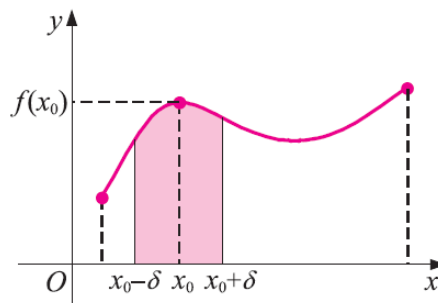
$$f'(x_0) = 0$$

Απόδειξη:

Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο, ώστε

$$(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subseteq \Delta \text{ και}$$

$$f(x) \leq f(x_0), \text{ για κάθε } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta). \quad (1)$$



Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , ισχύει

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Επομένως,

— αν $x \in (x_0 - \delta, x_0)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0$, οπότε θα έχουμε

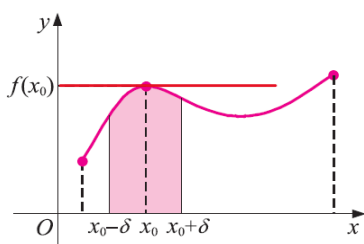
$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \quad (2)$$

— αν $x \in (x_0, x_0 + \delta)$, τότε, λόγω της (1), θα είναι $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$, οπότε θα έχουμε

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0. \quad (3)$$

Έτσι, από τις (2) και (3) έχουμε $f'(x_0) = 0$.

Η απόδειξη για τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

Γεωμετρική Ερμηνεία:

Στο διπλανό σχήμα παρατηρούμε ότι, αν σε ένα εσωτερικό σημείο x_0 ενός διαστήματος του πεδίου ορισμού της, η f είναι παραγωγίσιμη σε αυτό και

επιπλέον παρουσιάζει ακρότατο σε αυτό. Τότε στο $(x_0, f(x_0))$ η f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη, δηλαδή ισχύει: $f'(x_0) = 0$

26. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (a, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0 , στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

- i) Αν $f'(x) > 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f .
- ii) Αν $f'(x) < 0$ στο (a, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) , τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f .
- iii) Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(a, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ελάχιστο και η f είναι

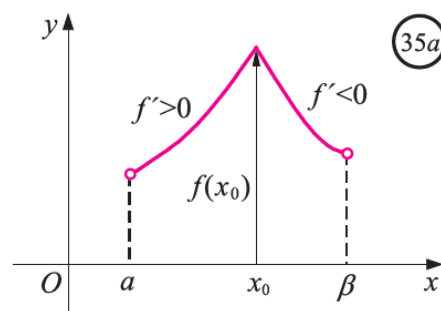
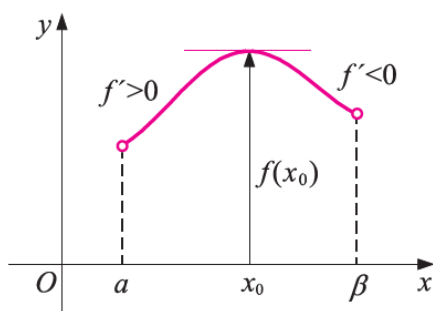
Απόδειξη:

- i) Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$.

Έτσι έχουμε: $x \leq x_0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (a, x_0]$. (1)

Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0, \beta)$.

Έτσι έχουμε: $x \geq x_0 \Leftrightarrow f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ (2)



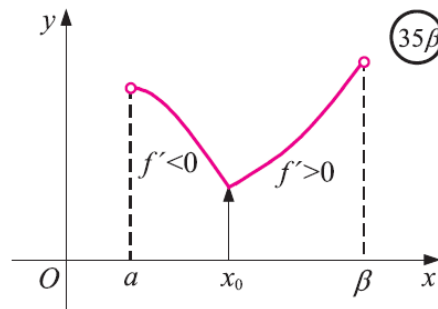
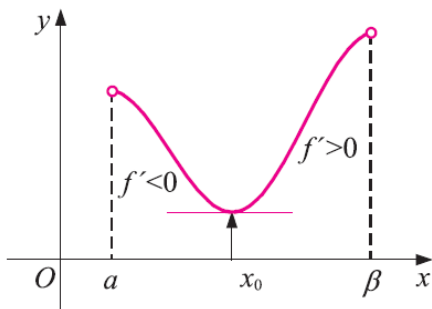
Επομένως λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \leq f(x_0)$, για κάθε $x \in (a, \beta)$, που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (a, β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

- ii) Επειδή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 , η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(a, x_0]$.

Έτσι έχουμε: $x \leq x_0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in (a, x_0]$. (1)

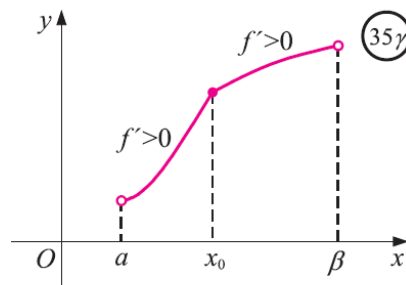
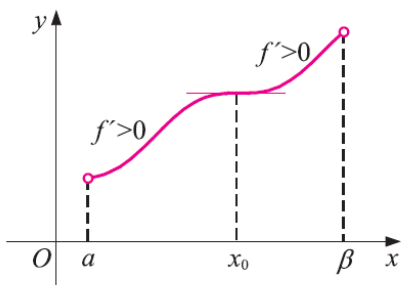
Επειδή $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, \beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0 ,
η είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$.

Έτσι έχουμε: $x \geq x_0 \Leftrightarrow f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in [x_0, \beta)$ (2)



Επομένως λόγω των (1) και (2), ισχύει: $f(x) \geq f(x_0)$, για κάθε $x \in (a, \beta)$, που
σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι ελάχιστο της f στο (a, β) και άρα τοπικό ελάχιστο
αυτής.

iii) Εστω ότι
 $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$



Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα
 $(a, x_0]$ και $[x_0, \beta)$. Επομένως, για $x_1 < x_0 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν
είναι τοπικό ακρότατο της f . Θα δείξουμε, τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a,$
 $\beta)$. Πράγματι, έστω $x_1, x_2 \in (a, \beta)$ με $x_1 < x_2$.

— Αν $x_1, x_2 \in (a, x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(a, x_0]$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Αν $x_1, x_2 \in [x_0, \beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0, \beta)$, θα ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$.

— Τέλος, αν $x_1 < x_0 < x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$.

Επομένως, σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα
στο (a, β) .

Ομοίως, αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in (a, x_0) \cup (x_0, \beta)$.



27. Να διατυπώσετε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$

Διατύπωση:

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

28. Να διατυπώσετε τον κανόνα De L' Hospital για την απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)$

Διατύπωση:

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$, $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Κεφάλαιο 3^ο: Ολοκληρωτικός Λογισμός

29. Έστω μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$G(x) = F(x) + c, \text{ με } c \in \mathbb{R}$$

είναι παράγουσες της f στο Δ και

- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή

$$G(x) = F(x) + c, \text{ με } c \in \mathbb{R}$$



Απόδειξη:

- Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

- Έστω G είναι μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε

$$G'(x) = F'(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

Άρα, σύμφωνα με το πόρισμα της § 2.6, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε

$$G(x) = F(x) + c, \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

30. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεμελιώδες θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού

Διατύπωση:

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Απόδειξη:

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$. Επειδή και η G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, θα υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ τέτοιο, ώστε

$$G(x) = F(x) + c. \quad (1)$$

Από την (1), για $x = \alpha$, έχουμε $G(\alpha) = F(\alpha) + c = \int_{\alpha}^{\alpha} f(t)dt + c = c$, οπότε $c = G(\alpha)$. Επομένως,

$$G(x) = F(x) + G(\alpha),$$

οπότε, για $x = \beta$, έχουμε

$$G(\beta) = F(\beta) + G(\alpha) = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt + G(\alpha)$$

και άρα

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha). \blacksquare$$



Συμπληρωματικά Θεωρήματα – Προτάσεις – Εφαρμογές

31. Να αιτιολογήσετε γιατί οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y = x$ (διχοτόμο πρώτου και τρίτου

Αιτιολόγηση:

Θεωρούμε ότι η f αντιστρέφεται και C, C' οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} αντίστοιχα, στο ίδιο σύστημα αξόνων. Ισχύει ότι: $f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$, που σημαίνει ότι αν ένα σημείο $M(a, \beta)$ ανήκει στην γραφική παράσταση C της f , τότε το σημείο $M'(\beta, \alpha)$ θα ανήκει στη γραφική παράσταση C' της f^{-1} και αντιστρόφως. Τα σημεία όμως αυτά είναι συμμετρικά ως προς την ευθεία $y = x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

32. Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0$ (Εφαρμογή σχολικού βιβλίου)

Απόδειξη:

Για $x \neq 0$ έχουμε $\left| x \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq |x| \cdot \left| \eta \mu \frac{1}{x} \right| \leq |x|$,

οπότε $-|x| \leq x \eta \mu \frac{1}{x} \leq |x|$

Επειδή $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$, σύμφωνα με το Κριτήριο Παρεμβολής, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 0$$

33. Να αποδείξετε ότι: Για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x \leq x - 1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x = 1$ (Εφαρμογή Σχολικού βιβλίου)

Απόδειξη:

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x - 1 - \ln x$ με $x > 0$, η οποία είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. Η εξίσωση έχει μία μόνο ρίζα, την $x = 1$. Η μονοτονία και τα ακρότατα της f φαίνονται στον παρακάτω πίνακα:

x	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$				

Επειδή η f για $x = 1$ παρουσιάζει ολικό ελάχιστο, για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει:

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow x - 1 - \ln x \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \leq x - 1 \text{ με την ισότητα να ισχύει μόνο για } x = 1.$$

* (Ομοίως αποδεικνύεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $e^x \geq x + 1$, με την ισότητα να ισχύει μόνο όταν $x = 0$)

34. Να αποδειχθεί ότι για την συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$ και για οποιοδήποτε διάστημα $[x_1, x_2]$, ο αριθμός $x_0 \in (x_1, x_2)$, που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, είναι το κέντρο του διαστήματος $[x_1, x_2]$, δηλαδή $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$

Η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + bx + \gamma$ είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πολυωνυμική και παραγωγίσιμη στο (x_1, x_2) , με $f'(x) = 2ax + b$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}. \quad (1)$$

Είναι όμως:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} &= \frac{\alpha x_2^2 + \beta x_2 + \gamma - \alpha x_1^2 - \beta x_1 - \gamma}{x_2 - x_1} = \frac{\alpha(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + \beta(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{(x_2 - x_1)[\alpha(x_1 + x_2) + \beta]}{x_2 - x_1} = \alpha(x_1 + x_2) + \beta. \end{aligned}$$

Επομένως, η σχέση (1) γράφεται:

$$2\alpha x_0 + \beta = \alpha(x_1 + x_2) + \beta \Leftrightarrow x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$



35. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f'(x) = f(x)$, τότε $f(x) = c \cdot e^x$, όπου $c \in \mathbb{R}$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} f'(x) = f(x) &\Leftrightarrow f'(x) - f(x) \\ &= 0 \stackrel{\cdot(e^{-x})}{\Leftrightarrow} e^{-x} \cdot f'(x) - e^{-x} \cdot f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} \cdot f'(x) + (e^{-x})' \cdot f(x) = 0 \\ &\Leftrightarrow (e^{-x} \cdot f(x))' = 0 \text{ και οι συναρτήσεις είναι συνεχείς για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ οπότε:} \\ e^{-x} \cdot f(x) &= c \Leftrightarrow f(x) = c \cdot e^x, \text{ όπου } c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

36. Έστω f μια 1-1 συνάρτηση, οπότε ορίζεται η αντίστροφη της f^{-1} .
Αν επιπλέον η f είναι γνησίως αύξουσα τότε οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$, $f(x) = x$ και $f^{-1}(x) = x$ είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} \text{Θεωρούμε το σύστημα (1)} \quad \begin{cases} f(x) = y \\ f^{-1}(x) = y \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ f(f^{-1}(x)) = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = y \\ x = f(y) \end{cases} \Leftrightarrow \\ \begin{cases} f(x) = y \\ f(y) = x \end{cases} &, \text{ με αφαίρεση κατά μέλη καταλήγουμε ότι: } \Leftrightarrow f(x) + x = f(y) + y \\ &\Leftrightarrow g(x) = g(y) \end{aligned}$$

Η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα ως πρόσθεση γνησίως αυξουσών συναρτήσεων, άρα και 1-1. $g(x) = g(y) \Leftrightarrow x = y$ (2)

$$\text{Από (1) και (2) έχουμε } \begin{cases} f(x) = x \\ f^{-1}(x) = x \end{cases} \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x$$

37. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη, τότε και η f^{-1} έχει το ίδιο είδος μονοτονίας.

Απόδειξη:

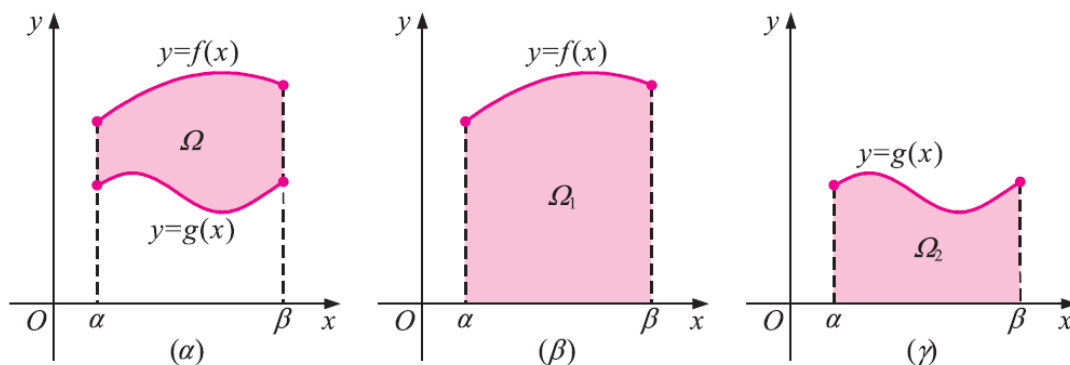
Έστω $x_1, x_2 \in f(D_f)$ με $x_1 < x_2$ για κάθε $x \in f(D_f)$

Ισχύει ότι $x = f(f^{-1}(x))$ (1)

Οπότε αν αντικαταστήσουμε την σχέση (1) έχουμε: $\Leftrightarrow f(f^{-1}(x_1)) < f(f^{-1}(x_2))$
 $\Leftrightarrow f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2)$

38. Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, \beta]$ με $f(x) \geq g(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και το χωρίο Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a, x = \beta$ τότε: $E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$

Απόδειξη:



Παρατηρούμε ότι

$$E(\Omega) = E(\Omega_1) - E(\Omega_2) = \int_a^\beta f(x) dx - \int_a^\beta g(x) dx = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx.$$

Επομένως,

$$E(\Omega) = \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx$$

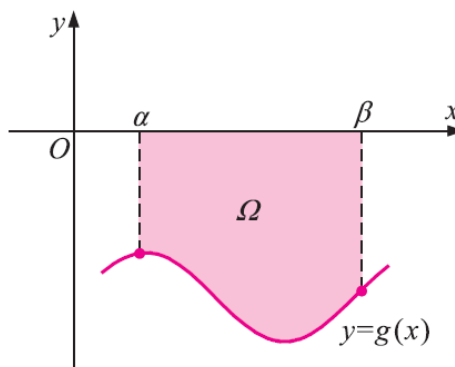
39. Έστω g μία συνεχής συνάρτηση στο $[a, \beta]$, με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και το χωρίο Ω που περικλείεται την γραφική παράσταση της g , και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$, $x = \beta$ τότε:

$$E(\Omega) = - \int_a^\beta g(x) dx$$

Απόδειξη:

Με τη βοήθεια του προηγούμενου τύπου μπορούμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τον άξονα $x'x$, τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης g , με $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$ και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ (Σχ. 21). Πράγματι, επειδή ο άξονας $x'x$ είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} E(\Omega) &= \int_a^\beta (f(x) - g(x)) dx \\ &= \int_a^\beta [-g(x)] dx = - \int_a^\beta g(x) dx. \end{aligned}$$



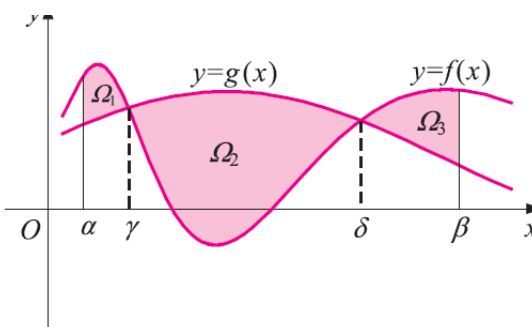
Επομένως, αν για μια συνάρτηση g ισχύει $g(x) \leq 0$ για κάθε $x \in [a, \beta]$, τότε

$$E(\Omega) = - \int_a^\beta g(x) dx$$

40. Έστω f, g δύο συνεχείς συναρτήσεις στο $[a, \beta]$, με άγνωστη σχετική θέση για κάθε $x \in [a, \beta]$, και το χωρίο Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις κατακόρυφες ευθείες $x = a$, $x = \beta$ τότε: $E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$

Απόδειξη:

Όταν η διαφορά $f(x) - g(x)$ δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[a, \beta]$, όπως στο Σχήμα 23, τότε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f, g και τις ευθείες $x = a$ και $x = \beta$ είναι ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των χωρίων Ω_1, Ω_2 και Ω_3 . Δηλαδή,



$$E(\Omega) = E(\Omega_1) + E(\Omega_2) + E(\Omega_3)$$

$$= \int_a^\gamma (f(x) - g(x)) dx + \int_\gamma^\delta (g(x) - f(x)) dx + \int_\delta^\beta (f(x) - g(x)) dx$$

$$= \int_a^\gamma |f(x) - g(x)| dx + \int_\gamma^\delta |f(x) - g(x)| dx + \int_\delta^\beta |f(x) - g(x)| dx$$

$$= \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$$

Επομένως,

$$E(\Omega) = \int_a^\beta |f(x) - g(x)| dx$$