



ΤΕΛΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Εκφωνήσεις

ΘΕΜΑ Α

A.1 Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α, β]$. Αν G είναι μια

παράγουσα της f στο $[α, β]$, τότε να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 7

A.2 Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

A.3 Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι “1-1” είναι και γνησίως μονότονη»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι Αληθής, η το γράμμα Ψ, αν είναι Ψευδής.

Μονάδα 1

β. Να αιτιολογήσετε την απάντηση σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 3

A.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

ii. Κάθε πιθανή θέση τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης f σε διάστημα Δ , είναι και κρίσιμο σημείο της f στο Δ .

iii. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$



Γ' ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

iv. Αν για μια συνάρτηση f , συνεχή σε διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει ότι

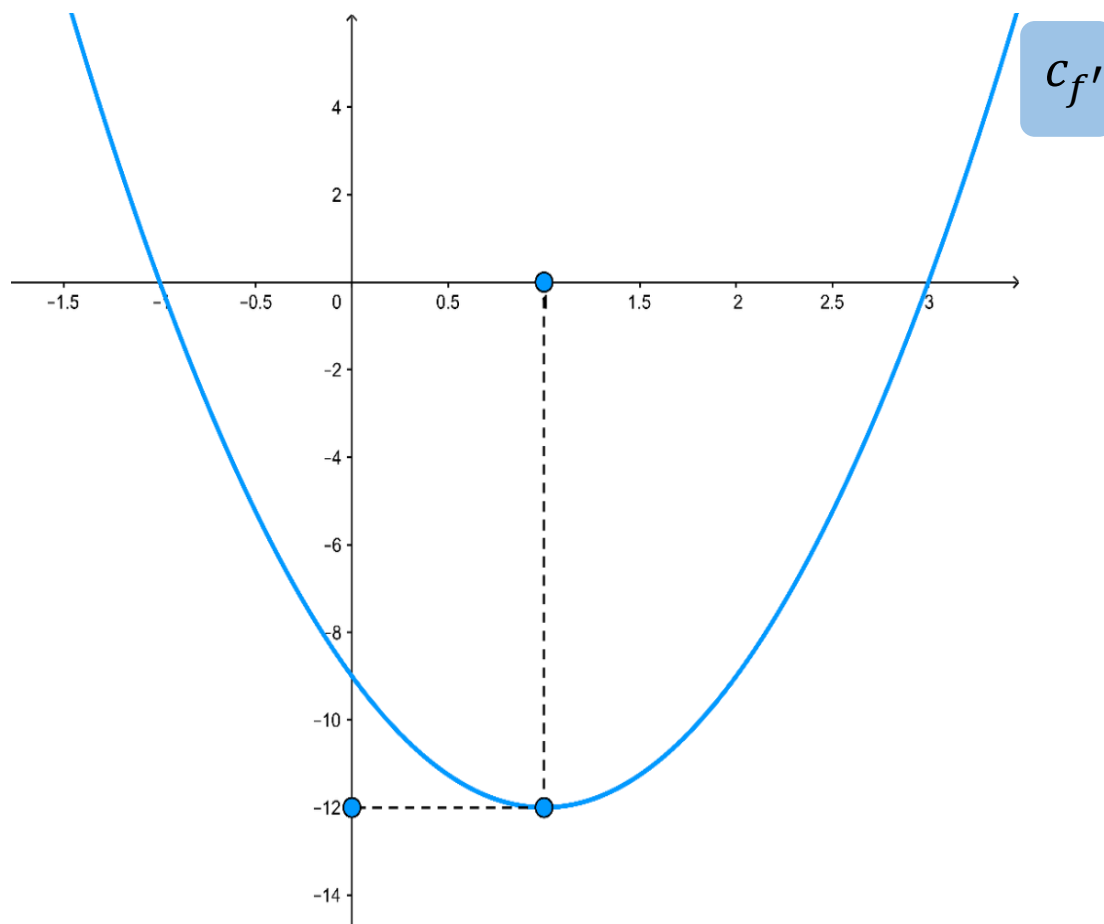
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0, \text{ τότε είναι } f(x) > 0 \text{ για κάθε } x \in [\alpha, \beta].$$

v. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι
παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες $2 \times 5 = 10$

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται στο παρακάτω σχήμα η γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου f' μίας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$





Γ' ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής .

Μονάδες 5

B3. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι πολυωνυμική τρίτου βαθμού της μορφής:

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

i. Αν $f(0) = 9$ και ο ρυθμός μεταβολής της δεύτερης παραγώγου στο 0 είναι 6, να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\delta = 9$.

Μονάδες 2

ii. Αν επιπλέον δίνεται ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $(-1, 14)$, να βρείτε τον τύπο της f .

Μονάδες 4

B4. Αν $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9, x \in \mathbb{R}$

i. Να κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Επιπλέον να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2025$ έχει μοναδική θετική λύση.

Μονάδες 6

ii. Να χαράξετε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 3



ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(2x - 1) = 4x(1 - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $e^{g(x)} - \kappa x = \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον η ευθεία $y = x$ εφάπτεται της C_g στην αρχή των αξόνων.

Γ.1 Να αποδείξετε ότι είναι $f(x) = 1 - x^2$ για $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln(x + 1)$ για κάθε $x > -1$.

Μονάδες 4

Γ.2 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και ότι ισχύει:

$$g^{-1}(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}.$$

Μονάδες 3

Γ.3 Αν $h(x) = (f + g^{-1})(x)$, να δείξετε ότι $h(x) = e^x - x^2, x \in \mathbb{R}$ και να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

Μονάδες 5

Γ. 4. i. Να δείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{e^{x^2-1} - 1}{x^2 + 1} < \frac{x^2 - 1}{e},$$

Μονάδες 4

ii. Να αποδείξετε ότι η $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (-1, 0)$

Μονάδες 3

Γ.5 Έστω M σημείο που κινείται κατά μήκος της C_h και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $\frac{1}{2}$ μονάδες/s. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου στο οποίο, η εφαπτομένη της C_h στο $M(a(t), h(a(t)))$ τέμνει τον άξονα



Γ' ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

y' , τη χρονική στιγμή t_0 που το M διέρχεται από το σημείο καμπής $K(\ln 2, 2 - \ln^2 2)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x) + \int_0^1 f(x) dx = e^{\sqrt{x}} - e \cdot x - \frac{e}{2} + 2, \quad x \geq 0$$

Δ.1 Να δείξετε ότι: $f(x) = e^{\sqrt{x}} - e \cdot x, \quad x \geq 0$

Μονάδες 6

Δ.2 Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{f(x)}$

Μονάδες 3

Δ.3 α. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να εξετάσετε αν έχει και άλλα κοινά σημεία με τη C_f

Μονάδες 2+4=6

Δ.4 Να δείξετε ότι για κάθε $x > 1$, ισχύει:

$$\frac{e^{\sqrt{x}} - 2e\sqrt{x}}{\sqrt{x}} < \frac{2}{e} [f(x+e) - f(x)] < \frac{e^{\sqrt{x+e}} - 2e\sqrt{x+e}}{\sqrt{x+e}}$$

Μονάδες 4



Δ.5 Θεωρούμε συνάρτηση $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$g(x) = F(\varepsilon\varphi x) - F(e \cdot x), x \geq 0$$

όπου F , μια παράγουσα της f .

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g δέχεται τουλάχιστον μία οριζόντια

εφαπτομένη στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 6

Να έχετε επιτυχία!!!