



Διαγώνισμα Προσομοίωσης

Τελικό

Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

A.1 Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α, β]$. Αν G είναι μια

παράγουσα της f στο $[α, β]$, τότε να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = G(\beta) - G(\alpha)$

Μονάδες 7

Σελ. 217, σχολικό βιβλίο

A.2 Έστω μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

Σελ. 141, σχολικό βιβλίο

A.3 Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Κάθε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ που είναι “1-1” είναι και γνησίως μονότονη»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι Αληθής, η το γράμμα Ψ, αν είναι Ψευδής.

Μονάδα 1

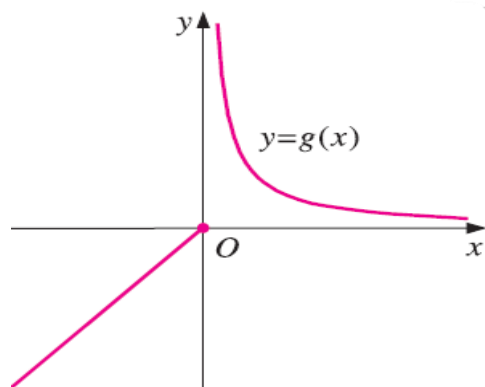
α. Ψ

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα α.

Μονάδες 3

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$g(x) = \begin{cases} x & , \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & , \quad x > 0 \end{cases}$$



Είναι 1-1 αλλά δεν είναι γνησίως μονότονη.

A.4 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, η Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

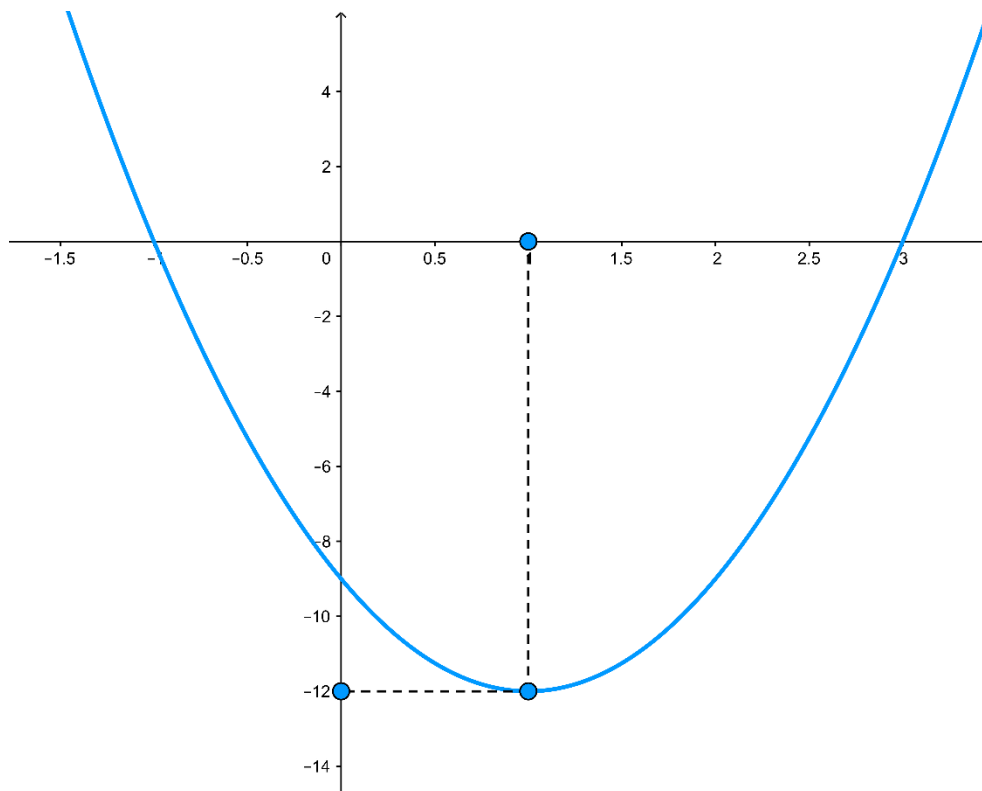
- i. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .
- ii. Κάθε πιθανή θέση τοπικού ακροτάτου μιας συνάρτησης f σε διάστημα Δ , είναι και κρίσιμο σημείο της f στο Δ .
- iii. Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$
- iv. Αν για μια συνάρτηση f , συνεχή σε διάστημα $[\alpha, \beta]$, ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$, τότε είναι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.
- v. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο x_0 , τότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 .

Μονάδες 2x5 = 10

i. Σ ii. Λ iii. Λ iv. Λ v. Σ

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται στο παρακάτω σχήμα η γραφική παράσταση της πρώτης παραγώγου f' μίας συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 5

Από την γραφική παράσταση έχουμε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, δεδομένου ότι είναι παραγωγίσιμη, και ισχύει ότι:

- $f' > 0$ για $x \in (-\infty, -1)$ και $x \in (3, +\infty)$ και f συνεχής. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, -1]$ και $[3, +\infty)$ (Μον. 1)
- $f' < 0$ για $x \in (-1, 3)$ και f συνεχής. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-1, 3]$ (Μον. 1)



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

Παρατηρούμε επίσης ότι η γραφική παράσταση της f' , τέμνει τον άξονα x' για

$x = -1$ και $x = 3$. Έτσι έχουμε ότι $f'(-1) = 0$ και $f'(3) = 0$.

(Μον. 1)

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας της f είναι:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	○	+
$f(x)$	↗		↘	↗

Οπότε η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = -1$, το $f(-1)$ και τοπικό ελάχιστο στο $x = 3$, το $f(3)$

(Μον. 2)

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμψής .

Μονάδες 5

Δεδομένου ότι:

- f' είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο διάστημα $(-\infty, 1]$,

συμπεραίνουμε ότι η f είναι κοίλη στο $(-\infty, 1]$

(Μον. 1)

και

- f' είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο διάστημα $[1, +\infty)$, οπότε η f

είναι κυρτή στο $(1, +\infty)$.

(Μον. 1)

Παρατηρούμε επίσης ότι η f' παρουσιάζει ακρότατο στο $x=1$, εσωτερικό του $\mathbb{R}$.

(Μον. 1)

Επιπλέον η f' είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$.

Οπότε, από θεώρημα Fermat έχουμε ότι $f''(1) = 0$.

(Μον. 1)



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

Και δεδομένου ότι εναλλάσσει κυρτότητα εκατέρωθεν, το σημείο με

συντεταγμένες $(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της f .

Οπότε ο πίνακας κυρτότητας της f είναι:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)$		Σ.Κ	

(Μον. 1)

B3. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι πολυώνυμο τρίτου βαθμού

$$f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

i. Αν $f(0) = 9$ και ο ρυθμός μεταβολής της δεύτερης παραγώγου στο 0 είναι 6, να

δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\delta = 9$.

Μονάδες 2

ii. Αν επιπλέον δίνεται ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο

$(-1, 14)$, να βρείτε τον τύπο της f .

Μονάδες 4

i. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.

$$f(0) = \alpha \cdot 0^3 + \beta \cdot 0^2 + \gamma \cdot 0 + \delta = 9 \Rightarrow \delta = 9$$

(Μον. 1)

Έχουμε ότι $f'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$, $f''(x) = 6\alpha x + 2\beta$ και $f^{(3)}(x) = 6\alpha$.

$$\text{Άρα } f^{(3)}(0) = 6 \Rightarrow 6\alpha = 6 \Rightarrow \alpha = 1$$

(Μον. 1)

ii. Άρα η συνάρτηση θα είναι $f(x) = x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 9$

Οι θέσεις τοπικών ακροτάτων είναι εσωτερικά σημεία του πεδίου ορισμού στα οποία η

f είναι παραγωγίσιμη. Οπότε, για τη θέση $x=-1$, έχουμε:

$$f'(-1) = 0 \Leftrightarrow 3(-1)^2 + 2\beta(-1) + \gamma = 0 \Rightarrow 3 - 2\beta + \gamma = 0 \Rightarrow -2\beta + \gamma = -3.$$

(Μον. 1)



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

Από το σημείο καμπής έχουμε $f''(1) = 0 \Leftrightarrow 6 \cdot 1 + 2\beta = 0 \Rightarrow 2\beta = -6 \Rightarrow \beta = -3$.

(Μον. 1)

Άρα $-2\beta + \gamma = -3 \Rightarrow -2 \cdot (-3) + \gamma = -3 \Rightarrow \gamma = -9$

(Μον. 1)

Άρα η συνάρτηση είναι $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$.

(Μον. 1)

B4. i. Να κατασκευάσετε τον πίνακα μεταβολών της f και να βρείτε το σύνολο τιμών της. Επιπλέον να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2025$ έχει μοναδική θετική λύση.

Μονάδες 6

ii. Να χαράξετε πρόχειρα τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 3

i. Ο πίνακας μεταβολών της f είναι:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	-	○	+
$f''(x)$	-		-	○	+	+
$f(x)$						

(Μον. 1)

Για το Σύνολο τιμών βασιζόμαστε στον πίνακα μονοτονίας:

- Στο διάστημα $(-\infty, -1]$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε:

$$f((-\infty, -1]) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1)] = (-\infty, 14] \quad (\text{Μον. 1})$$

$$\text{Δεδομένου ότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 - 9x + 9) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

- Στο διάστημα $(-1, 3)$ η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα οπότε:



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

$$f((-1, 3)) = \left(\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \right) = (-18, 14) \quad (\text{Μον. } 1)$$

- Στο διάστημα $[3, +\infty)$ η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα οπότε:

$$f([3, +\infty)) = \left[f(3), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = [-18, +\infty) \quad (\text{Μον. } 1)$$

$$\text{Δεδομένου ότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 - 9x + 9) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

$$f(D_f) = f((-\infty, -1]) \cup f((-1, 3)) \cup f([3, +\infty)) =$$

$$(-\infty, 14] \cup (-18, 14) \cup [-18, +\infty) = \mathbb{R} \quad (\text{Μον. } 0,5)$$

$$f(x) = 2025 \quad (1)$$

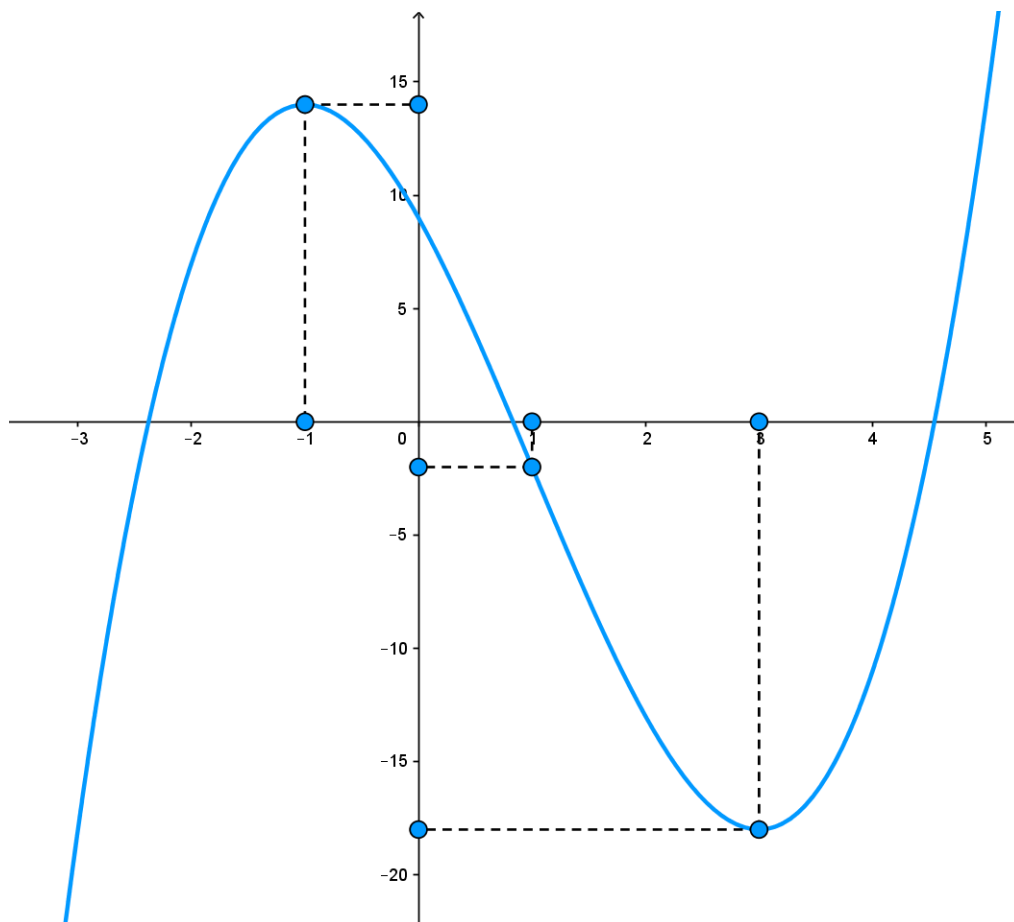
Παρατηρούμε ότι $2025 \in f([3, +\infty)) = [-18, +\infty)$ οπότε, συμπεραίνουμε ότι

υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της (1) στο διάστημα $[3, +\infty)$ και δεδομένου ότι η f

είναι γνησίως αύξουσα στο $[3, +\infty)$, η ρίζα είναι μοναδική. Άρα η (1) έχει ακριβώς

μία θετική λύση. (Μον. 1,5)

ii. Η γραφική παράσταση της f είναι:



Σχεδίαση ακροτάτων (Μον. 1)

Σχεδίαση σημείων καμπής (Μον. 1)

Χάραξη γραφικής παράστασης (Μον. 1)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(2x - 1) = 4x(1 - x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και
- $g: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε $e^{g(x)} - \kappa x = \lambda$ με $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Επιπλέον η ευθεία $y = x$ εφάπτεται της C_g στην αρχή των αξόνων.



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

Γ.1 Να αποδείξετε ότι είναι $f(x) = 1 - x^2$ για $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln(x + 1)$ για κάθε $x > -1$.

Μονάδες 4

Έχουμε $f(2x - 1) = 4x(1 - x) = 4x - 4x^2, x \in \mathbb{R}$

Θέτω $u = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{u+1}{2}, u \in \mathbb{R}$

(Μον. 1)

$$f(u) = 4 \cdot \frac{u+1}{2} - 4 \cdot \left(\frac{u+1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow f(u) = 2(u+1) - (u+1)^2$$

$$\Leftrightarrow f(u) = 2u + 2 - u^2 - 2u - 1$$

$$\Leftrightarrow f(u) = 1 - u^2$$

Τελικά για $u = x, f(x) = 1 - x^2, x \in \mathbb{R}$

(Μον. 1)

Έχουμε $e^{g(x)} = \kappa x + \lambda, \kappa x + \lambda > 0$

$\Leftrightarrow g(x) = \ln(\kappa x + \lambda), \kappa x + \lambda > 0$

(Μον. 0,5)

η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{\kappa}{\kappa x + \lambda}$

(Μον. 0,5)

και η C_g εφάπτεται στην $y = x$ στο $(0,0)$ άρα:

$$\begin{cases} g'(0) = 1 \\ g(0) = 0 \end{cases} \stackrel{\lambda > 0}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \frac{\kappa}{\lambda} = 1 \\ \ln \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = \lambda \\ \lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \kappa = 1 \\ \lambda = 1 \end{cases}$$

(Μον. 1)

Συνεπώς $g(x) = \ln(x + 1)$ για κάθε $x > -1$

Γ.2 Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g αντιστρέφεται και ότι ισχύει:

$$g^{-1}(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}.$$



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

Μονάδες 3

Η g παραγωγίσιμη στο $(-1, +\infty)$ με $g'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$ οπότε η g είναι γνησίως
αύξουσα στο $(-1, +\infty)$, επομένως και 1-1 άρα αντιστρέφεται. (Μον. 1)

$$y = g(x)$$

$$\Leftrightarrow y = \ln(x + 1)$$

$$\Leftrightarrow e^y = x + 1, x > -1$$

$$\Leftrightarrow e^y - 1 = x$$

$$\Leftrightarrow g^{-1}(y) = e^y - 1$$

Τελικά με αντικατάσταση όπου y το $x : g^{-1}(x) = e^x - 1$ (Μον. 1)

Επιπλέον g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(-1, +\infty)$ και

$$D_{g^{-1}} = g(D_g) = g^{\wedge} = \left(\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = {}^* = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$$

* θέτω $x + 1 = u$

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1) = 0, u_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln u = -\infty \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty \quad (\text{Μον. 1})$$

$$\text{Τελικά } g^{-1}(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$$

Γ.3 Αν $h(x) = (f + g^{-1})(x)$, να δείξετε ότι $h(x) = e^x - x^2, x \in \mathbb{R}$ και να
μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής

Μονάδες 5



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

$$\begin{aligned} h(x) &= (f + g^{-1})(x) = f(x) + g^{-1}(x) = 1 - x^2 + e^x - 1 = \\ &= e^x - x^2 \end{aligned}$$

Για κάθε $x \in D_h = D_f \cap D_{g^{-1}} = \mathbb{R}$

(Μον. 1)

Η συνάρτηση h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε,

$$h'(x) = (e^x - x^2)' = e^x - 2x$$

Και

$$h''(x) = (e^x - 2x)' = e^x - 2$$

(Μον. 0,5+0,5=1)

Η h είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, οπότε:

$$h''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \Leftrightarrow e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$$

Για $x > \ln 2 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow e^x - 2 > 0 \Leftrightarrow h''(x) > 0$,

αντιστοίχως για $x < \ln 2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow h''(x) < 0$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
h''	$-$		$+$
h	$\cap$		$\cup$

Σ.Κ.

(Μον. 2)



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

Σύμφωνα με τον παραπάνω πίνακα η h είναι κυρτή στο $[\ln 2, +\infty)$ και κοίλη στο $(-\infty, \ln 2]$, ενώ παρουσιάζει σημείο καμπής στο $x = \ln 2$ το $K(\ln 2, h(\ln 2))$ όπου $h(\ln 2) = 2 - \ln^2 2$

(Μον. 1)

Γ. 4. i. Να δείξετε ότι η h είναι γνησίως αύξουσα και να λύσετε την ανίσωση:

$$\frac{e^{x^2-1} - 1}{x^2 + 1} < \frac{x^2 - 1}{e},$$

Μονάδες 4

Για να εξετάσουμε την ως προς την μονοτονία θα πρέπει να συγκεντρώσουμε στον ίδιο πίνακα τις

$$h'', h', h$$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
h''	$-$		$+$
h'		Ο.Ε.	
h			

(Μον. 1)

Η h' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x = \ln 2$ το $h'(\ln 2)$

Άρα $h'(x) \geq h'(\ln 2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) \geq h'(\ln 2)$$

$$\Leftrightarrow h'(x) \geq e^{\ln 2} - 2\ln 2$$



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

$$\Leftrightarrow h'(x) \geq 2 - 2\ln 2$$

$$\Leftrightarrow h'(x) \geq 2(1 - \ln 2) > 0$$

άρα $h'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(Μον. 1)

Συνεπώς η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

$$\frac{e^{x^2-1} - 1}{x^2 + 1} < \frac{x^2 - 1}{e}$$

$$\stackrel{\cdot e(x^2+1)>0}{\Leftrightarrow} e(x^2 + 1) \cdot \frac{e^{x^2-1} - 1}{x^2 + 1} < e(x^2 + 1) \cdot \frac{x^2 - 1}{e}$$

$$\Leftrightarrow e \cdot (e^{x^2-1} - 1) < (x^2 + 1) \cdot (x^2 - 1)$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} - e < x^4 - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} - x^4 < e - 1$$

$$\Leftrightarrow e^{x^2} - (x^2)^2 < e - 1$$

$$\Leftrightarrow h(x^2) < h(1)$$

$$\stackrel{h \nearrow}{\Leftrightarrow} x^2 < 1$$

$$\Leftrightarrow |x| < 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x < 1$$

(Μον. 1+1+1=3)

ii. Να αποδείξετε ότι η $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα $x_0 \in (-1, 0)$

Μονάδες 3



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

Για να αποδείξουμε ότι η h έχει μοναδική ρίζα, αρκεί να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μοναδική λύση.

- Η h είναι συνεχής στο $[-1, 0]$

$$h(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 = \frac{1-e}{e} < 0$$

$$h(0) = e^0 - 0 = 1 > 0$$

$$h(-1) \cdot h(0) < 0 \quad (\text{Μον. 1})$$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε

$$h(x_0) = 0 \quad (\text{Μον. 1})$$

Και επιπλέον η h είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, άρα το x_0 είναι μοναδικό. (Μον. 1)

Γ.5 Έστω M σημείο που κινείται κατά μήκος της C_h και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $\frac{1}{2}$ μονάδες/s . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου στο οποίο, η εφαπτομένη της C_h στο $M(a(t), h(a(t)))$ τέμνει τον άξονα $y'y$, τη χρονική στιγμή t_0 που το M διέρχεται από το σημείο καμπής $K(\ln 2, 2 - \ln^2 2)$.

Μονάδες 6

Από την εκφώνηση της άσκησης έχουμε ότι : $\alpha'(t) = \frac{1}{2}$ μονάδες/s , $\alpha(t_0) = \ln 2$
και $h(\alpha(t_0)) = 2 - \ln^2 2$



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

και η εφαπτομένη της C_h στο M είναι: $y - h(a) = h'(a)(x - a)$, η οποία τέμνει τον άξονα $y'y$ για $x = 0$ οπότε η τεταγμένη του είναι:

$$\begin{aligned} y &= h(a) - a \cdot h'(a) = e^a - a^2 - a(e^a - 2a) = e^a - a^2 - ae^a + 2a^2 \\ &= e^a + a^2 - ae^a = e^a(1 - a) + a^2 \end{aligned}$$

(Μον. 1)

όπου σε συνάρτηση με το χρόνο έχουμε

$$y(t) = e^{a(t)}(1 - a(t)) + a^2(t)$$

(Μον. 1)

Οπότε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης είναι:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y'(t) &= \left(e^{a(t)}(1 - a(t)) + a^2(t) \right)' \\ \Leftrightarrow y'(t) &= e^{a(t)}a'(t)(1 - a(t)) - e^{a(t)}a'(t) + 2a(t)a'(t) \\ \Leftrightarrow y'(t) &= -e^{a(t)}a'(t)a(t) + 2a(t)a'(t) \\ \Leftrightarrow y'(t) &= a'(t)a(t)(2 - e^{a(t)}) \end{aligned}$$

(Μον. 2)

Και την χρονική στιγμή $t = t_0$: $y'(t_0) = a'(t_0)a(t_0)(2 - e^{a(t_0)})$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y'(t_0) &= a'(t_0)a(t_0)(2 - e^{a(t_0)}) = \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \cdot (2 - e^{\ln 2}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \cdot (2 - 2) = 0 \text{ μονάδες/s} \end{aligned}$$

(Μον. 2)



Ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου, δείχνει την ταχύτητα με την οποία κινείται η προβολή του σημείου στον άξονα $y'y$. Ο στιγμιαίος ρυθμός μεταβολής που βρήκαμε παραπάνω, όντας μηδέν, υποδηλώνει στιγμιαία ακινησία της προβολής του M στον $y'y$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$f(x) + \int_0^1 f(x)dx = e^{\sqrt{x}} - e \cdot x - \frac{e}{2} + 2, \quad x \geq 0$$

Δ.1 Να δείξετε ότι: $f(x) = e^{\sqrt{x}} - e \cdot x, \quad x \geq 0$

Μονάδες 6

$$f(x) + \int_0^1 f(x)dx = e^{\sqrt{x}} - e \cdot x - \frac{e}{2} + 2, \quad x \geq 0 \quad (1)$$

Θέτουμε $\int_0^1 f(x)dx = c, \quad c \in \mathbb{R}$

$$(1) \Leftrightarrow f(x) + c = e^{\sqrt{x}} - e \cdot x - \frac{e}{2} + 2 \Leftrightarrow f(x) = e^{\sqrt{x}} - e \cdot x - \frac{e}{2} + 2 - c \quad (\text{Μον. 1})$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία σχέση, έχουμε:

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \left(e^{\sqrt{x}} - e \cdot x - \frac{e}{2} + 2 - c \right) dx$$

$$\Leftrightarrow c = \int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx - e \int_0^1 x dx + \left(-\frac{e}{2} + 2 - c \right) \int_0^1 1 dx, \quad (2) \quad (\text{Μον. 1})$$

Βρίσκουμε τα επιμέρους ολοκληρώματα:



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

- $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx$

Θέτουμε $\sqrt{x} = u \stackrel{u>0}{\iff} x = u^2$

Τότε: $dx = 2u du$

Βρίσκουμε τα νέα όρια:

Για $x=0 \rightarrow u=0$ και για $x=1 \rightarrow u=1$

Οπότε: $\int_0^1 e^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 2ue^u du = 2 \int_0^1 u(e^u)' du = 2[ue^u]_0^1 - 2 \int_0^1 e^u du \quad (\text{Μον. 2})$

$= 2[ue^u]_0^1 - 2[e^u]_0^1 = 2e - 2e + 2 = 2$

- $\int_0^1 x dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

- $\int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1 \quad (\text{Μον. 1})$

Από (2) έχουμε: $c = 2 - \frac{e}{2} - \frac{e}{2} + 2 - c \Leftrightarrow 2c = 4 - e \Leftrightarrow c = 2 - \frac{e}{2}$

Οπότε είναι $f(x) = e^{\sqrt{x}} - e \cdot x, x \geq 0 \quad (\text{Μον. 1})$

Δ.2 Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{f(x)}$

Μονάδες 3

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x}} - e \cdot x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{x} - e \right)$$

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x} \stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \quad (*\text{μορφή } \frac{\infty}{\infty}, \text{De L'Hospital})$

$= \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{2u} \quad (\text{Θέτω } \sqrt{x} = u, \text{ τότε } u \rightarrow +\infty)$

$\stackrel{*}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^u}{2} = +\infty \quad (*\text{μορφή } \frac{\infty}{\infty}, \text{De L'Hospital}) \quad (\text{Μον. 1})$



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

Οπότε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$ (Μον. 1)

Δεδομένου ότι δεν υπάρχει το όριο του $\eta\mu x$ στο $+\infty$, εργαζόμαστε ως εξής:

$$\left| \frac{\eta\mu x}{f(x)} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|f(x)|} \leq \frac{1}{|f(x)|} \quad \text{για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

Οπότε ισχύει:

$$\frac{-1}{|f(x)|} \leq \frac{\eta\mu x}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|} \quad \text{για κάθε } x \in [0, +\infty)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{|f(x)|} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{|f(x)|} = 0$$

Από Κριτήριο Παρεμβολής συμπεραίνουμε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)} = 0 \quad (\text{Μον. 1})$$

Δ.3 α. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ και να εξετάσετε αν έχει και άλλα κοινά σημεία με τη C_f .

Μονάδες 2+4=6

α. Η $f(x) = e^{\sqrt{x}} - e \cdot x$, είναι συνεχής για κάθε $x \geq 0$

Και παραγωγίσιμη για κάθε $x > 0$,

$$\text{με } f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} - e, \quad x > 0 \text{ και } f''(x) = \frac{1}{4x} e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}, \quad x > 0$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4x} e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$$



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

$$f''(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4x} e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 1 \quad (\text{Μον. 1})$$

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
f''			—	0	+	
f						

Η f είναι κοίλη στο διάστημα $(0, 1]$, κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$ και παρουσιάζει καμπή στο σημείο $A(1, 0)$. (Μον. 1)

β. Στο σημείο $A(1, f(1)) \equiv A(1, 0)$ είναι $f'(1) = \frac{-e}{2}$

και η εφαπτομένη στο A έχει εξίσωση (ε): $y = \frac{-e}{2}(x - 1)$ (Μον. 1)

Το σημείο $A(1, 0)$ είναι σημείο καμπής της f , οπότε η εφαπτομένη (ε) διαπερνά τη γραφική παράσταση στο σημείο επαφής A . (Μον. 1)

- Για $x < 1$, η f είναι κοίλη, οπότε η (ε) βρίσκεται πάνω από τη C_f

$$f(x) < \frac{-e}{2}(x - 1)$$

- Για $x > 1$, η f είναι κυρτή, οπότε η (ε) βρίσκεται κάτω από τη C_f

$$f(x) > \frac{-e}{2}(x - 1)$$

Συνεπώς το σημείο επαφής $A(1, 0)$ είναι το μοναδικό κοινό σημείο της εφαπτομένης με τη C_f . (Μον. 2)



Δ.4 Να δείξετε ότι για κάθε $x > 1$, ισχύει:

$$\frac{e^{\sqrt{x}} - 2e\sqrt{x}}{\sqrt{x}} < \frac{2}{e} [f(x+e) - f(x)] < \frac{e^{\sqrt{x+e}} - 2e\sqrt{x+e}}{\sqrt{x+e}}$$

Μονάδες 4

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Τ. στην f στο διάστημα $[x, x+e]$ με $x > 1$:

Η f είναι:

- συνεχής στο $[x, x+e]$
- παραγωγίσιμη στο $(x, x+e)$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (x, x+e)$: $f'(\xi) = \frac{f(x+e) - f(x)}{e}$ (Μον. 2)

Αποδείξαμε στο ερώτημα Δ3.α. ότι η f είναι κυρτή στο διάστημα $[1, +\infty)$. Οπότε η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ (Μον. 1)

Έτσι έχουμε: $x < \xi < x+e \stackrel{f'}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(\xi) < f'(x+e)$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} - e < \frac{f(x+e) - f(x)}{e} < \frac{1}{2\sqrt{x+e}} e^{\sqrt{x+e}} - e$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{x}} - 2e\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} < \frac{1}{e} [f(x+e) - f(x)] < \frac{e^{\sqrt{x+e}} - 2e\sqrt{x+e}}{2\sqrt{x+e}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{\sqrt{x}} - 2e\sqrt{x}}{\sqrt{x}} < \frac{2}{e} [f(x+e) - f(x)] < \frac{e^{\sqrt{x+e}} - 2e\sqrt{x+e}}{\sqrt{x+e}}, \quad x > 1 \quad (\text{Μον. 1})$$

Δ.5 Θεωρούμε συνάρτηση $g: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$g(x) = F(\varepsilon\varphi x) - F(e \cdot x), x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$$

όπου F , μια παράγουσα της f .



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g δέχεται τουλάχιστον μία οριζόντια εφαπτομένη στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 6

Η συνάρτηση $g(x) = F(\varepsilon\varphi x) - F(e \cdot x)$ είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{με } g'(x) = (F(\varepsilon\varphi x))' - (F(e \cdot x))'$$

$$= f(\varepsilon\varphi x)(\varepsilon\varphi x)' - f(e \cdot x)(e \cdot x)' = \frac{1}{\sin^2 x} f(\varepsilon\varphi x) - e f(e \cdot x) \quad (\text{Μον. 1})$$

Για να δείξουμε ότι η C_g δέχεται τουλάχιστον μία οριζόντια εφαπτομένη στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$g'(\xi) = 0 \quad (\text{Μον. 1})$$

Εξετάζουμε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle:

- $g(0) = F(\varepsilon\varphi 0) - F(e \cdot 0) = 0$
- Η g δεν ορίζεται στο $\frac{\pi}{2}$ (η εφαπτομένη δεν ορίζεται στο $\frac{\pi}{2}$)

Αναζητούμε εσωτερικό σημείο του $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ στο οποίο η g μηδενίζεται

$$\text{Δηλαδή } x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) : g(x_0) = 0 \quad (3)$$

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow F(\varepsilon\varphi x_0) - F(e \cdot x_0) = 0 \Leftrightarrow F(\varepsilon\varphi x_0) = F(e \cdot x_0) \quad (4)$$

Από την (4) συμπεραίνουμε ότι κάθε λύση της εξίσωσης $\varepsilon\varphi x = e \cdot x$ είναι λύση της (3)

Θεωρούμε συνάρτηση $\varphi: \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, με $\varphi(x) = \varepsilon\varphi x - e \cdot x$



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

Πρέπει να δείξουμε ότι η $\varphi(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

(Μον. 1)

Βρίσκουμε υποδιάστημα του $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ στο οποίο ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano:

$$\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 - e \cdot \frac{\pi}{4} < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\varepsilon \varphi x - e x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\eta \mu x}{\sigma \nu \nu x} - e x \right) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\eta \mu x \frac{1}{\sigma \nu \nu x} - e x \right),$$

Δεδομένου ότι $\sigma \nu \nu x > 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sigma \nu \nu x = 0$

έχουμε ότι $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\sigma \nu \nu x} \right) = +\infty$

Οπότε $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \varphi(x) = +\infty$

Άρα υπάρχει κ κοντά στο $\frac{\pi}{2}$ με $\kappa < \frac{\pi}{2}$ τέτοιο, ώστε: $\varphi(\kappa) > 0$ (Μον. 1)

Η φ είναι συνεχής στο $\left[\frac{\pi}{4}, \kappa\right] \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

και $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) \varphi(\kappa) < 0$

Από Θ. Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_o \in \left(\frac{\pi}{4}, \kappa\right) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$:

$$\varphi(x_o) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon \varphi x_o - e x_o = 0 \Leftrightarrow \varepsilon \varphi x_o = e x_o \Rightarrow F(\varepsilon \varphi x_o) = F(e \cdot x_o)$$

Οπότε η g είναι συνεχής στο $[0, x_o] \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ και παραγωγίσιμη στο $(0, x_o) \subseteq \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

με $g(0) = g(x_o) = 0$ (Μον. 1)



ΓΕΛ

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού

23/4/2025

Από θεώρημα Rolle συμπεραίνουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο,
ώστε:

$$g'(\xi) = 0$$

Δηλαδή υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $M(\xi, g(\xi))$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_g

είναι οριζόντια.

(Μον. 1)