

Θέμα 1

Δίνονται f, g συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$.

Σωστό ή Λάθος ;

α) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

β) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$

γ) Αν $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$

δ) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx$ τότε $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

ε) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

(Μονάδες 10)

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+3}{x+2}$, $x \in (-2, +\infty)$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^0 f(x) dx$

(Μονάδες 10)

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln(x^2 + 1)$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το $\int_{-1}^0 f(x) dx$

(Μονάδες 10)

γ) Αν $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx < (\beta - \alpha) \cdot f(\beta)$

(Μονάδες 10)

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2 + \sin x - \eta \mu x$, $x \in [0, 2\pi]$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f ,

τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 0$, $x = 2\pi$.

(Μονάδες 10)

γ) Αν $g(x) = f(x) + 2 - \sin x$, να υπολογίσετε το $\int_0^{2\pi} x \cdot g(x) dx$

(Μονάδες 10)

Θέμα 1

Σωστό ή Λάθος ;

- 1) Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$
- 2) Αν f συνεχής στο (α, β) τότε η f έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο (α, β)
- 3) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$
- 4) Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ τότε f συνεχής στο α
- 5) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\beta) < 0$ τότε η f δεν έχει ρίζα.

(Μονάδες 10)

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{x-1} + \ln(x-1)$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 10)
- β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 > 1$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ (Μονάδες 10)
- γ) Για το x_0 του προηγούμενου ερωτήματος να εξετάσετε αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x-x_0-3}{f(x)}$ (Μονάδες 10)

Θέμα 3

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ με $f(0) = 1$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + x - 2 = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$ (Μονάδες 10)
- β) Αν $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} + x$, $x \in \mathbb{R}$ τότε:
 - i) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (Μονάδες 10)
 - ii) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(f(x) - 1) \cdot n\mu \frac{1}{x} \right]$ (Μονάδες 10)

Θέμα 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3 \ln(x-4) + 2 & , x \in (4,5) \\ \frac{\alpha+4}{x-2} + 1 & , x \in [5, +\infty) \end{cases}$

- α) Να αποδείξετε ότι $\alpha = -1$ (Μονάδες 5)
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (Μονάδες 10)
- γ) Αν $\theta \in [0, 2\pi]$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $4f(x) - 6 - \eta\mu\theta = 0$ (Μονάδες 10)
- δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1-2x}{2-f(x)}$ (Μονάδες 5)

Θέμα 1

α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ ; (5 μονάδες)

β) Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1; (5 μονάδες)

γ) Να αντιστοιχήσετε σωστά :

1. $f(x) = 4x^3 + 3$	α) Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 3
2. $f(x) = e^{-x+4} + 3$	β) Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 4
3. $f(x) = (x - 3)^2 + 4$	γ) Η μέγιστη τιμή της f είναι το 4
4. $f(x) = 4 - (x - 3)^2$	δ) Η μέγιστη τιμή της f είναι το 3
5. $f(x) = (x - 4)^2 + 3$	ε) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
	στ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

(5 μονάδες)

δ) Σωστό ή Λάθος ;

- 1) Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε είναι 1-1.
- 2) Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της.
- 3) Αν μια συνάρτηση έχει ακριβώς μια ρίζα τότε είναι 1-1.
- 4) Αν μια συνάρτηση έχει δυο ρίζες τότε δεν είναι 1-1.
- 5) Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε έχει μια ακριβώς ρίζα.

(10 μονάδες)

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

α) Να εξετάσετε αν η f είναι 1-1. (5 μονάδες)

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της f . (5 μονάδες)

γ) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$ (5 μονάδες)

δ) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$ (5 μονάδες)

ε) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 x}{f(x) - 1}$ (5 μονάδες)

Θέμα 3

A) Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 2x}{x} & , \quad x < 0 \\ \alpha x + \beta & , \quad x \in [0,1] \\ \frac{4}{(x-3)^2} & , \quad x \in (1,3) \end{cases}$$

α) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ (5 μονάδες)

β) Αν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ υπάρχουν, να υπολογίσετε τα α και β . (10 μονάδες)

B) Δίνεται συνάρτηση g για την οποία ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 3} [(x-3)^2 \cdot g(x) + 5] = 2$

Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ (10 μονάδες)

Θέμα 4

A) Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) + f^3(x) = e^{x+3} + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1. (3 μονάδες)

β) Να λύσετε την εξίσωση: $f(1 + x^3 + \ln x) = f(2)$ (3 μονάδες)

B) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + 4}{e^x + 2}$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (3 μονάδες)

β) Να βρείτε την f^{-1} (3 μονάδες)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $(f \circ f)(x) - f\left(\frac{5}{3}\right) < 0$ (3 μονάδες)

Γ) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ και $g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

α) Να βρείτε την $f \circ g$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $(f \circ g)\left(-\frac{1}{2}\right) > (f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right)$. (3 μονάδες)

β) Να μελετήσετε την $f \circ g$ ως προς τη μονοτονία. (3 μονάδες)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $(f \circ g)(x) - \ln(-2x) - 2 > 0$ (4 μονάδες)

Θέμα 1

Να αντιστοιχίσετε σωστά :

1. $f(x) = 4x^3 + 3$	α) Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 3
2. $f(x) = e^{-x+4} + 3$	β) Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 4
3. $f(x) = (x - 3)^2 + 4$	γ) Η μέγιστη τιμή της f είναι το 4
4. $f(x) = 4 - (x - 3)^2$	δ) Η μέγιστη τιμή της f είναι το 3
5. $f(x) = (x - 4)^2 + 3$	ε) Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$
	στ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$

(20 μονάδες)

Θέμα 2

Δίνεται $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(f(x)) + f^3(x) = e^{x+3} + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1. (10 μονάδες)

β) Να λύσετε την εξίσωση : $f(1 + x^3 + \ln x) = f(2)$ (10 μονάδες)

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x+4}{e^x+2}$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (10 μονάδες)

β) Να βρείτε την f^{-1} (10 μονάδες)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $(f \circ f)(x) - f\left(\frac{5}{3}\right) < 0$ (10 μονάδες)

Θέμα 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x+1}{e^x-1}$ και $g(x) = \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

α) Να βρείτε την $f \circ g$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι $(f \circ g)\left(-\frac{1}{2}\right) > (f \circ g)\left(\frac{1}{2}\right)$. (10 μονάδες)

β) Να μελετήσετε την $f \circ g$ ως προς τη μονοτονία. (10 μονάδες)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $(f \circ g)(x) - \ln(-2x) - 2 > 0$ (10 μονάδες)

Διαγώνισμα

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και

$$\text{ισχύει } f'(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ δηλαδή } (x)' = 1 \quad (5 \mu)$$

A2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο

$$\text{ορισμού της και ισχύει } f'(x) = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}, \text{ δηλαδή } (\varepsilon\phi x)' = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x} \quad (5 \mu)$$

A3. i) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

ii) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου

ορισμού της; (5 μ)

A4. Σωστό ή Λάθος;

α) Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0 .

β) Αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

γ) Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της.

δ) Αν $f: [a, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, τότε η f έχει μέγιστη τιμή.

ε) Αν $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$ τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$

(10 μ)

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3$ και $g(x) = x^2 + x + 1$

B1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

B2. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο, το οποίο έχει αρνητική τετμημένη. (5 μ)

B3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην $y = \frac{1}{11}x + 21$ (5 μ)

B4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g που είναι παράλληλη στην $y = 9x + 2026$ (5 μ)

B5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $g(x) - 2 - n\mu x = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{2})$ (5 μ)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & , x < -1 \\ \alpha x^2 + \beta & , x \in [-1, 2] \\ \frac{\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+2} - 2} & , x > 2 \end{cases}$

Γ1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(-2, f(-2))$. (5 μ)

Γ2. Να υπολογίσετε τα α, β . (7 μ)

Γ3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (3 μ)

Γ4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (5 μ)

Γ5. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 7)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. (5 μ)

Θέμα Δ

Δ1. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(21) < 21$ και $(f(x) - x)^2 = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της f . (5 μ)

Δ2. Έστω $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \sqrt{3})$

τέτοιο ώστε $2f(x_0) - \sqrt{3} + 3 = 0$. (5 μ)

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (3 μ)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (3 μ)

δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + f(x)}{x}$. (4 μ)

ε) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$,

η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$. (5 μ)

Καλή επιτυχία !!!

ΣΥΝΘΕΣΗ

Θέμα 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = 2x + 1$ και $g(x) = x^2$

- α) Να αποδείξετε ότι $(f \circ g)(1) \neq (g \circ f)(1)$
- β) Να εξετάσετε αν ισχύει $f \circ g = g \circ f$
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$
- δ) Αν $h(x) = g(x + 1) - g(x)$, να εξετάσετε αν ισχύει $h = f$
- ε) Να λύσετε την εξίσωση $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \left(\frac{g}{f}\right)(x)$

Θέμα 2

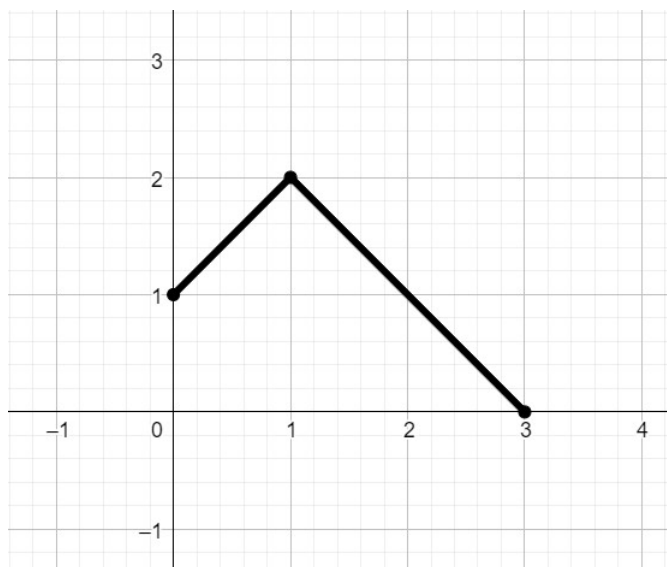
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = |x|$ και $g(x) = \ln x$

- α) Να βρείτε την $f \circ g$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
- β) Να βρείτε την $g \circ f$ και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
- γ) Να βρείτε το ευρύτερο σύνολο για το οποίο ισχύει $f \circ g = g \circ f$.
- δ) Να βρείτε γραφικά το πλήθος των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f \circ g$ με την ευθεία $y = 1$
- ε) Να βρείτε αλγεβρικά τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f \circ g$ με την $y = 1$

Θέμα 3

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- β) Να βρείτε την συνάρτηση f .
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = x$
- δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει $(f \circ f)(2) = 2$
- ε) Να αποδείξετε ότι $(f \circ f)(1) = (f \circ f)(3)$



Θέμα 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = 1 - \frac{2}{x-1}$ και $h(x) = \frac{\sqrt{x-3}}{\sqrt{x-1}}$

- α) Να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f$
- β) Να εξετάσετε αν ισχύει $g \circ f = h$
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $g(x - 3) + (g \circ f)(x) = \frac{x}{4} + h(x)$

Μονοτονία

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-3} + x^3 + 1$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^{2025} + 3x) - f(x + 3) < 0$
- γ) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι ισχύει $f(x + 1) + f(x + 4) < f(x + 2) + f(x + 8)$
- δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(|x|) - nx = 0$

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- β) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων της C_f τα οποία βρίσκονται κάτω από τον $x'x$.
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{2f(x)+1} < 1$
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $(e^{f(x)} - 2)(e^{f(2026)} + 1) < (e^{f(x)} + 1)(e^{f(2026)} - 2)$

Θέμα 3

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$g(x) = \begin{cases} \ln x & , x \geq 1 \\ e^x & , x < 1 \end{cases} \quad \text{και} \quad f(x) = \begin{cases} 3 + \ln x & , x \geq 1 \\ e^x & , x < 1 \end{cases}$$

- α) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.
- β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{f(x)} + \ln f(x) < e$
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $\frac{1}{f(x)} - \ln f(x) < 1$

Θέμα 4

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x + e^{\frac{x}{2}} + x^2$ και $g(x) = f(3 - x) - \sqrt{x}$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- β) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.
- γ) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + \sqrt{e^x} + \ln x - 1 < \sqrt{e}$
- δ) Να λύσετε την ανίσωση $e^{-g(x)} - e^{-g(2)} < g(x) - g(2)$

Αντίστροφη

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2-x} + 1$

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- β) Να βρείτε το κοινό σημείο της C_f με την ευθεία $y = x$.
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f^{-1}(x) = 2x$.
- δ) Για κάθε $x \in (2, +\infty)$ να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(f(x)) - f^{-1}(x) > 0$.

Θέμα 2

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$3f(x) + 2f^3(x) = 4x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- β) Να βρείτε την f^{-1} και να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.
- γ) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- δ) Να λύσετε την εξίσωση: $f(2e^{x-1}) - f(3-x) = 0$.

Θέμα 3

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) + 3f(x) = -2x + 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- β) Αν η C_f τέμνει την ευθεία $y = x$ σε σημείο A ,
να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A .
- γ) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως αύξουσα.
- δ) Αν $f(x) = \alpha x + \beta$ με $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, να βρείτε τις f και f^{-1} .

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + x$

- α) Να αποδείξετε ότι ισχύει $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα :
 - i) στο $[0, +\infty)$ ii) στο $(-\infty, 0]$ iii) στο $\mathbb{R}$
- γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 4$
 - i) Να αποδείξετε ότι οι g και g^{-1} είναι γνησίως αύξουσες.
 - ii) Έστω $x_0 \in (-4, +\infty)$ με $g(x_0) = g^{-1}(x_0)$. Να αποδείξετε ότι $g(x_0) = x_0$.
 - iii) Ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία τομής των C_g και $C_{g^{-1}}$

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

A1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Bolzano. (Μονάδες 3)

A2. Έστω συνάρτηση f ορισμένη σε διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό ,

να αποδείξετε ότι $f'(x_0) = 0$ (Μονάδες 6)

A3. Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 ; (Μονάδες 3)

A4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = e^x$.

Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι συναρτήσεις $f \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$ είναι ίσες.

Είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός του μαθητή;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

A5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με τις λέξεις **Σωστό** ή **Λάθος** .

α) Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι γνησίως μονότονη.

β) Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο τότε δεν είναι 1-1 .

γ) Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι συνεχής στο x_0 .

δ) Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 τότε είναι συνεχής στο x_0 .

ε) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

(Μονάδες 10)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \frac{32}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

B1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 5)

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$. (Μονάδες 3)

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f . (Μονάδες 5)

B4. Έστω συνάρτηση g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$ με $g(1) = 14$ και $g(2) = 21$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1,2)$ για το οποίο $f(x_0) = g(x_0)$. (Μονάδες 6)

B5. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν 16 cm^2 , να βρείτε τις διαστάσεις

του ορθογωνίου που έχει την ελάχιστη περίμετρο. (Μονάδες 6)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1 & , x \geq 0 \\ e^x - \frac{x}{e} + \beta & , x < 0 \end{cases}$ και $\beta = e^\alpha + \alpha^{21} - 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\beta = 0$ και $\alpha = 0$. (Μονάδες 6)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 21$. (Μονάδες 6)

Γ4. Ένα σημείο $K(x, y)$ ξεκινά από το $N(0,1)$ και κινείται στην καμπύλη $y = x^3 + x + 1$, $x \geq 0$.

Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του K είναι $x'(t) = \frac{1}{2}$ cm / sec .

Τα σημεία $A(-5,0)$, $E(-1,0)$ και $K(x, y)$, δημιουργούν τρίγωνο ΑΕΚ το οποίο έχει εμβαδόν $E(t)$.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΕΚ, τη στιγμή κατά την οποία αυτό έχει εμβαδόν 22 cm^2 . (Μονάδες 6)

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot (1 - k \cdot \ln x)$ για την οποία ισχύει $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $k = 2$ και στη συνέχεια να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 5)

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της C_f . (Μονάδες 3)

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία την "διαπερνά" και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι ισχύει $e^2 f(x) + 1 - 4ex \geq 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$. (Μονάδες 5)

Δ4. Αν $\alpha \in (0,1)$, να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$, την ευθεία $x = \alpha$ και την ευθεία $x = 1$.
Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} E(\alpha)$. (Μονάδες 7)

Δ5. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι ισχύει :
 $10 f(x^2 + 3) > 9 f(x^2 + 1) + f(x^2 + 21)$ (Μονάδες 5)

Ευχόμαστε επιτυχία στις εξετάσεις !!!

Οι καθηγητές σας

Βαλμά Ε.

Καστόρας Ν.

Οδηγίες: **Να λύσετε 5 θέματα.** ($5 \times 20 = 100$ μονάδες)

ΘΕΜΑ ① : Για την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , x < 0 \\ 1 - x^2 & , x \geq 0 \end{cases}$

- α. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}\right]$.
- β. Στην συνέχεια να βρείτε τα σημεία που η C_f τέμνει τον άξονα x' στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}\right]$.

ΘΕΜΑ ② : Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ με $2f(0) + f(1) = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$.

ΘΕΜΑ ③ : Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0, \pi]$ και ισχύει $0 < f(x) < 2$ για κάθε $x \in [0, \pi]$.

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) + x = 3f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$.

ΘΕΜΑ ④ : Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(1)x^3 + 3e^x) = +\infty$. Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης f .

ΘΕΜΑ ⑤ : Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f στο σύνολο $[-2, 2]$, για την οποία ισχύει $f^2(x) = 4 - x^2$ για κάθε $x \in [-2, 2]$.

ΘΕΜΑ ⑥ : Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = 1 - 2\eta\mu^2 x$, $x \in [-\pi, \pi]$.

ΘΕΜΑ ⑦ : Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f^2(\alpha) + f(\beta)(f(\beta) - 2) = -1$, να δειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{\pi}{4}$.

Θέμα 1

- α) Να αποδείξετε ότι : αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
- β) Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;
- γ) Έστω συνάρτηση $f(x) = x^{-\nu}$, $\nu \in \mathbb{N}^*$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει $f'(x) = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$, δηλαδή $(x^{-\nu})' = -\nu \cdot x^{-\nu-1}$

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} 1 + x + \sqrt{x} & , \quad x \geq 0 \\ \frac{n\mu x}{x} & , \quad x < 0 \end{cases}$$

- α) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$
- β) Να βρείτε την παράγωγο της f
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f , σε σημείο της $M(x_1, f(x_1))$ με $x_1 > 0$, η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = \frac{3}{2}x + 2026$
- δ) Να αποδείξετε ότι η C_f και η ευθεία $y = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$, έχουν κοινό σημείο $N(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (-\pi, 0)$.
- ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (0, +\infty)$ με $f(\xi) = e^{2026}$.

Θέμα 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2$ και $g(x) = x^2 + 4x$

- α) Να βρείτε την κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g
- β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $y = 2x - 1$

ΘΕΜΑ 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό ή Λάθος**.

- 1) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0
- 2) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι 1-1
- 3) Αν $f'(x) = 0$ για κάθε x στο πεδίο ορισμού της, τότε η f είναι σταθερή.
- 4) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$, τότε ισχύει $f(\beta) > 0$.
- 5) Το μεγαλύτερο από τα τοπικά μέγιστα μιας συνάρτησης είναι πάντοτε μέγιστο αυτής.

(Μονάδες 10)

β) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε διάστημα Δ .

Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να αποδείξετε ότι

η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

(Μονάδες 15)

ΘΕΜΑ 2

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{3-2x}{(x-2)^2}$ για κάθε $x \neq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x = 2$.

(Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν η f είναι

i. συνεχής στο 2.

(Μονάδες 8)

ii. παραγωγίσιμη στο 2.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + 5 = 3x$ έχει τουλάχιστον

μία ρίζα στο διάστημα $(1,2)$.

(Μονάδες 6)

γ) Αν είναι γνωστό ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1)$, να αποδείξετε ότι :

$$7f\left(\frac{3}{10}\right) > 2f\left(\frac{8}{10}\right) + 5f\left(\frac{1}{10}\right)$$

(Μονάδες 6)

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x)dx$

(Μονάδες 6)

ΘΕΜΑ 4

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές Α και Δ πάνω στον άξονα $x'x$ και τις κορυφές Β και Γ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $x < 1$ και $g(x) = \frac{e}{x}$, $x > 1$, αντίστοιχα. Έστω $A(\alpha, 0)$ με $\alpha < 1$.

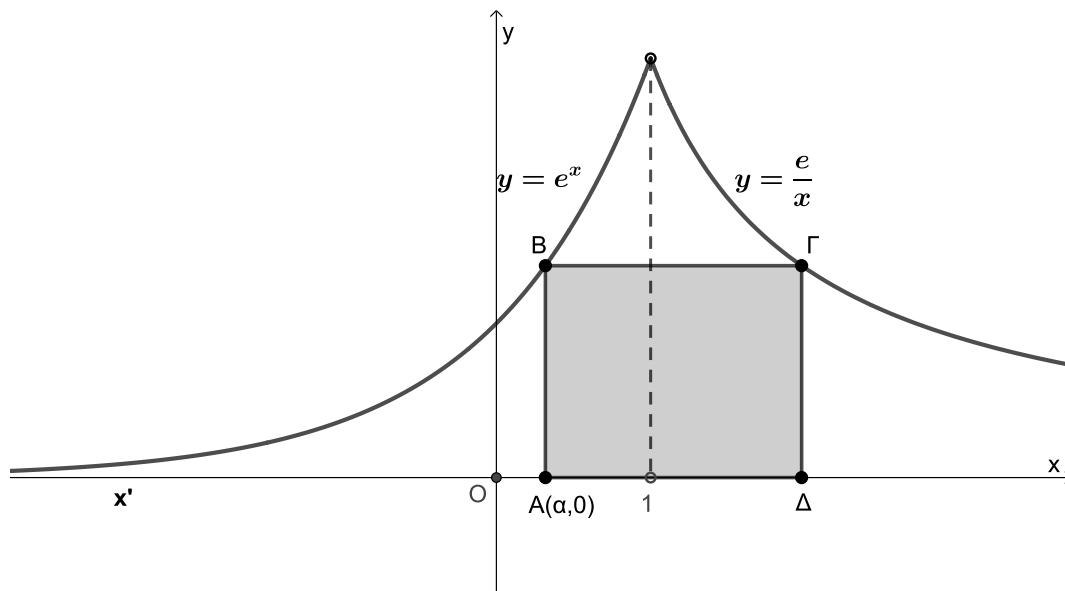
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η τετμημένη της κορυφής Δ είναι $x_\Delta = e^{1-\alpha}$, (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $E(\alpha) = e - \alpha e^\alpha$, $\alpha < 1$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ. (Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του α , για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται ίσο με 1. (Μονάδες 6)



Αν $f(x) = \ln x$ και $g(x) = e^{-x}$, τότε

α) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}, x \in \mathbb{R}^*$ Α Ψ

β) $(f \circ g)(x) = -x, x \in \mathbb{R}$ Α Ψ

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = l \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$. Α Ψ

Είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x \left(\frac{1}{x^2 + x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 + x} = 0$. Α Ψ

Αν $f(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$,
τότε κατ' ανάγκη $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) > 1$. Α Ψ

Ισχύει: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \eta \mu \frac{1}{x} \right) = 1$ Α Ψ

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$. Α Ψ

Αν $0 \leq f(x) \leq 1$ κοντά στο 0, τότε $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 0$. A Ψ

Αν $f(x) \leq \frac{1}{x^2}$, $x \in (\alpha, +\infty)$, τότε κατ' ανάγκη
θα είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$. A Ψ

Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 6} (f(x)g(x))$, τότε είναι ίσο με $f(6) \cdot g(6)$. A Ψ

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 1$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$ ή $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -1$. A Ψ

Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = 0$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$. A Ψ

Αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για $x \neq 4$
ισχύει $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 12}{x - 4}$, τότε το $f(4)$ είναι ίσο με 1. A Ψ

Αν η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(-1) = 4, f(1) = 3$,
τότε υπάρχει πραγματικός αριθμός $x_0 \in (-1, 1)$ τέτοιος,
ώστε $f(x_0) = \pi$. A Ψ

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $f'(x) \neq 0$ για όλα τα $x \in (0,1)$, τότε $f(0) \neq f(1)$. A Ψ

Αν η συνάρτηση f παραγωγίζεται στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\beta) < f(\alpha)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) < 0$. A Ψ

Αν οι f, g είναι συναρτήσεις παραγωγίσιμες στο $[\alpha, \beta]$, με $f(\alpha) = g(\alpha)$ και $f(\beta) = g(\beta)$, τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε στα σημεία $A(x_0, f(x_0))$ και $B(x_0, g(x_0))$ οι εφαπτόμενες να είναι παράλληλες. A Ψ

Αν $f'(x) = (x-1)^2(x-2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε:

α) το $f(1)$ είναι τοπικό μέγιστο της f A Ψ

β) το $f(2)$ είναι τοπικό ελάχιστο της f A Ψ

α) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης άρτιου βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. A Ψ

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη. A Ψ

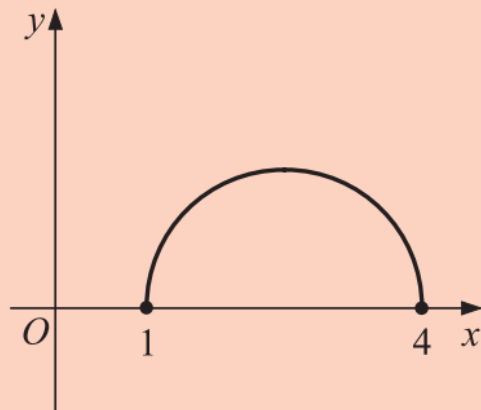
Η συνάρτηση $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ έχει πάντα ένα σημείο καμπής. A Ψ

Η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

α) $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1}$ A Ψ

β) $g(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 1)^2}$ A Ψ

Αν γραφική παράσταση της συνάρτησης f δίνεται από το παρακάτω σχήμα, τότε:



- | | | |
|--|---|---|
| i) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $(1,4)$ | A | Ψ |
| ii) το πεδίο ορισμού της $\frac{1}{f'}$ είναι το $[1,4]$ | A | Ψ |
| iii) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1,4)$ | A | Ψ |
| iv) υπάρχει $x_0 \in (1,4) : f'(x_0) = 0$. | A | Ψ |

Η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x + 1$ έχει:

- | | | |
|---------------------------------------|---|---|
| α) μια, τουλάχιστον, ρίζα στο $(0,1)$ | A | Ψ |
| β) μια, ακριβώς, ρίζα στο $(-1,0)$ | A | Ψ |
| γ) τρεις πραγματικές ρίζες | A | Ψ |

Αν $\alpha = \beta$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$. A Ψ

Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για
κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. A Ψ

Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$.

A

Ψ

Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$
για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

A

Ψ

Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$, τότε $f(\xi) = 0$ για κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$.

A

Ψ

Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$,
τότε η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές.

A

Ψ

Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 (x^3 - x)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του
χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση
της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$ και τον άξονα των x .

A

Ψ

ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ, ΠΕΛΛΑΣ, ΚΥΚΛΑΔΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 4

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι:

”Αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.”

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

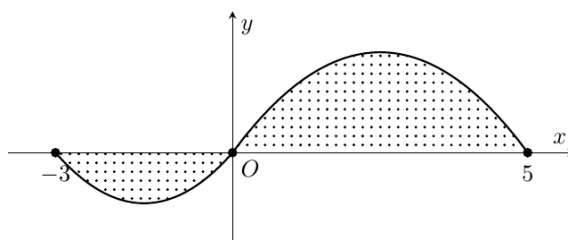
Μονάδες 4

A3. Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A . Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

i. Το εμβαδόν E του γραμμοσκιασμένου χωρίου του παρακάτω σχήματος



είναι $E = -\int_{-3}^0 f(x)dx + \int_0^5 f(x)dx$.

ii. Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 1$.

iii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής ”διαπερνά” την καμπύλη.

iv. Ισχύει ότι $(\alpha^x)' = x \cdot \alpha^{x-1}$, $\alpha > 0$.

v. $\int_a^b f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_a^b + \int_a^b f(x)g'(x)dx$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \neq -1$ και $g(x) = \frac{1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Μονάδες 5

B2. Αν $h(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η h είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

B3. Αν $h^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}$, $x \in (0, 1)$, να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της h^{-1} .

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \cdot \eta \mu g(x)]$.

Μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $xf'(x) + 1 = -f(x) - \ln x$ για κάθε $x > 0$,
- $f(1) = 1$

και συνάρτηση $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x(f(x) + \ln x)$ για κάθε $x > 0$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

- i. η g είναι σταθερή συνάρτηση στο $(0, +\infty)$,

Μονάδες 4

- ii. ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Μονάδες 2

Γ2. Να αποδείξετε ότι:

- i. η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$,

Μονάδες 2

- ii. η εξίσωση $x^x = e$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Μονάδες 3

Αν x_0 είναι η ρίζα του ερωτήματος Γ2ii,

Γ3. i. να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$.

Μονάδες 5

ii. Να λύσετε την εξίσωση

$$x_0 \cdot (x_0 f(x) + x - x_0) = -x + x_0$$

Μονάδες 4

Γ4. Ένα κινητό $\Sigma (x, f(x))$ ξεκινά από το σημείο $M (x_0, f(x_0))$ και κινείται στη γραφική παράσταση της f , με την τετμημένη του να ελλατώνεται με ρυθμό 2cm/s . Αν E το εμβαδόν του τριγώνου $ON\Sigma$ που ορίζουν τα σημεία $O(0, 0)$, $N(x, 0)$ και $\Sigma (x, f(x))$ με $0 < x < x_0$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική στιγμή που το Σ διέρχεται από το σημείο $A(1, 1)$.

Μονάδες 5

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+\alpha}, & x \leq 0, \\ x^2 \cdot e^{1-x} + 1, & x > 0. \end{cases}$$

για την οποία ισχύει $f(0) \cdot \ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ και $\alpha = 0$.

Μονάδες 4

Δ2. i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (1, 3)$ ισχύει η ανίσωση :

$$f(\ln(x-1)) \leq f(x-2)$$

Πότε ισχύει η ισότητα;

Μονάδες 6

Δ3. Αν F είναι μία παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$|F(\beta) - F(\alpha)| \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \cdot |\beta - \alpha|$$

, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 4

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [-1, 0]$ ισχύει: $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$. Στη συνέχεια, αν E το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα xx' και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1$ και $x = 1$, να αποδείξετε ότι :

$$E > 2e - \frac{10}{3}$$

Μονάδες 7

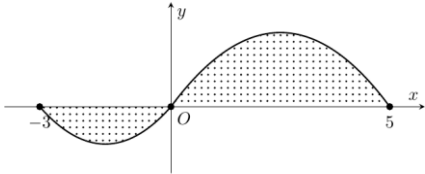
ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζόμενους / τις εξεταζόμενες)

- 1. Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
- 2.** Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
- 3.** Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
- 4.** Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
- 5.** Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
- 6.** Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10:00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ & ΜΟΡΙΟΔΟΤΗΣΗ
ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ 026 (ΔΥΤΙΚΗΣ ΜΑΚΕΔΟΝΙΑΣ)

ΘΕΜΑ Α		
A1	Να αποδείξετε ότι : “Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό”.	7
	Για $x \neq x_0$ έχουμε : $f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0) \right]$ $= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)$ $= f'(x_0) \cdot 0 = 0,$ αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.	
A2	Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.	4
	Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.	
A3	Έστω μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε θα λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο ;	4
	Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta > 0$, τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μεγίστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο της f.	

A4	Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιο σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη. i. Το εμβαδόν E του γραμμοσκιασμένου χωρίου του παρακάτω σχήματος είναι : $E = - \int_{-3}^0 f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx$  ii. Ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sin x}{x} = 1$ iii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής “διαπερνά” την καμπύλη. iv. Ισχύει : $(a^x)' = x \cdot a^{x-1}, a > 0$. v. $\int_a^b f'(x) \cdot g(x) dx = [f(x) \cdot g(x)]_a^b + \int_a^b f(x) \cdot g'(x) dx$					
	α	β	γ	δ	ε	10
	Σ	Λ	Σ	Λ	Λ	

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x+1}$, $x \neq -1$, και $g(x) = \frac{1}{e^x}$, $x \in \mathbb{R}$.

B1 Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

5

$$D_f = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

$$D_g = \mathbb{R}$$

$$D_h = D_{f \circ g} = \{x \in D_g / g(x) \in D_f\}$$

- $x \in D_g \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$
- $g(x) \in D_f \Leftrightarrow g(x) \neq -1 \Leftrightarrow \frac{1}{e^x} \neq -1$, ισχύει.

$$\text{Άρα : } D_h = \mathbb{R}$$

$$h(x) = (f \circ g)(x) = \frac{1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{e^x}{e^x + 1}.$$

B2 Αν $h(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η h είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντιστροφή της.

8

1ος τρόπος

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $h(x_1) = h(x_2)$.

$$\begin{aligned} \text{Έχουμε : } h(x_1) = h(x_2) &\Leftrightarrow \frac{e^{x_1}}{e^{x_1} + 1} = \frac{e^{x_2}}{e^{x_2} + 1} \\ &\Leftrightarrow e^{x_1}(e^{x_2} + 1) = e^{x_2}(e^{x_1} + 1) \\ &\Leftrightarrow e^{x_1} e^{x_2} + e^{x_1} = e^{x_2} e^{x_1} + e^{x_2} \\ &\Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \\ &\Leftrightarrow x_1 = x_2. \end{aligned}$$

Άρα η h είναι "1-1", επομένως αντιστρέφεται.

2ος τρόπος

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \text{με } h'(x) &= \left(\frac{e^x}{e^x + 1} \right)' = \frac{(e^x)'(e^x + 1) - e^x(e^x + 1)'}{(e^x + 1)^2} \\ &= \frac{e^x(e^x + 1) - e^x e^x}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0. \end{aligned}$$

Άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, επομένως αντιστρέφεται.

1ος τρόπος

Θέτουμε $h(x) = y$ και έχουμε :

$$\begin{aligned}h(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+1} = y \\&\Leftrightarrow y(e^x + 1) = e^x \\&\Leftrightarrow y e^x + y = e^x \\&\Leftrightarrow e^x - y e^x = y \\&\Leftrightarrow e^x (1 - y) = y\end{aligned}$$

Αν $y = 1$, τότε : $e^x \cdot 0 = 1$, αδύνατο.

$$\text{Αρα } y \neq 1, \text{ οπότε } e^x = \frac{y}{1-y} \Leftrightarrow x = \ln \frac{y}{1-y}$$

$$\text{με } \frac{y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow y(1-y) > 0 \Leftrightarrow y \in (0,1).$$

$$\text{και } x \in D_h = R.$$

$$\text{Επομένως, } h^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}, \quad x \in (0,1).$$

2ος τρόπος

Η h είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R ,

$$\text{άρα το σύνολο τιμών της είναι : } h(R) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)).$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{0}{0+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(e^x)'}{(e^x+1)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$\text{Άρα : } h(R) = (0,1), \text{ οπότε : } D_{h^{-1}} = h(R) = (0,1).$$

Θέτουμε $h(x) = y$, $y \in (0,1)$, και έχουμε :

$$\begin{aligned}h(x) = y &\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x+1} = y \\&\Leftrightarrow y(e^x + 1) = e^x \\&\Leftrightarrow y e^x + y = e^x \\&\Leftrightarrow e^x - y e^x = y \\&\Leftrightarrow e^x (1 - y) = y \\&\Leftrightarrow e^x = \frac{y}{1-y}\end{aligned}$$

	$\Leftrightarrow x = \ln \frac{y}{1-y} \text{ με } x \in D_h = \mathbb{R}.$ Επομένως, $h^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}$, $x \in (0,1)$.	
B3	Αν $h^{-1}(x) = \ln \frac{x}{1-x}$, $x \in (0,1)$, να βρείτε τος ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της h^{-1}.	6
	α) Κατακόρυφη ασύμπτωτη $\lim_{x \rightarrow 0^+} h^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \frac{x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x - \lim_{x \rightarrow 0^+} (1-x) = -\infty - 0 = -\infty$ Αρα η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{h^{-1}}$. $\lim_{x \rightarrow 1^-} h^{-1}(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln \frac{x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x - \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x) = 0 + \infty = +\infty$ Αρα η ευθεία $x = 1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $C_{h^{-1}}$. β) Οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη Επειδή $D_{h^{-1}} = (0,1)$, η γραφική παράστασης της h^{-1} δεν έχει οριζόντια ή πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και το $-\infty$.	
B4	Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \cdot \eta\mu g(x)]$.	6
	$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) \cdot \eta\mu g(x)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \eta\mu \frac{1}{e^x} \right].$ Το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \eta\mu \frac{1}{e^x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \eta\mu u$ δεν υπάρχει. (Θέτουμε $u = \frac{1}{e^x}$, $u \rightarrow +\infty$) <u>1ος τρόπος</u> Για $x < -1$, $-1 \leq \eta\mu \frac{1}{e^x} \leq 1 \xLeftrightarrow{x+1 < 0'} -\frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{x+1} \cdot \eta\mu \frac{1}{e^x} \geq \frac{1}{x+1}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{x+1} \right) = 0$ Αρα, από το κριτήριο παρεμβολής: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \eta\mu \frac{1}{e^x} \right] = 0.$	

2^{ος} τρόπος

Ισχύει ότι : $\left| \eta\mu \frac{1}{e^x} \right| \leq 1,$

Οπότε : $\left| \frac{1}{x+1} \cdot \eta\mu \frac{1}{e^x} \right| = \left| \frac{1}{x+1} \right| \cdot \left| \eta\mu \frac{1}{e^x} \right| \leq \left| \frac{1}{x+1} \right|$

και $-\left| \frac{1}{x+1} \right| \leq \left| \frac{1}{x+1} \cdot \eta\mu \frac{1}{e^x} \right| \leq \left| \frac{1}{x+1} \right|.$

Είναι : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left| \frac{1}{x+1} \right| = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\left| \frac{1}{x+1} \right| \right) = 0$

Άρα, από το κριτήριο παρεμβολής : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{x+1} \cdot \eta\mu \frac{1}{e^x} \right] = 0..$

ΘΕΜΑ Γ

	Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν : • $xf'(x) + 1 = -f(x) - \ln x$ για κάθε $x > 0$ • $f(1) = 1$ και συνάρτηση $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = x(f(x) + \ln x)$ για κάθε $x > 0$.	
Γ1	Να αποδείξετε ότι : i. η g είναι σταθερή συνάρτηση στο $(0, +\infty)$, ii. ο τύπος της f είναι $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.	6
	i. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη με $g'(x) = [x(f(x) + \ln x)]'$ $= f(x) + \ln x + x \left(f'(x) + \frac{1}{x} \right)$ $= f(x) + \ln x + x f'(x) + 1$ $= f(x) + \ln x - f(x) - \ln x$ $= 0, \text{ άρα η } g \text{ είναι σταθερή στο } (0, +\infty).$	4
	ii. Υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $g(x) = c \Leftrightarrow x(f(x) + \ln x) = c$. Για $x = 1$: $1 \cdot (f(1) + \ln 1) = c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα : $x(f(x) + \ln x) = c \Leftrightarrow x(f(x) + \ln x) = 1$ $\Leftrightarrow f(x) + \ln x = \frac{1}{x}$ $\Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{x} - \ln x.$	2
Γ2	Να αποδείξετε ότι : i. η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ ii. η εξίσωση $x^x = e$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.	5
i	Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και παραγωγίσιμη με $f'(x) = \left(\frac{1}{x} - \ln x \right)' = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} < 0,$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.	2
ii	Έχουμε : $x^x = e \Leftrightarrow \ln x^x = \ln e \Leftrightarrow x \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = 0.$	3

1ος τρόπος

Έχουμε :

$$x^x = e \Leftrightarrow \ln x^x = \ln e \Leftrightarrow x \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

- f συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $f(1) = 1 > 0$

$$f(e) = \frac{1}{e} - 1 < 0$$

$$f(1) \cdot f(e) < 0$$

Επομένως, από το Θ. Bolzano, η εξίσωση $f(x) = 0 \Leftrightarrow x^x - e = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

2ος τρόπος

Έχουμε :

$$x^x = e \Leftrightarrow \ln x^x = \ln e \Leftrightarrow x \ln x = 1 \Leftrightarrow \ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = 0.$$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (1, e)$,

$$\text{Επομένως : } f(A) = f((1, e)) = \left(\lim_{x \rightarrow e^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) = \frac{1}{e} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) = 1 - 0 = 1$$

$$\text{Άρα : } f(A) = \left(\frac{1}{e} - 1, 1 \right).$$

$0 \in f(A)$, άρα η $f(x) = 0$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, 1)$.

Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

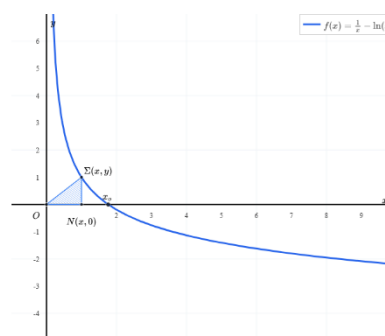
3ος τρόπος

$$x^x = e \Leftrightarrow x^x - e = 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x) = x^x - e$, $x \in [1, e]$.

	• φ συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων • $\varphi(1) = 1 - e < 0$ $\varphi(e) = e^e - e > 0$ $\varphi(1) \cdot \varphi(e) < 0$ Επομένως, από το Θ. Bolzano, η εξίσωση $\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow x^x - e = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$. Η συνάρτηση φ είναι παραγωγίσιμη στο $(1, e)$ με $\varphi'(x) = (x^x - e)' = (x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)'$ $= e^{x \ln x} \cdot (\ln x + 1) = x^x \cdot (\ln x + 1) > 0$ για κάθε $x \in (1, e)$. Άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, e)$, επομένως η ρίζα είναι μοναδική.	
	Αν x_0 η ρίζα του ερωτήματος Γ2 ii, τότε :	
Γ3	i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή και να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$. ii. Να λύσετε την εξίσωση : $x_0 \cdot (x_0 f(x) + x - x_0) = -x + x_0$.	9
i.	Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2} > 0$, άρα f κυρτή. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$ είναι η ευθεία $\varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Leftrightarrow y - 0 = \left(-\frac{1}{x_0^2} - \frac{1}{x_0}\right)(x - x_0)$ $\Leftrightarrow y = -\frac{x_0+1}{x_0^2}(x - x_0)$ $\Leftrightarrow y = -\frac{x_0+1}{x_0^2}x + \frac{x_0+1}{x_0}.$	5
ii.	$x_0 \cdot (x_0 f(x) + x - x_0) = -x + x_0 \Leftrightarrow x_0^2 f(x) + x_0 x - x_0^2 = -x + x_0$ $\Leftrightarrow x_0^2 f(x) = -x_0 x + x_0^2 + -x + x_0$ $\Leftrightarrow x_0^2 f(x) = -(x_0 + 1)x + x_0(x_0 + 1)$ $\Leftrightarrow f(x) = -\frac{x_0+1}{x_0^2}x + \frac{x_0+1}{x_0}.$ Παρατηρούμε ότι το δεύτερο μέλος της εξίσωσης είναι η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(x_0, f(x_0))$. Η f είναι κυρτή, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη σε οποιοδήποτε σημείο.	4

	Επομένως, ισχύει : $f(x) \geq -\frac{x_0+1}{x_0^2} x + \frac{x_0+1}{x_0}$. Η ισότητα ισχύει μόνο για την τετμημένη του σημείου επαφής, δηλαδή για $x = x_0$.	
Γ4	Ένα κινητό $\Sigma(x, f(x))$ ξεκινά από το σημείο $M(x_0, f(x_0))$ και κινείται στη γραφική παράσταση της f με την τετμημένη του να ελαττώνεται με ρυθμό $2 \text{ cm} / \text{s}$. Αν E το εμβαδόν του τριγώνου $ON\Sigma$ που ορίζουν τα σημεία $O(0,0), N(x,0)$ και $\Sigma(x, f(x))$, με $0 < x < x_0$, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E τη χρονική στιγμή που το Σ διέρχεται από σημείο $A(1,1)$.	5
	Δίνεται ότι : $x'(t) = -2 \text{ cm} / \text{sec}$ και $x'(t_0) = 1 \text{ cm} / \text{sec}$ Έχουμε : $E = (ON\Sigma) = \frac{1}{2} \cdot (ON) \cdot (N\Sigma)$ $= \frac{1}{2} x \cdot f(x) $ Όμως $0 < x < x_0$, άρα : $x = x$ και, επειδή f γνησίως φθίνουσα, $f(x) > f(x_0) \Leftrightarrow f(x) > 0$, άρα : $f(x) = f(x)$. $E = \frac{1}{2} x \cdot f(x) - \frac{1}{2} x \left(\frac{1}{x} - \ln x \right) = \frac{1}{2} (1 - x \ln x).$ Επομένως : $E(t) = \frac{1}{2} (1 - x(t) \ln x(t))$. $E'(t) = \left(\frac{1}{2} (1 - x(t) \ln x(t)) \right)'$ $= \frac{1}{2} [-x'(t) \ln x(t) - x(t) \frac{1}{x(t)} x'(t)]$ $= \frac{1}{2} [-x'(t) \ln x(t) - x'(t)]$ $= -\frac{1}{2} x'(t) (1 + \ln x(t))$ Για $t = t_0$: $E'(t_0) = -\frac{1}{2} x'(t_0) (1 + \ln x(t_0))$ $= -\frac{1}{2} (-2)(1 + \ln 1) = 1 \text{ cm}^2 / \text{s}.$	



ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2+\alpha}, & x \leq 0 \\ x^2 \cdot e^{1-x} + 1, & x > 0 \end{cases}$,
για την οποία ισχύει $f(0) \cdot \ln x \leq x - 1$, για κάθε $x > 0$,

Δ1 Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ και $\alpha = 0$.

4

Έστω συνάρτηση φ με $\varphi(x) = f(0) \cdot \ln x - x + 1$ για κάθε $x > 0$:

- $\varphi(x) \leq 0$ για κάθε $x > 0$
 $\varphi(1) = f(0) \cdot \ln 1 - 1 + 1 = 0$
 Άρα $\varphi(x) \leq \varphi(1)$, δηλαδή η φ στο $x_0 = 1$, εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού της, παρουσιάζει ακρότατο (ολικό μέγιστο)
- φ παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $\varphi'(x) = f(0) \cdot \frac{1}{x} - 1$

Οπότε, από το θεώρημα Fermat, έχουμε :

$$\varphi'(1) = 0 \Leftrightarrow f(0) \cdot 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow f(0) = 1.$$

Από τον τύπο της f για $x = 0$ θα πάρουμε :

$$f(0) = e^{0+\alpha} \Leftrightarrow 1 = e^\alpha \Leftrightarrow \alpha = 0.$$

- Δ2**
- i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
 - ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (1, 3)$ ισχύει η ανίσωση :
 $f(\ln(x-1)) \leq f(x-2)$.
 Πότε ισχύει η ισότητα ;

10

i.

Για $\alpha = 0$ έχουμε : $f(x) = \begin{cases} e^{-x^2}, & x \leq 0 \\ x^2 \cdot e^{1-x} + 1, & x > 0 \end{cases}$

4

Ελέγχω τη συνέχεια της f στο $x_0 = 0$ που η συνάρτηση αλλάζει τύπο.

$$f(0) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x^2} = e^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \cdot e^{1-x}) = 0 + 1 = 1$$

$$f(0) = 1$$

Οπότε : $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$,

άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

Για $x < 0$ έχουμε : $f'(x) = (e^{-x^2})'$

$$= e^{-x^2} \cdot (-2x)$$

$$= -2xe^{-x^2} > 0 \text{ για κάθε } x < 0$$

Για $x > 0$ έχουμε : $f'(x) = (x^2 \cdot e^{1-x} + 1)'$

$$= 2x \cdot e^{1-x} - x^2 \cdot e^{1-x}$$

$$= e^{1-x} x(2-x) \text{ για κάθε } x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(2x - x^2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Το πρόσημο της f' εξαρτάται από το $2-x$, αφού $x > 0$ και $e^{1-x} > 0$, οπότε προκύπτει οπ πίνακας μεταβολών της f .

		0	2	
x	$-\infty$			$+\infty$
f'	+	+	-	
f			$1 + \frac{4}{e}$	
	(0)		(1)	

Αφού η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, έχουμε :

- Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$

Στο $x_0 = 2$ η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο, το $f(2) = 2^2 \cdot e^{1-2} + 1 = \frac{4}{e} + 1$.

Σύνολο Τιμών της f

Αν $\Delta_1 = (-\infty, 2]$, διάστημα στο οποίο η f είναι γνήσια αύξουσα,

$$\text{τότε : } f(\Delta_1) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(2)] = \left(0, \frac{4}{e} + 1\right]$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{-x^2}) = \lim_{u \rightarrow -\infty} (e^u) = 0 \quad (\text{θέτω } u = -x^2 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty)$$

Αν $\Delta_2 = (2, +\infty)$, διάστημα στο οποίο η f είναι γνήσια φθίνουσα,

$$\text{τότε : } f(\Delta_2) = (\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(2)) = \left(1, \frac{4}{e} + 1\right)$$

$$\text{διότι } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{1-x} + 1) = \{+\infty \cdot 0 + 1 = \alpha.\mu\}, \text{ οπότε υπολογίζω :}$$

	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{1-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{e^{x-1}} \right) \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x}{e^{x-1}} \right) \stackrel{+\infty}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{e^{x-1}} \right) = 0,$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα DL'H. Άρα : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 e^{1-x} + 1) = 0 + 1 = 1$ Συνολικά έχουμε : $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = (0, \frac{4}{e} + 1]$.	
ii.	Θα δείξουμε ότι ισχύει $f(\ln(x-1)) \leq f(x-2)$ για κάθε $x \in (1, 3)$. Ελέγχουμε που βρίσκονται οι τιμές $\ln(x-1)$ και $x-2$, για $x \in (1, 3)$ οπότε : $1 < x < 3 \Leftrightarrow 1 - 1 < x - 1 < 3 - 1 \Leftrightarrow 0 < x - 1 < 2,$ άρα $\ln(x-1) < \ln 2 < 2 (= \ln e^2, 2 < e^2)$ $1 < x < 3 \Leftrightarrow 1 - 2 < x - 2 < 3 - 2 \Leftrightarrow -1 < x - 2 < 1$ Οπότε $\ln(x-1), x-2 \in \Delta_1$ με $\Delta_1 = (-\infty, 2]$, διάστημα στο οποίο η f είναι γνήσια αύξουσα. Άρα : $f(\ln(x-1)) \leq f(x-2) \Leftrightarrow \ln(x-1) \leq x-2 \Leftrightarrow \ln(x-1) \leq (x-1)-1$ που ισχύει από την βασική ανίσωση $\ln x \leq x-1$ για κάθε $x > 0$, το ίσον μόνο για $x=1$. Επομένως, αν βάλω όπου x το $x-1$, έχω την παραπάνω ανίσωση, Δηλαδή : $\ln(x-1) \leq (x-1)-1$. Η ισότητα ισχύει, όταν $x-1=1 \Leftrightarrow x=2$.	6
Δ3	Αν F είναι μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι : $ F(\beta) - F(\alpha) \leq \left(\frac{4}{e} + 1 \right) \cdot \beta - \alpha , \text{ για κάθε } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$	4
	Αφού F είναι η αρχική της f, άρα : $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.. Έχουμε κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, άρα διακρίνω περιπτώσεις για τα α, β. - Αν $\alpha = \beta$, τότε πρέπει να δείξω ότι ισχύει : $F(\alpha) - F(\alpha) \leq \left(\frac{4}{e} + 1 \right) \cdot \alpha - \alpha \Leftrightarrow 0 \leq 0$ δηλαδή ισχύει το ίσον. - Αν $\alpha \neq \beta$, τότε αν $\alpha < \beta$ (όμοια για $\alpha > \beta$) έχουμε : Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ (αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $F'(x) = f(x)$.	

Άρα ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής,

δηλαδή υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$

ή ισοδύναμα $f(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$ (1)

Θέλω να δείξω ότι : $|F(\beta) - F(\alpha)| \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \cdot |\beta - \alpha|$ με $\alpha < \beta$ άρα $\beta - \alpha > 0$

1ος τρόπος

Θα δείξω ότι : $|F(\beta) - F(\alpha)| \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \cdot |\beta - \alpha| \Leftrightarrow \left| \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} \right| \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \Leftrightarrow |f(\xi)| \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right)$

Αλλά γνωρίζουμε από το Δ1 ότι : $f(A) = (0, \frac{4}{e} + 1]$, δηλαδή $0 < f(x) \leq \frac{4}{e} + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε για $x = \xi$

Ισχύει : $0 < f(\xi) \leq \frac{4}{e} + 1$, άρα και $|f(\xi)| \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right)$,

οπότε $|F(\beta) - F(\alpha)| \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \cdot |\beta - \alpha|$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

2ος τρόπος

Αφού F είναι η αρχική της f , άρα : $F'(x) = f(x) \in (0, \frac{4}{e} + 1]$ ή $F'(x) = f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε η F είναι γνήσια αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Αφού έχουμε $\alpha < \beta$ άρα $F(\alpha) < F(\beta)$,

οπότε θα δείξουμε ότι $F(\beta) - F(\alpha) \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \cdot (\beta - \alpha)$.

Εφαρμόζω το Θ.Μ.Τ. για F στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Δηλαδή

Η συνάρτηση F είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ (αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$)

Η συνάρτηση F είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) με $F'(x) = f(x)$

Άρα ισχύει το Θεώρημα Μέσης Τιμής, δηλαδή υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε

$F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$ ή ισοδύναμα $f(\xi) = \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha}$ (1)

Αλλά γνωρίζουμε από το Δ1 ότι : $f(A) = (0, \frac{4}{e} + 1]$,

δηλαδή $0 < f(x) \leq \frac{4}{e} + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε για $x = \xi$

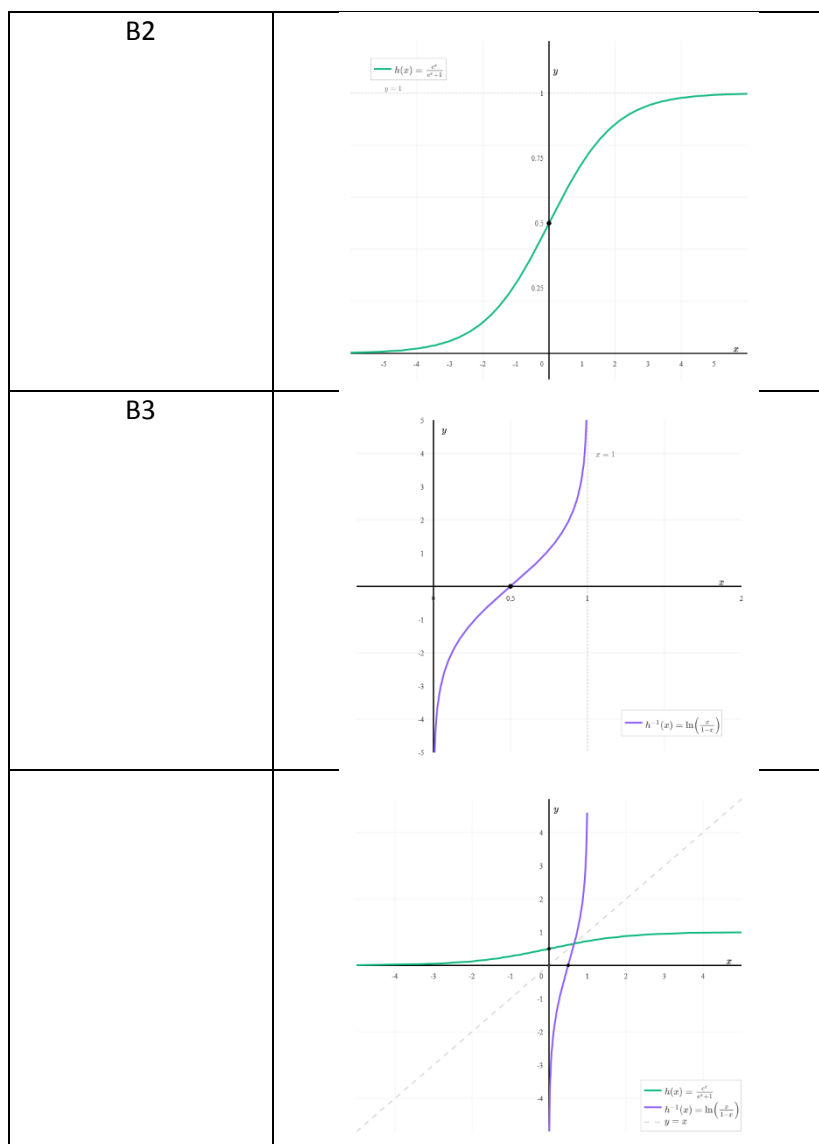
Ισχύει : $0 < f(\xi) \leq \frac{4}{e} + 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{F(\beta) - F(\alpha)}{\beta - \alpha} < \frac{4}{e} + 1 \Leftrightarrow F(\beta) - F(\alpha) \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \cdot (\beta - \alpha)$ αφού $\alpha < \beta$, άρα $\beta - \alpha > 0$.

	οπότε : $F(\beta) - F(\alpha) \leq \left(\frac{4}{e} + 1\right) \cdot \beta - \alpha$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.	
Δ4	Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in [-1, 0]$ ισχύει : $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$. Στη συνέχεια, αν E το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζετε από τη γραφική παράσταση της f, τον άξονα $x'x$ και τις κατακόρυφες ευθείες $x = -1$ και $x = 1$, να αποδείξετε ότι : $E > 2e - \frac{10}{3}$.	7
	Από την βασική ανίσωση $e^x \geq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το ίσον μόνο για $x = 0$ προκύπτει, αν στη θέση του x βάλουμε το $-x^2$, η ανίσωση : $e^{-x^2} \geq -x^2 + 1 \Leftrightarrow 1 - x^2 \leq e^{-x^2}$	
	Για το εμβαδόν E έχουμε : $E = \int_{-1}^1 f(x) dx$ και $f(x) > 0$ από το σύνολο τιμών της f. Άρα : $E = \int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx = I_1 + I_2$. $I_1 = \int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 e^{-x^2} dx$ Από το προηγούμενο ερώτημα ισχύει : $e^{-x^2} \geq 1 - x^2$ για κάθε $x \in (-1, 0)$. Η ισότητα ισχύει μόνο για $x = 0$, επομένως προκύπτει : $I = \int_{-1}^0 e^{-x^2} dx > \int_{-1}^0 (1 - x^2) dx$. Άρα $I_1 > \int_{-1}^0 (1 - x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = 0 - \left(-1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3}$. $I_2 = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 (x^2 e^{1-x} + 1) dx = \int_0^1 x^2 e^{1-x} dx + \int_0^1 1 dx = \int_0^1 \left(x^2 (-e^{1-x})' \right) dx + [x]_0^1$ $I_2 = \left[-x^2 e^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (x^2)' (-e^{1-x}) dx + 1 = -1e^{1-1} + 0 + \int_0^1 2xe^{1-x} dx + 1 = -1 + \int_0^1 2x(-e^{1-x})' dx + 1$ $I_2 = \int_0^1 2x(-e^{1-x})' dx = \left[-2xe^{1-x} \right]_0^1 - \int_0^1 (2x)' (-e^{1-x}) dx = -2 - 0 + 2 \int_0^1 e^{1-x} dx = -2 + 2 \left[-e^{1-x} \right]_0^1$ $I_2 = -2 + 2(-1 + e) = 2e - 4$ Άρα $I_1 > \frac{2}{3}$, $I_2 = 2e - 4$ και $E = I_1 + I_2$ Οπότε : $E = I_1 + I_2 > \frac{2}{3} + 2e - 4 \Rightarrow E > 2e - \frac{10}{3}$	

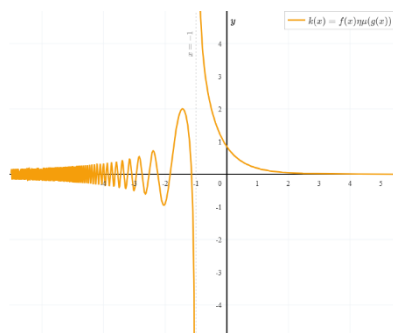
ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΓΡΑΦΙΚΕΣ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β

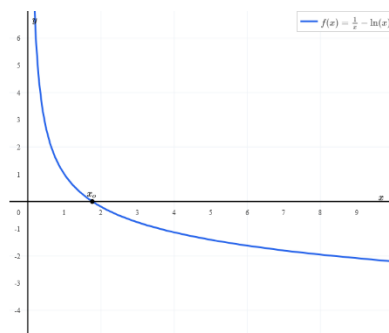


B4

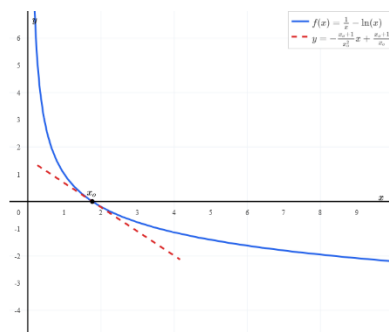


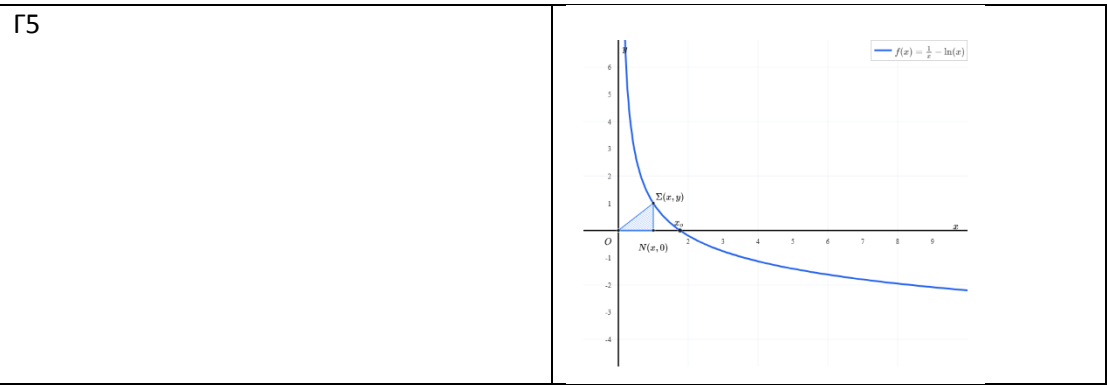
ΘΕΜΑ Γ

Γ2

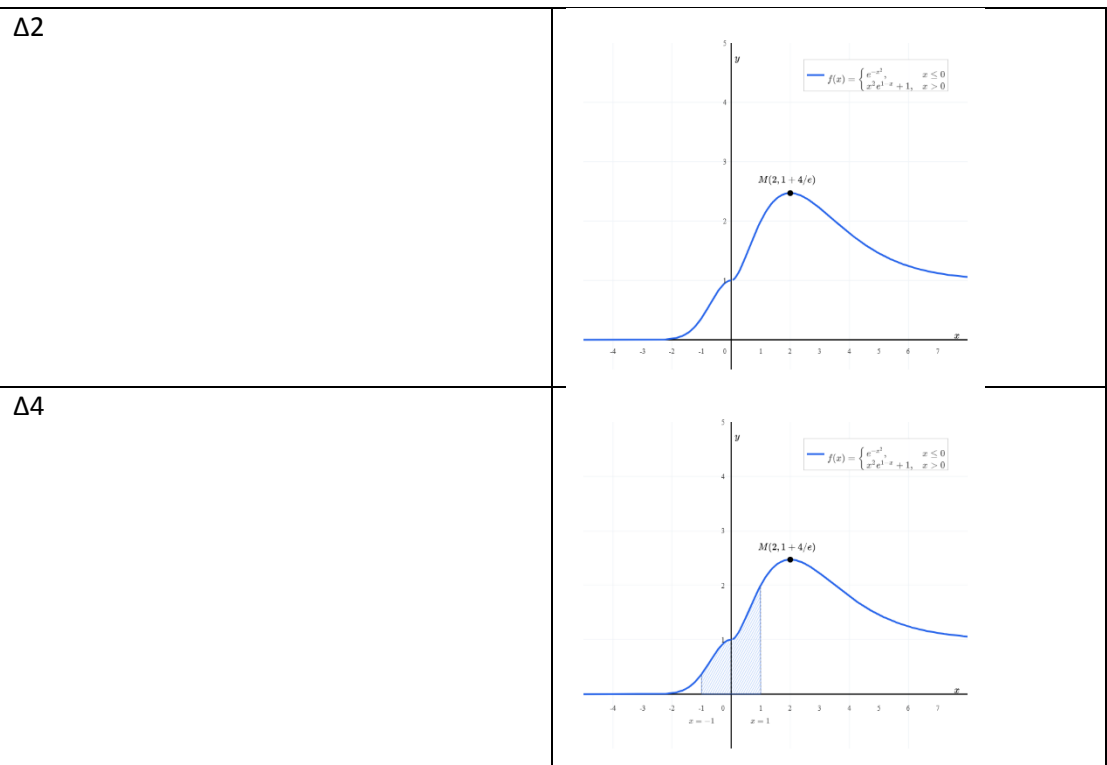


Γ3





ΘΕΜΑ Δ



ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,

να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 5

A3. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι “1-1”, αν και μόνο αν υπάρχουν διαφορετικά σημεία της γραφικής της παράστασης με την ίδια τεταγμένη.

β) Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

γ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δύο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι κυρτή στο Δ .

δ) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) .$$

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\phi x$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$ και

$$\text{ισχύει } (\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x} .$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = 2 \ln(x-1)$$

και

$$g: [2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = \sqrt{x-2} + 1.$$

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Μονάδες 8

Στα επόμενα ερωτήματα να θεωρήσετε ότι $h(x) = \ln(x-2)$, $x \in (2, +\infty)$.

Β2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται (μονάδες 3) και να προσδιορίσετε τη συνάρτηση h^{-1} (μονάδες 6).

Μονάδες 9

Β3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \left(h(x) \cdot \frac{f(x)}{x-2} \right)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$$

με $\kappa, \mu \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα:

- Η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.
- Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στην αρχή των αξόνων.

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

- i) $\kappa = 0$ και
- ii) $\mu = 1$.

Μονάδες 8

Γ2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα (μονάδες 6).

ii) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (μονάδες

3) και να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \frac{1}{2} + \alpha^2$, για

κάθε τιμή της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 11

Γ3. Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $I_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{x^2 + 1} dx$.

i) Να αποδείξετε ότι $I_n + I_{n+1} = \frac{1}{2n+2}$, $n \in \mathbb{N}$.

ii) Να υπολογίσετε τα I_0 , I_1 και I_2 .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, με συνεχή παράγωγο, για την οποία ισχύουν:

- $0 < g(x) < 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
- $g'(x) \neq -1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (-1, 0)$ ώστε:

$$g(x_1) + x_1 = 0.$$

Μονάδες 6

Δίνεται επιπλέον η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2(g(x) + x), & x \in (-\infty, 0) \\ 2\eta\mu x + \varepsilon\phi x - kx, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

με $k \in \mathbb{R}$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι $k = 3$.

Μονάδες 2

Δ3. Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ ισχύουν:

i) $f(x) \geq 0$ και (μονάδες 4)

ii) η εξίσωση $3f(x) = \pi$ έχει ακριβώς μια ρίζα, x_2 . (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ4. i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 0$ στο διάστημα $[x_1, 0]$. (μονάδες 3)

ii) Έστω Ω το χωρίο που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = x_1$ και $x = f(x_2)$, όπου x_1 είναι ο αριθμός από το ερώτημα Δ1 και x_2 είναι η ρίζα από το ερώτημα Δ3ii. Αν ο άξονας $y'y$ χωρίζει το Ω σε δύο ισεμβαδικά χωρία, να αποδείξετε ότι:

$$\int_{x_1}^0 x^3 g'(x) dx = \frac{x_1^4}{4} + \frac{\pi^2}{2} - 3\ln 2 - 3.$$

(μονάδες 7)

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Παράδειγμα 1: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + \beta, & x \leq 1 \\ \frac{x+1}{x}, & x > 1 \end{cases}$

- i. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$ και στη συνέχεια να βρείτε την f' .
- ii. Για $\alpha = -3$ και $\beta = 4$:
 - α. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης C_f στο σημείο $A(2, f(2))$
 - β. Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της C_f με $x < 1$, στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στην (ε).
- iii. Να εξετάσετε αν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f στο διάστημα $[0, 2]$.
- iv. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο διάστημα $[0, 2]$, τι συμπεραίνετε για τη συνάρτηση, είτε αλγεβρικά είτε γεωμετρικά, στο διάστημα αυτό;
- v. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία της, να βρείτε το σύνολο τιμών της και να δείξετε ότι η C_f τέμνει την οριζόντια ευθεία $y = e$ σε ένα ακριβώς σημείο.
- vi. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται πάνω στη C_f στο διάστημα $(1, +\infty)$. Τη χρονική στιγμή t_0 που το σημείο M διέρχεται από το $A\left(2, \frac{3}{2}\right)$ η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό 2cm/sec . Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του y τη χρονική στιγμή t_0 .

Παράδειγμα 2: Έστω μια συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(1, 2)$, $B(2, 5)$ και $\Gamma(3, 10)$ τότε:

- i. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1 \in (1, 2)$ και $\xi_2 \in (2, 3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1) = 3$ και $f'(\xi_2) = 5$.
- ii. Αν επιπλέον ισχύει ότι $\xi_2 = \xi_1 + 1$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 2$.
- iii. Αν η κλίση της C_f στο σημείο A είναι 1, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη (ε) της C_f στο x_0 να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 1$.

Παράδειγμα 3: Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη και ισχύει ότι:

$$f''(x) = 4e^{2x} - 6, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Αν η γραφική παράσταση της f έχει στο κλίση 3 στο σημείο $A(0, 4)$, να βρείτε τον τύπο της f .

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ: ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εξεταστέα Ύλη: Κεφάλαιο 3 (Μαθηματικά Προσανατολισμού)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, με $c \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

A2. Πότε μια συνάρτηση F ονομάζεται αρχική συνάρτηση ή παράγουσα μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;

(Μονάδες 4)

A3. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:

«Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$, τότε υποχρεωτικά $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.»

Να χαρακτηρίσετε τον ισχυρισμό ως Αληθή ή Ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας μέσω ενός αντιπαραδείγματος.

(Μονάδες 4)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν ως Σωστό ή Λάθος:

α) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ ισχύει $\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx$.

β) Αν f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \geq 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$.

γ) Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx$ για οποιαδήποτε f συνεχής σε διάστημα που περιέχει τα α, β, γ .

δ) Η συνάρτηση $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt$ είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$ με $F'(x) = f(x)$, υπό την προϋπόθεση ότι η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$.

ε) Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_f , τον x' και τις $x = \alpha, x = \beta$ ισούται πάντα με το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x}$ με πεδίο ορισμού $A = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

B1. Να προσδιορίσετε τους πραγματικούς αριθμούς A, B και Γ τέτοιους ώστε για κάθε $x \in A$ να ισχύει:

$$f(x) = A + \frac{B}{x} + \frac{\Gamma}{x-1}$$

(Μονάδες 6)

B2. Για τις τιμές $A = 1, B = -1$ και $\Gamma = 2$, να υπολογίσετε το ορισμένο ολοκλήρωμα: $I = \int_2^3 f(x) dx$

(Μονάδες 6)

B3. Να υπολογίσετε την τιμή του ολοκληρώματος: $J = \int_1^e (x^2 + 1) \ln x dx$

(Μονάδες 6)

B4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = e^x$. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι για το ολοκλήρωμα $K = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x \cdot h(x) dx$ ισχύει: $K = I$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Γ

Ένα κινητό κινείται σε έναν άξονα $x'x$ με ταχύτητα $v(t) = 6e^t - 6e \cdot t$, $t \in [0, 2]$. Τη χρονική στιγμή $t = 1$ sec το κινητό βρίσκεται στη θέση $s(1) = 3e$.

Γ1. Να βρείτε τη συνάρτηση θέσης $s(t)$ του κινητού για $t \in [0, 2]$, καθώς και την επιτάχυνση του την χρονική στιγμή $t = 1$.

(Μονάδες 6)

Γ2. Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_0 που η ταχύτητα γίνεται ελάχιστη. Ποια είναι η ελάχιστη και η μέγιστη απομάκρυνση του κινητού από την αρχή του άξονα O ;

(Μονάδες 7)

Γ3. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^2 v(t) dt$. Τι εκφράζει η τιμή αυτή για την κίνηση;

(Μονάδες 5)

Γ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη C_s , τον άξονα $t't$ και την εφαπτομένη της C_s για $t = 2$.

(Μονάδες 7)

ΘΕΜΑ Δ

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση C_f διέρχεται από το σημείο $(1, -1)$. Αν F μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ και ισχύει:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f για $x = 0$ είναι η $(\varepsilon): y = x + 1$.

(Μονάδες 7)

Δ2. Να αποδείξετε ότι $F(1) = \frac{1}{2}$ (Μονάδες 2) και στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 1 - x_0$ (Μονάδες 3).

(Μονάδες 5)

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f παρουσιάζει μέγιστο σε σημείο $x_1 \in (0, 1)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα $\rho \in (x_1, 1)$.

(Μονάδες 6)

Δ4. Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται μεταξύ της C_f και των αξόνων, ισχύει:

$$\frac{1}{2} < E < \frac{\rho(\rho + 2)}{2}.$$

(Μονάδες 7)

Κάθε Επιτυχία

Ενδεικτικές Λύσεις Διαγωνίσματος Μαθηματικών
Γ' Λυκείου - Προσανατολισμός (Υψηλός 3.7)

ΘΕΜΑ Α

A1. Κάθε συνάρτηση της μορφής $G(x) = F(x) + c$, όπου $c \in \mathbb{R}$, είναι μια παράγουσα της f στο Δ , αφού για κάθε $x \in \Delta$ ισχύει:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$$

Έστω G μια άλλη παράγουσα της f στο Δ . Τότε για κάθε $x \in \Delta$ ισχύουν $F'(x) = f(x)$ και $G'(x) = f(x)$, οπότε:

$$G'(x) = F'(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

Σύμφωνα με τις συνέπειες του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε:

$$G(x) = F(x) + c, \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

A2. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ονομάζεται κάθε συνάρτηση F που είναι παραγωγίσιμη στο Δ και ισχύει:

$$F'(x) = f(x), \quad \text{για κάθε } x \in \Delta$$

A3. Ο ισχυρισμός είναι **Ψευδής**.

Αντιπαράδειγμα: Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x$ στο διάστημα $[-1, 1]$. Η f είναι συνεχής στο $[-1, 1]$. Υπολογίζοντας το ολοκλήρωμα έχουμε:

$$\int_{-1}^1 x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

Ωστόσο, προφανώς δεν ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [-1, 1]$ (π.χ. $f(1) = 1 \neq 0$).

A4.

- α) Σωστό.** Αποτελεί βασική ιδιότητα της απόλυτης τιμής του ορισμένου ολοκληρώματος.
- β) Σωστό.** Βασική Πρόταση: Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής, μη αρνητική και δεν είναι παντού μηδέν σε ένα διάστημα, το ολοκλήρωμά της είναι αυστηρά θετικό.
- γ) Σωστό.** Αποτελεί την ιδιότητα της προσθετικότητας του ορισμένου ολοκληρώματος.
- δ) Σωστό.** Άμεση εφαρμογή του Θεμελιώδους Θεωρήματος του Ολοκληρωτικού Λογισμού.
- ε) Λάθος.** Το εμβαδόν του χωρίου ισούται με $\int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| \, dx$. Ισούται με το $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) \, dx$ αποκλειστικά αν $f(x) \geq 0$ στο $[\alpha, \beta]$.

ΘΕΜΑ Β

B1. Έχουμε $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - x}$ με $A = (-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$. Διαιρούμε το πολυώνυμο του αριθμητή με εκείνο του παρονομαστή και έχουμε:

$$f(x) = 1 + \frac{x + 1}{x(x - 1)}$$

Αναζητούμε B, Γ ώστε:

$$\frac{x + 1}{x(x - 1)} = \frac{B}{x} + \frac{\Gamma}{x - 1} \implies x + 1 = B(x - 1) + \Gamma x$$

Για $x = 1 \implies 2 = \Gamma$.

Για $x = 0 \implies 1 = -B \implies B = -1$.

Άρα $A = 1, B = -1, \Gamma = 2$ και:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x - 1}$$

B2. Επειδή στο $[2, 3]$ ισχύει $x > 0$ και $x - 1 > 0$, έχουμε $|x| = x$ και $|x - 1| = x - 1$.

$$\begin{aligned} I &= \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x - 1} \right) dx = [x - \ln x + 2 \ln(x - 1)]_2^3 \\ &= (3 - \ln 3 + 2 \ln 2) - (2 - \ln 2 + 2 \ln 1) = 1 + 3 \ln 2 - \ln 3 = 1 + \ln \left(\frac{8}{3} \right) \end{aligned}$$

B3. Με παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\begin{aligned} J &= \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} + x \right)' \ln x dx = \left[\left(\frac{x^3}{3} + x \right) \ln x \right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \frac{1}{x} dx \\ &= \left(\frac{e^3}{3} + e \right) - \int_1^e \left(\frac{x^2}{3} + 1 \right) dx = \frac{e^3}{3} + e - \left[\frac{x^3}{9} + x \right]_1^e \\ &= \frac{e^3}{3} + e - \left(\frac{e^3}{9} + e - \frac{1}{9} - 1 \right) = \frac{2e^3 + 10}{9} \end{aligned}$$

B4. Πεδίο ορισμού της $h = f \circ g$: $D_h = \{x \in \mathbb{R} \mid e^x \neq 0 \text{ και } e^x \neq 1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \in \mathbb{R} \text{ και } x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$.

Ο τύπος της είναι $h(x) = 1 - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{e^x - 1}$.

Θέτοντας $u = e^x \implies du = e^x dx$. Για $x = \ln 2 \rightarrow u = 2$ και $x = \ln 3 \rightarrow u = 3$.

$$K = \int_{\ln 2}^{\ln 3} e^x \left(1 - \frac{1}{e^x} + \frac{2}{e^x - 1} \right) dx = \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{u} + \frac{2}{u - 1} \right) du = I$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η συνάρτηση θέσης $s(t)$ είναι παράγουσα της ταχύτητας $v(t)$:

$$s'(t) = v(t) = 6e^t - 6et \implies s(t) = 6e^t - 3et^2 + c$$

Από $s(1) = 3e \implies 6e - 3e + c = 3e \implies c = 0$. Άρα $s(t) = 6e^t - 3et^2$.

Η επιτάχυνση είναι $a(t) = v'(t) = 6e^t - 6e$. Για $t = 1, a(1) = 0$.

Γ2. Μελετάμε τη μονοτονία της $v(t)$. Η ρίζα της $a(t)$ είναι το $t = 1$.

t	0	1	2
$a(t)$	–	0	+
$v(t)$	$v(0) = 6$	$v(1) = 0$	$v(2) = 6e^2 - 12e$

Η $v(t)$ παρουσιάζει ελάχιστο στο $t = 1$, με τιμή $v(1) = 0$.

Συνεπώς, $v(t) \geq 0$, με μεμονωμένο σημείο μηδενισμού για $t = 1$, άρα το κινητό κινείται συνεχώς κατά τη θετική φορά και η $s(t)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Επειδή $s(0) = 6 > 0$, ισχύει $s(t) > 0$. Η απομάκρυνση από την αρχή του άξονα O είναι η:

$$|s(t) - 0| = s(t)$$

- **Ελάχιστη απομάκρυνση:** $s(0) = 6$.
- **Μέγιστη απομάκρυνση:** $s(2) = 6e^2 - 12e$.

Γ3. Είναι

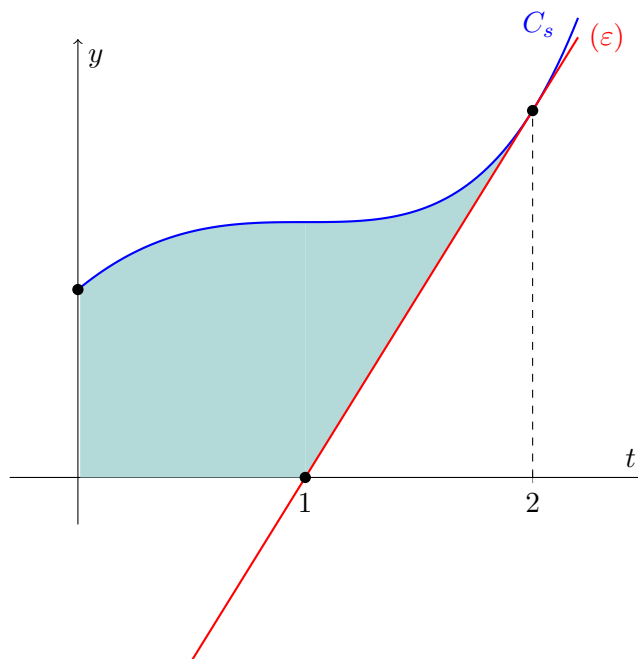
$$I = \int_0^2 v(t) dt = s(2) - s(0) = 6e^2 - 12e - 6$$

και εκφράζει το συνολικό διάστημα που διένυσε το κινητό.

Γ4. Η εφαπτομένη της C_s στο $t = 2$ είναι:

$$(\varepsilon) : y = (6e^2 - 12e)(t - 1).$$

Επειδή $s''(t) = a(t) \geq 0$ για $t \in [1, 2]$, η C_s είναι κυρτή στο $[1, 2]$, άρα $s(t) \geq y$.
Το ζητούμενο χωρίο θα είναι:



Το εμβαδόν είναι:

$$\begin{aligned} E &= \int_0^1 s(t) dt + \int_1^2 (s(t) - y) dt = \int_0^2 s(t) dt - \int_1^2 y dt \\ &= [6e^t - et^3]_0^2 - \left[\frac{(6e^2 - 12e)(t-1)^2}{2} \right]_1^2 \\ &= (6e^2 - 8e - 6) - (3e^2 - 6e) = 3e^2 - 2e - 6 \end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Έστω $g(x) = \frac{F(x)-x}{x^2}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2}$.

Τότε

$$\lim_{x \rightarrow 0} (F(x) - x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 g(x)) = 0.$$

Λόγω συνέχειας της F , προκύπτει $F(0) = 0$.

Εφαρμόζοντας τον κανόνα *De L'Hospital* (μορφή $0/0$):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - x}{x^2} \stackrel{0/0}{\underset{DLH}{=}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{2x} = \frac{1}{2} \star$$

Η f είναι συνεχής στο $x = 0$, αν υποθέσουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) - 1 \neq 0$$

τότε

$$\star \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{2x} \notin \mathbb{R}$$

άτοπο, έπεται $f(0) = 1$.

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$, άρα θα είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0)$,

άρα $\star \implies \frac{1}{2}f'(0) = \frac{1}{2} \implies f'(0) = 1$.

Εξίσωση εφαπτομένης: $y - 1 = 1(x - 0) \implies y = x + 1$.

Δ2. Δίνεται $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} \implies F(1) - F(0) = \frac{1}{2} \implies F(1) = \frac{1}{2}$.

Θεωρούμε $K(x) = F(x) - x + \frac{x^2}{2}$.

Η K είναι συνεχής στο $[0, 1]$, παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ και $K(0) = 0 = K(1)$.

Από Θ. *Rolle* υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $K'(x_0) = 0 \implies f(x_0) = 1 - x_0$.

Δ3. Το ερώτημα αναπτύσσεται σε δύο σκέλη: την εύρεση του ακροτάτου και την ύπαρξη μοναδικής ρίζας.

Υπαρξη και είδος ακροτάτου στο $x_1 \in (0, 1)$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 1]$:

- Η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ (ως παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$).
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$.

Επομένως, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$$

Από τα δεδομένα της εκφώνησης η γραφική παράσταση διέρχεται από το $(1, -1)$, άρα $f(1) = -1$. Από το ερώτημα Δ1 έχουμε αποδείξει ότι $f(0) = 1$. Συνεπώς:

$$f'(\xi) = \frac{-1 - 1}{1} = -2 < 0$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε το Θεώρημα *Bolzano* για τη συνάρτηση f' στο διάστημα $[0, \xi]$:

- Η f' είναι συνεχής στο $[0, \xi]$ (αφού η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, η f' είναι συνεχής).
- Ισχύει $f'(0) = 1 > 0$ (αποδείχθηκε στο Δ1) και $f'(\xi) = -2 < 0$.
- Άρα, $f'(0) \cdot f'(\xi) < 0$.

Επομένως, σύμφωνα με το Θεώρημα *Bolzano*, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0, \xi) \subset (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = 0$.

Δίνεται ότι $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι η πρώτη παράγωγος f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, άρα το x_1 είναι η μοναδική της ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Μελετάμε το πρόσημο της f' εκατέρωθεν του x_1 :

- Για κάθε $x < x_1 \implies f'(x) > f'(x_1) \implies f'(x) > 0$. Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, x_1]$.
- Για κάθε $x > x_1 \implies f'(x) < f'(x_1) \implies f'(x) < 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_1, +\infty)$.

Συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_1 \in (0, 1)$, με τιμή $f(x_1)$.

Υπαρξη και μοναδικότητα ρίζας $\rho \in (x_1, 1)$

Επειδή η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_1 και $x_1 > 0$, ισχύει:

$$f(x_1) > f(0) \implies f(x_1) > 1 > 0$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα *Bolzano* για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[x_1, 1]$:

- Η f είναι συνεχής στο $[x_1, 1]$.
- Ισχύει $f(x_1) > 0$ και $f(1) = -1 < 0$, οπότε $f(x_1) \cdot f(1) < 0$.

Συνεπώς, υπάρχει τουλάχιστον ένα $\rho \in (x_1, 1)$ τέτοιο ώστε $f(\rho) = 0$.

Τέλος, επειδή $\rho \in (x_1, 1)$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[x_1, +\infty)$ (όπως αποδείξαμε παραπάνω), η ρίζα ρ είναι μοναδική στο διάστημα αυτό (και γενικότερα στο $(x_1, +\infty)$).

Δ4. Η f είναι κοίλη, άρα βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της: $f(x) \leq x + 1$ (ισότητα μόνο στο $x = 0$).

$$\int_0^\rho f(x) dx < \int_0^\rho (x + 1) dx = \frac{\rho(\rho + 2)}{2} \quad (I)$$

Αναλύοντας το $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2}$:

$$\int_0^\rho f(x) dx = \frac{1}{2} - \int_\rho^1 f(x) dx$$

Στο $(\rho, 1]$, η $f(x) < 0$, άρα $-\int_\rho^1 f(x) dx > 0$. Συνεπώς:

$$\int_0^\rho f(x) dx > \frac{1}{2} \quad (II)$$

Από (I) και (II), προκύπτει το ζητούμενο: $\frac{1}{2} < E < \frac{\rho(\rho+2)}{2}$.

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

A1. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Fermat. (Μονάδες 3)

A2. Να αποδείξετε το Θεώρημα Fermat. (Μονάδες 5)

A3. Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ . (Μονάδες 4)

A4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \ln x$, $h(x) = e^x$.

Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι οι συναρτήσεις $f \circ f$, $g \circ h$, $h \circ g$ είναι ίσες.

Είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός του μαθητή;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

A5. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με τις λέξεις **Σωστό** ή **Λάθος**.

α) Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι γνησίως μονότονη.

β) Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο τότε δεν είναι 1-1.

γ) Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι συνεχής στο x_0 .

δ) Αν μια συνάρτηση παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 τότε είναι συνεχής στο x_0 .

ε) Αν $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx > 0$ τότε $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

(Μονάδες 10)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x + \frac{32}{x}$, $x \in (0, +\infty)$.

B1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (Μονάδες 5)

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$. (Μονάδες 3)

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f . (Μονάδες 5)

B4. Έστω συνάρτηση g συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[1,2]$ με $g(1) = 14$ και $g(2) = 21$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1,2)$ για το οποίο $f(x_0) = g(x_0)$. (Μονάδες 6)

B5. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδόν 16 cm^2 , να βρείτε τις διαστάσεις

του ορθογωνίου που έχει την ελάχιστη περίμετρο. (Μονάδες 6)

Θέμα Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3 + x + 1 & , x \geq 0 \\ e^x - \frac{x}{e} + \beta & , x < 0 \end{cases}$ και $\beta = e^\alpha + \alpha^{21} - 1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\beta = 0$ και $\alpha = 0$. (Μονάδες 6)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 7)

Γ3. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 21$. (Μονάδες 6)

Γ4. Ένα σημείο $K(x, y)$ ξεκινά από το $N(0,1)$ και κινείται στην καμπύλη $y = x^3 + x + 1$, $x \geq 0$.

Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του K είναι $x'(t) = \frac{1}{2}$ cm / sec .

Τα σημεία $A(-5,0)$, $E(-1,0)$ και $K(x, y)$, δημιουργούν τρίγωνο ΑΕΚ το οποίο έχει εμβαδόν $E(t)$.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΕΚ, τη στιγμή κατά την οποία αυτό έχει εμβαδόν 22 cm^2 . (Μονάδες 6)

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot (1 - k \cdot \ln x)$ για την οποία ισχύει $f(x) \leq 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $k = 2$ και στη συνέχεια να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 5)

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε το σημείο καμπής της C_f . (Μονάδες 3)

Δ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία την "διαπερνά" και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι ισχύει $e^2 f(x) + 1 - 4ex \geq 0$ για κάθε $x \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$. (Μονάδες 5)

Δ4. Αν $\alpha \in (0,1)$, να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$, την ευθεία $x = \alpha$ και την ευθεία $x = 1$.

Στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} E(\alpha)$. (Μονάδες 7)

Δ5. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι ισχύει :

$10 f(x^2 + 3) > 9 f(x^2 + 1) + f(x^2 + 21)$ (Μονάδες 5)

Ευχόμαστε επιτυχία στις εξετάσεις !!!

Οι καθηγητές σας

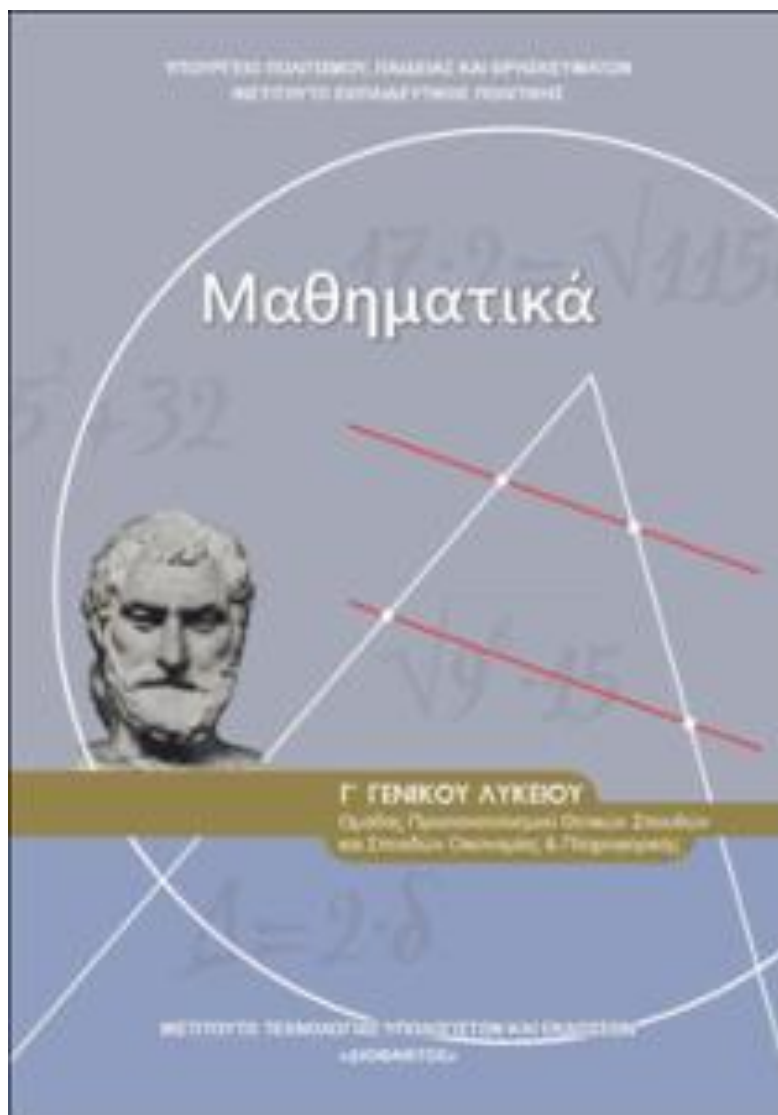
Βαλμά Ε.

Καστόρας Ν.

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' Τάξης Ενιαίου Λυκείου

Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας και Πληροφορικής



Θέμα Α

A1) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν:

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ

Να δειχθεί ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .

Μονάδες 6

A2) Διατυπώστε το θεώρημα μέσης τιμής και στην συνέχεια δώστε την γεωμετρική ερμηνεία του.

Μονάδες 4

A3) Να χαρακτηρίσετε την πρόταση που ακολουθεί ως Αληθή ή Ψευδή και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

«Αν μια παραγωγίσιμη συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ τότε υποχρεωτικά η παράγωγος της είναι θετική στο Δ .»

Μονάδες 5

A4) Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με Σωστό ή Λάθος αν αντίστοιχα η πρόταση είναι σωστή ή λάθος.

α) Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης, της γραφικής παράστασης της μιας παραγωγίσιμης συνάρτησης στο x_0 του πεδίου ορισμού της, ισούται με τον ρυθμό μεταβολής της συνάρτησης στο x_0 .

β) Αν μια συνάρτηση f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[\alpha, \beta]$, τότε η f δεν είναι 1-1.

γ) Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f, g: R \rightarrow R$. Αν ισχύει $f(x) = g(x)$ για κάθε $x \in R$, τότε $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in R$.

δ) Αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ τότε $f'(\alpha) < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} < f'(\beta)$.

ε) Αν μια συνάρτηση $f: R \rightarrow R$ έχει συνεχή πρώτη παράγωγο και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο R .

Μονάδες 10**Θέμα Β**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^4 - bx^2 + 2$ όπου $a, b \in R$ για την οποία ισχύει ότι έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(1, f(1))$ την ευθεία $y = 2x$. Δίνεται επίσης η συνάρτηση $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

B1) Να δείξετε ότι $a = 1$ και $b = 1$.

Μονάδες 6

B2) Να βρείτε την $h(x) = (f \circ g)(x)$, να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 7

B3) Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $h(x) = \kappa$ για τις διάφορες τιμές του $\kappa \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

B4) Να δείξετε ότι η εξίσωση $h(x) = 3\eta\mu x$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες στο $(0, \pi)$.

Μονάδες 7

Θέμα Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \ln x + 2a - x^2, x > 0$ και $a > 0$.

Γ1) Να αποδείξετε ότι η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη σε σημείο της με τετμημένη $x_0 = \sqrt{\frac{a}{2}}$.

Μονάδες 5

Γ2) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης f και να αποδειχθεί ότι η συνάρτηση παρουσιάζει ολικό μέγιστο το οποίο εξαρτάται από την τιμή της παραμέτρου a .

Μονάδες 7

Γ3) Αν ισχύει ότι $f(x) \leq f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, να βρεθεί η ελάχιστη από τις μέγιστες τιμές που μπορεί να πάρει η συνάρτηση f .

Μονάδες 6

Για το παρακάτω ερώτημα υποθέτουμε ότι $a = 2$.

Γ4) Σημείο M κινείται πάνω στην γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f , αν η τετμημένη του σημείου έχει ρυθμό μεταβολής σταθερό και ίσο με $2 \mu/sec$ να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου M την χρονική στιγμή t_0 που διέρχεται από το μέγιστο της f .

Μονάδες 7

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την οποία ισχύει ότι $2xf(x) + 2x = f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ότι η f' έχει ρυθμό μεταβολής στο σημείο $x_0 = 0$ ίσο με $\frac{2}{e}$.

Δ1) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)+1}{e^{x^2}}$ είναι σταθερή.

Μονάδες 3

Δ2) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x}$.

Μονάδες 4

Δ3) Να δείξετε ότι $f(0) = \frac{1}{e} - 1$ και ότι $f(x) = e^{x^2-1} - 1$.

Μονάδες 7

Δ4) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x - 1$ έχει ακριβώς δυο ρίζες x_1, x_2 για τις οποίες ισχύει ότι:

$$0 < x_1 < 1 < x_2 < 2.$$

Μονάδες 5

Δ5) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (1,2)$ στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της f ισούται με $\frac{e^3-2x_2}{2-x_2}$.

Μονάδες 6

Καλή επιτυχία!

Θέμα 1

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$ με $x \in (-2, +\infty)$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 10)
- β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα. (Μονάδες 5)
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$. (Μονάδες 5)
- δ) Να αποδείξετε ότι $4 \cdot f(x) - x - 2 \geq 0$ για κάθε $x \in (-2, +\infty)$. (Μονάδες 5)

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+4}{2x+3} + 2$

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f . (Μονάδες 10)
- γ) Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή στο $(-\frac{3}{2}, +\infty)$.
Να αποδείξετε ότι ισχύει $21 \cdot f(1) < 20 \cdot f(0) + f(21)$ (Μονάδες 5)

Θέμα 3

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x^2}$ με $x \in (0, \frac{\pi}{2})$.

- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (Μονάδες 10)
- β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\pi^2 \cdot f(x) = 21$ (Μονάδες 5)
- γ) Για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in (0, \frac{\pi}{2})$ με $\alpha < \beta$, να αποδείξετε ότι :
$$f(\beta) - f(\alpha) < \beta^3 - \alpha^3 - \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha}$$
 (Μονάδες 5)

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}x^2 \cdot \ln x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{3}{2}x$

- α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη. (Μονάδες 5)
- β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 10)
- γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός θετικός x_0 τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$ (Μονάδες 5)
- δ) Αν x_0 η ρίζα της f , να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια :

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x_0}{f(x)-f(1)} \qquad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x-x_0}{(f(x)-f(x_0))^3} \qquad (\text{ Μονάδες 10 })$$

Θέμα Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε διάστημα Δ .

Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , να δείξετε ότι

η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ .

(6 μονάδες)

A2. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 ,

τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

(6 μονάδες)

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0

του πεδίου ορισμού της;

(3 μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας **Σωστό** ή **Λάθος**.

α) Η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ είναι κοίλη στο $(0, +\infty)$.

γ) Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

δ) Η ευθεία $x = 0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$.

ε) Η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της $f(x) = x + \frac{1}{x}$

(10 μονάδες)

Θέμα Β

B1. Δίνεται $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και

$f(\alpha) = f(\beta)$ για αριθμούς α, β με $0 < \alpha < \beta$.

Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο.

(6 μονάδες)

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = (x - 1) \cdot (\ln x - 1)$

B2. Να δείξετε ότι υπάρχει μόνο μια εφαπτομένη της C_f η οποία σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$

και να βρείτε την εξίσωσή της.

(5 μονάδες)

B3. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο σε σημείο $x_0 \in (1, 2)$.

(4 μονάδες)

B4. Να δείξετε ότι $f(x) > -1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

(7 μονάδες)

B5. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \frac{f(x)}{x^2 - 2x + 1}$. (3 μονάδες)

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη με $f(1) = f'(1) = 0$ και

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{x} \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

Γ1. Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής και ότι ο άξονας $x'x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο αυτό. (6 μονάδες)

Γ2. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (6 μονάδες)

Για τα επόμενα ερωτήματα επιπλέον δίνονται :

$$f(x) = x \ln x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x + \frac{5}{6} \text{ και } g(x) = x^3 \cdot e^{x^2+1} + 1$$

Γ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (4 μονάδες)

Γ4. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g δεν έχουν κοινό σημείο. (4 μονάδες)

Γ5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$. (5 μονάδες)

Θέμα Δ

Δ1. Δίνεται συνάρτηση f με $f^3(x) + f(x) = nx$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0. (3 μονάδες)
- ii) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. (3 μονάδες)
- iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$. (2 μονάδες)

Δ2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση g με $g^3(x) + g(x) = x^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i) Να δείξετε ότι $g(0) = 1$. (3 μονάδες)
- ii) Να μελετήσετε την g ως προς τα ακρότατα. (4 μονάδες)
- iii) Να δείξετε ότι $g(1) > 1$ και $g(2) < 2$. (2 μονάδες)
- iv) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο της C_g και της ευθείας $y = x$. (3 μονάδες)
- v) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) < 1$ (3 μονάδες)

Δ3. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g (των Δ1 και Δ2) δεν έχουν κοινό σημείο. (2 μονάδες)

Καλή επιτυχία !!!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

A (A4) $\alpha) \wedge \beta) \leq \gamma) \leq \delta) \wedge \varepsilon) \leq$

B (B1) Ano θ. Rolle $x_0 \in (\alpha, \beta)$ $f'(x_0) = 0$
 $0 < x < x_0 \xrightarrow{f' \uparrow} f'(x) < 0$
 $x > x_0 \xrightarrow{f' \downarrow} f'(x) > 0$

x	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

(B2) $f(x) = (x-1)(\ln x - 1)$ $f'(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ $f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0, \forall x > 0$
 $f'(x) = -1 \Leftrightarrow f'(x) = f'(1) \xleftrightarrow{f' \uparrow} x = 1$
 $(\varepsilon): y - f(1) = f'(1) \cdot (x-1) \Leftrightarrow y = -x + 1$

(B3) $f'(1) = -1 < 0$ $f'(2) = \ln 2 - \frac{1}{2} > 0$ Ano θ. Bolzano $x_0 \in (1, 2)$ $f'(x_0) = 0$
 Οπως στο B1 ...

(B4) $f \uparrow \Rightarrow f(x) \geq -x + 1 \Rightarrow f(x_0) \geq -x_0 + 1$
 $1 < x_0 < 2 \Rightarrow -1 > -x_0 > -2 \Rightarrow 0 > 1 - x_0 > -1$ Αρα $f(x) \geq f(x_0) \geq 1 - x_0 > -1$

(B5) $x=0$ και $x=1$ ενταξόμενες αδιόριστες και $y=0$ ορίζεται στο $+\infty$

Γ (Γ1)

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$			

Σ.Κ.
A(1,0)

$(\varepsilon): y - f(1) = f'(1) (x-1)$
 $\Leftrightarrow y = 0$

Αρα ο $x'x$ εφαρ. στην C στο A(1,0)

(Γ2)

x	0	1	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
$f'(x)$			

$f'(1) = 0$

$f'(x) \leq 0$
 $f \searrow (0, +\infty)$
 $f \downarrow$
 f αντιστρέφεται

(Γ3) $P(D_f) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \right) = \left(-\infty, \frac{5}{6} \right)$

(Γ4) $g \uparrow \mathbb{R}$ Για $x > 0 \xrightarrow{g \uparrow} g(x) > g(0) \Leftrightarrow g(x) > 1$
 Οπως $f(x) < \frac{5}{6} < 1$ Αρα $f(x) \neq g(x)$ για κάθε $x > 0$

(Γ5) $E = \dots = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{x^2+1} 2x dx + \int_0^1 1 dx = \dots = \frac{e+2}{2}$

Δ

$$\Delta 1) i) f'(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0)(f'(0) + 1) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0 \left. \begin{array}{l} f \\ \text{convex} \\ \text{on} \\ 0 \end{array} \right\}$$

$$|f(x)| = \left| \frac{ux}{f'(x) + 1} \right| \leq \frac{|ux|}{f'(x) + 1} \text{ Arô k.p. Tap. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$ii) \frac{f(x)}{x} = \frac{ux}{x} \cdot \frac{1}{f'(x) + 1} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \dots = 1 \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$iii) y - f(0) = f'(0)(x - 0) \Leftrightarrow y = x$$

$$\Delta 2) i) g^3(0) + g(0) = 2 \xLeftrightarrow \phi(x) = x^3 + x \xLeftrightarrow \phi(g(0)) = \phi(1) \xLeftrightarrow g(0) = 1$$

$$ii) 3g^2(x)g'(x) + g'(x) = 2x$$

$$g'(x) = \frac{2x}{3g^2(x) + 1}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$		$\nearrow$	$\nearrow$

o.e.
 $g(0) = 1$

$$iii) 1 > 0 \xRightarrow{g \uparrow 0, +} g(1) > g(0) \Rightarrow g(1) > 1$$

$$\text{Εγω } g(2) \geq 2 \text{ τότε } g^3(2) \geq 8 \text{ και } g(2) + g^3(2) \geq 10$$

$$\text{Οπω } g(2) + g^3(2) = 6 \text{ Άρα } g(2) < 2.$$

$$iv) h(x) = g(x) - x \text{ convex on } [1, 2] \quad h(1) = g(1) - 1 > 0 \quad h(2) = g(2) - 2 < 0$$

Από Bolzano $\exists x_0 \in (1, 2) \quad h(x_0) = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = x_0$

$$v) \text{ Από M.T } \exists \xi \in (1, 2) \quad g'(\xi) = \frac{g(2) - g(1)}{2 - 1} = g(2) - g(1)$$

$$\text{Οπω } g(2) < 2 \text{ και } g(1) > 1 \Leftrightarrow -g(1) < -1 \quad \text{Άρα } g(2) - g(1) < 1$$

$$\Rightarrow g'(\xi) < 1$$

$$\Delta 3) \text{ Εγω οι } \forall x \in \mathbb{R} \quad x \text{ τ.ω. } f(x) \geq 1$$

$$\text{Τότε } f^3(x) \geq 1 \text{ τότε } f^3(x) + f(x) \geq 2 \Leftrightarrow ux \geq 2 \text{ Άρα}$$

$$\text{Άρα } f(x) < 1 \text{ για κάτ } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Από sz ii) } g(x) \geq 1 \text{ για κάτ } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα } f(x) \neq g(x) \text{ για κάτ } x \in \mathbb{R}$$

$$\text{οποτε οι } f \text{ και } g \text{ δε είναι ταυτό } \text{ συνάρτ.}$$

Θέμα

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\alpha - 2)(x - 1)^3 + (\alpha - 3)(x - 1)^2 + (\alpha - 2)(\alpha - 3)x$, $x \in \mathbb{R}$ και $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Αν $\alpha=1$ να δείξετε ότι :

i) η f έχει ακριβώς 3 ρίζες x_1, x_2, x_3 με $x_1 < -1 < x_2 < 1 < x_3$.

ii) υπάρχει $\xi \in (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές του α για τις οποίες η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1.

γ) Αν $\alpha = 2$ να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την εφαπτομένη της στο $A(2, f(2))$ και τον $x'x$.

δ) Αν $\alpha = 3$ τότε :

i) Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(2, f(2))$ είναι η ευθεία $y = 3x - 5$.

ii) Αν $h(x) = 6 \ln(x - 1) + 4 - 6 \ln 2$, να δείξετε ότι η ευθεία $y = 3x - 5$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_h .

iii) Να δείξετε ότι $\int_2^3 e^x f(x) dx > e^3 + 2e^2 > \int_2^3 e^x h(x) dx$

iv) Αν F μια παράγουσα της f , να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$F(x + 1) + F(x + 5) < F(x) + F(x + 6)$$

Συνοπτική απάντηση

α) i) 3 φορές Θ. Bolzano ii) δυο φορές Θ. Rolle για την f και μετά Θ. Rolle για την f'

β) Αν η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1 τότε από Θ. Fermat έχουμε $f'(1) = 0$ (αναγκαία συνθήκη)

(προσοχή δεν ισχύει το αντίστροφο , δηλαδή αν $f'(1) = 0$ δεν είναι σίγουρο ότι έχει ακρότατο στο 1)

Εξετάζουμε για ποιες τιμές του α ισχύει $f'(1) = 0$ και βρίσκουμε $\alpha = 2$ ή $\alpha = 3$.

Για $\alpha=2$ είναι $f(x) = -(x - 1)^2$ που παρουσιάζει μέγιστο στο 1.

Για $\alpha=3$ είναι $f(x) = (x - 1)^3$ που είναι γνησίως αύξουσα και δεν έχει ακρότατα.

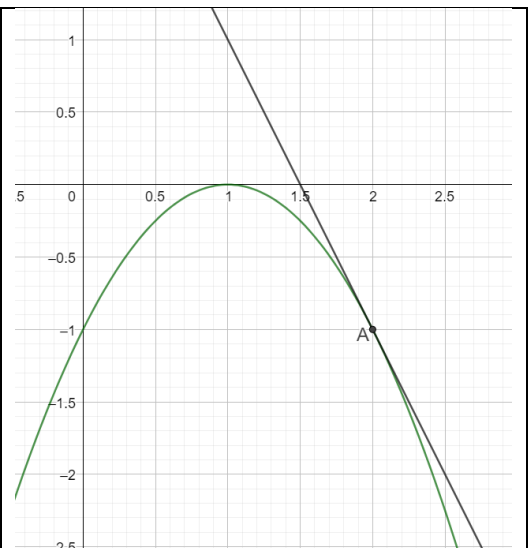
Άρα τελικά μόνο για $\alpha=2$ η f παρουσιάζει ακρότατο στο 1.

γ) Για $\alpha=2$ είναι $f(x) = -(x - 1)^2$
και εφαπτομένη είναι η ευθεία $y = -2x + 3$
η οποία τέμνει τον $x'x$ στο $B\left(\frac{3}{2}, 0\right)$

$$E = \int_{\frac{3}{2}}^2 -f(x) dx + \int_{\frac{3}{2}}^2 (-2x + 3 - f(x)) dx$$

ή

$$E = \int_1^2 -f(x) dx - \int_{\frac{3}{2}}^2 (2x - 3) dx$$



δ) Για $\alpha=3$ είναι $f(x) = (x-1)^3$

i) $y - f(2) = f'(2)(x-2) \dots\dots y = 3x - 5$

ii) $h(x) = 6 \ln(x-1) + 4 - 6 \ln 2$, $h'(x) = \frac{6}{x-1}$

$h'(x) = 3 \dots\dots x = 3$

$y - h(3) = h'(3)(x-3) \dots\dots y = 3x - 5$

iii) $f'(x) = 3(x-1)^2$

$f''(x) = 6(x-1) > 0$ για $x \in (1, +\infty)$ οπότε f κυρτή στο $[2,3] \subseteq [1, +\infty)$

$h'(x) = \frac{6}{x-1}$ και $h''(x) = -\frac{6}{(x-1)^2} < 0$ οπότε h κοίλη στο $[2,3] \subseteq (1, +\infty)$

Από την κυρτότητα των f, h προκύπτει η σχέση τους με την κοινή τους εφαπτομένη :

Στο $[2,3]$ ισχύει: $f(x) \geq 3x - 5 \geq h(x)$ (με τις ισότητες να ισχύουν μόνο στα άκρα)

Οπότε $f(x) \cdot e^x \geq e^x \cdot (3x - 5) \geq h(x) \cdot e^x$ (με τις ισότητες να ισχύουν μόνο στα άκρα)

Συνεπώς $\int_2^3 f(x) \cdot e^x dx > \int_2^3 e^x(3x - 5) dx > \int_2^3 h(x) \cdot e^x dx$

Όμως $\int_2^3 e^x(3x - 5) dx$ από ολοκλήρωση κατά παράγοντες ισούται με $e^3 + 2e^2$

Άρα τελικά $\int_2^3 e^x f(x) dx > e^3 + 2e^2 > \int_2^3 e^x h(x) dx$

iv) Η $f(x) = (x-1)^3$ είναι γνησίως αύξουσα.

Η F είναι παράγουσα της f οπότε $F'(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Θέλουμε $F(x+1) + F(x+5) < F(x) + F(x+6)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Ισοδύναμα θέλουμε $F(x+1) - F(x) < F(x+6) - F(x+5)$

Ορίζουμε $g(x) = F(x+1) - F(x)$ με $g'(x) = f(x+1) - f(x)$

Είναι $x < x+1$ και αφού f γνησίως αύξουσα είναι $f(x) < f(x+1)$

Συνεπώς δείξαμε ότι $g'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ δηλαδή g γνησίως αύξουσα.

Είναι $x < x+5$ και g γνησίως αύξουσα οπότε $g(x) < g(x+5)$

Ισοδύναμα $F(x+1) - F(x) < F(x+6) - F(x+5)$ δηλαδή το ζητούμενο.

Δεν ξεχνάμε να κοιτάζουμε τα στοιχεία που μας δίνουν τα προηγούμενα ερωτήματα !!!

Καλή επιτυχία !!!

Θέμα 1

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, έτσι ώστε $f(0) = e^2 f(1)$.
Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) + 2f(\xi) = 0$.

Θέμα 2

Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$ με $f(1) = 0$ και $g(x) = f(x)(x^2 - 4)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-2,2)$ τέτοιο ώστε $g''(x_0) = 0$.

Θέμα 3

Να δείξετε ότι η ευθεία $y = \alpha x + \beta$, $\alpha \neq 0$ έχει με την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = e^x$ το πολύ δύο κοινά σημεία.

Θέμα 4

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2 \ln x = 2 - x$, $x > 0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

Θέμα 5

Αν για κάθε $x > 0$ ισχύει $\ln x + \frac{2\alpha}{x+1} \geq \alpha x^2$, να αποδείξετε ότι $\alpha = \frac{2}{5}$.

Θέμα 6

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f .

Αν $f(19) = f(1)$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1,19)$ τέτοιοι ώστε $2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) + 4f'(\xi_3) = 0$.

Θέμα 7

Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta = [0, 1]$ και ισχύει $f(0) = 0$ και $f(1) = 1$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 1 - x_0$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

ΘΕΜΑ 8

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \ln^2 x - x + 1$ και συνάρτηση $f: R \rightarrow (0, +\infty)$ για την οποία ισχύει

$$\ln^2 f(0) = f(0) - 1. \text{ Επιπλέον δίνεται ότι } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2e^{2x_0} \text{ για κάθε } x_0 \in R.$$

α) Να αποδείξετε ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 1$ (Μονάδες 3)

γ) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^{2x}$, $x \in R$ (Μονάδες 3)

δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - f(-x)}{f(x) + f(-x)}$ (Μονάδες 3)

ε) Θεωρούμε την συνάρτηση $g(x) = x^2 + f(x)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in R$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$ και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_0 < 0$. (Μονάδες 6)

Θέμα 9

Δίνεται η $f(x) = e^x + x - 1$

Γ1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Γ2. Να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} , να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να την μελετήσετε ως προς το πρόσημο.

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα $x'x$

και τις ευθείες $x=0$ και $x=e$.

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $2f(x_0) = e^2 + e + 1$

Γ5. Για κάθε $x > 0$ να δείξετε ότι $20f(2x) < f(21x) + 19f(x)$

Θέμα 10

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x \cdot (\ln x - 1)$ και συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$x f'(x) = \ln x - f(x) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0.$$

Δ1. Να δείξετε ότι η g είναι παράγουσα της $h(x) = \ln x$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g .

Δ2. Αν $\theta \in (\pi, 2\pi)$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $g(x) = \eta \mu \theta$.

Δ3. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$

Δ4. Να δείξετε ότι $x^x \geq e^{x-1}$ για κάθε $x > 0$.

Δ5. Να δείξετε ότι $\int_1^2 x^x dx > e - 1$

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2025
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, για κάποιο $c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών.

Μονάδες 5

A3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Έστω $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση η οποία είναι “1-1”. Το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης, f^{-1} , της f είναι το σύνολο τιμών της f .

β) Αν f, g, h είναι τρεις συναρτήσεις και ορίζεται η $h \circ (g \circ f)$, τότε ορίζεται και η $(h \circ g) \circ f$ και ισχύει $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.

γ) Αν $v \in \mathbb{N}^*$, ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{2v}} = -\infty$.

δ) Αν μια συνάρτηση είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f σε κάθε σημείο του Δ βρίσκεται «πάνω» από τη γραφική της παράσταση, με εξαίρεση το σημείο επαφής τους.

- ε) Αν η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(x_0)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0)$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \alpha x^2 + 9x - 3$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Δίνεται ακόμα ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο σημείο $x_0 = 1$.

- B1.** Να βρείτε την τιμή του α .

Μονάδες 5

Στα ερωτήματα B2 έως B4 να θεωρήσετε ότι $\alpha = -6$.

- B2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις θετικές πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 10

- B3.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 6

- B4.** Έστω $g(x) = x + f(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Αν $\xi \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g στα σημεία $A(\xi, f(\xi))$ και $B(\xi, g(\xi))$, αντίστοιχα, τέμνονται πάνω στον άξονα $y'y$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} e^{x\eta\mu x} & , \quad x < 0 \\ \sqrt{x^2 + x} & , \quad x \geq 0 \end{cases}$$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ (μονάδες 2) αλλά όχι παραγωγίσιμη στο x_0 (μονάδες 4).

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .
Μονάδες 7

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει την ευθεία $(\varepsilon): y = x + \frac{1}{2}$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $\xi \in (-\pi, 0)$.
Μονάδες 5

Γ4. Ένα κινητό M ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$, $x \geq 0$, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης x του M , $x'(t)$, να είναι θετικός για κάθε $t \geq 0$. Να εξετάσετε εάν υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \geq 0$ τέτοια ώστε ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης y του M να είναι ίσος με τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του M .
Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και μια παράγουσα, F , της f στο $(0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει ότι:

$$xf(x) = 2F(x)\ln x, \text{ για κάθε } x > 0.$$

Δίνεται ακόμα ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y = 2x$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{F(x)}{x^{\ln x}}$, $x > 0$, είναι σταθερή.
Μονάδες 6

Δ2. i) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\ln x}$. (μονάδες 4)

ii) Να αποδείξετε ότι $F(1) = 1$ (μονάδες 3) και $F(x) = x^{\ln x}$, για κάθε $x > 0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 9

- Δ3.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση F (μονάδες 2) και να λύσετε την εξίσωση $F(x^2) = F(x) - (x-1)^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 5

- Δ4.** Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν E του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης F , τις ευθείες $x=1$, $x=e$ και τον άξονα $x'x$ ισχύει $E > 2e - 3$.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑ Γ 2012

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-1)\ln x-1$, $x>0$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\Delta_1=(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\Delta_2=[1,+\infty)$. Στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Μονάδες 6

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^{x-1}=e^{2013}$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

- Γ3.** Αν x_1, x_2 με $x_1<x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος Γ2, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(x_1,x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(x_0)+f(x_0)=2012$$

Μονάδες 6

- Γ4.** Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=f(x)+1$ με $x>0$, τον άξονα x' και την ευθεία $x=e$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ 2010

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$, $x\in\mathbb{R}$

- Γ1.** Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

Μονάδες 5

- Γ2.** Να λύσετε την εξίσωση:

$$2(x^2-3x+2)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$$

Μονάδες 7

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο σημεία καμπής και ότι οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της f στα σημεία καμπής της τέμνονται σε σημείο του άξονα $\psi\psi$.

Μονάδες 6

- Γ4.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I=\int_{-1}^1 xf(x)dx$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ 2011

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, με $f'(0)=f(0)=0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$e^x(f'(x)+f''(x)-1)=f'(x)+xf''(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι: $f(x)=\ln(e^x-x)$, $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 8

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 3

Γ3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς δύο σημεία καμπής.

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(e^x-x) = \sin x$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 2^ο 2006

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=2+(x-2)^2$ με $x \geq 2$.

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f και να βρείτε τον τύπο της.

Μονάδες 8

γ. i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} με την ευθεία $y=x$.

Μονάδες 4

ii. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και f^{-1} .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3^ο 2007

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$$

όπου $\theta \in \mathbb{R}$ μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

- α. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο, ένα τοπικό ελάχιστο και ένα σημείο καμπής.

Μονάδες 7

- β. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Μονάδες 8

- γ. Αν x_1, x_2 είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων και x_3 η θέση του σημείου καμπής της f , να αποδειχθεί ότι τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$ και $\Gamma(x_3, f(x_3))$ βρίσκονται στην ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 3

- δ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και την ευθεία $y = -2x - 2\eta\mu^2\theta$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 2^ο 2004

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = x^2 \ln x$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f , να μελετήσετε την μονοτονία της και να βρείτε τα ακρότατα.

Μονάδες 10

- β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής.

Μονάδες 8

- γ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3^ο 2009

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = a^x - \ln(x+1), \quad x > -1,$$

όπου $a > 0$ και $a \neq 1$

A. Αν ισχύει $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$, να αποδείξετε ότι $a=e$

Μονάδες 8

B. Για $a=e$,

α. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

Μονάδες 5

β. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-1, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$

Μονάδες 6

γ. αν $\beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{f(\beta)-1}{x-1} + \frac{f(\gamma)-1}{x-2} = 0$$

έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(1, 2)$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο 2002

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης $f \circ g$ είναι 1-1.

α. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

Μονάδες 7

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση:

$g(f(x) + x^3 - x) = g(f(x) + 2x - 1)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Μονάδες 18

ΘΕΜΑ 3^ο 2008

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x \ln x, & x > 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$

α. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0.

Μονάδες 3

β. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 9

γ. Να βρείτε το πλήθος των διαφορετικών θετικών ριζών της εξίσωσης $x = e^{\frac{a}{x}}$ για όλες τις πραγματικές τιμές του a .

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι ισχύει

$$f'(x+1) > f(x+1) - f(x) ,$$

για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4^ο 2006

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x-1} - \ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 5

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο $A(a, \ln a)$ με $a>0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta, e^\beta)$ με $\beta \in \mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός a είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

Μονάδες 9

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 4^ο 2008

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \int_0^2 f(t) dt - 45$$

α. Να αποδείξετε ότι

$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

Μονάδες 8

β. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι

$$g''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

Μονάδες 4

γ. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (α) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (β) ισχύει ότι

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} = f(x) + 45$$

και $g(0) = g'(0) = 1$, τότε

i. να αποδείξετε ότι $g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

Μονάδες 10

ii. να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ 2^ο 2001

Έστω f μια πραγματική συνάρτηση με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 3 \\ \frac{1 - e^{x-3}}{x-3}, & x > 3 \end{cases}$$

α. Αν η f είναι συνεχής, να αποδείξετε ότι $a = -1/9$.

Μονάδες 9

β. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης f στο σημείο $A(4, f(4))$.

Μονάδες 7

γ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=2$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 3^ο 2005

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = e^{\lambda x}$, $\lambda > 0$.

α. Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 3

β. Δείξτε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f , η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, είναι η $y = \lambda e x$.

Βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου επαφής M .

Μονάδες 7

γ. Δείξτε ότι το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου, το οποίο περικλείεται μεταξύ της γραφικής παράστασης της f , της εφαπτομένης της στο σημείο M και του άξονα $y'y$, είναι $E(\lambda) = \frac{e-2}{2\lambda}$.

Μονάδες 8

δ. Υπολογίστε το $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 3ο 2003

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$.

α. Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και τα κοίλα και να αποδείξετε ότι η f έχει αντίστροφη συνάρτηση.

Μονάδες 6

β. Να αποδείξετε ότι $f(e^x) \geq f(1+x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ είναι ο άξονας συμμετρίας των γραφικών παραστάσεων της f και της f^{-1} .

Μονάδες 5

δ. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f^{-1} , τον άξονα των x και την ευθεία με εξίσωση $x=3$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο 2003

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα $[α,β]$ που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $(α,β)$. Αν ισχύει $f(α) = f(β) = 0$ και υπάρχουν αριθμοί $γ ∈ (α,β)$, $δ ∈ (α,β)$, έτσι ώστε $f(γ) \cdot f(δ) < 0$, να αποδείξετε ότι:

α. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $(α,β)$.

Μονάδες 8

β. Υπάρχουν σημεία $ξ_1, ξ_2 ∈ (α,β)$ τέτοια ώστε $f''(ξ_1) < 0$ και $f''(ξ_2) > 0$.

Μονάδες 9

γ. Υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 3ο 2000

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x ∈ (0,1)$. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$, να δείξετε ότι:

α. η ευθεία $y=3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 ∈ (0,1)$.

Μονάδες 7

β. υπάρχει $x_1 ∈ (0,1)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_1) = \frac{f(1/5) + f(2/5) + f(3/5) + f(4/5)}{4}$$

Μονάδες 12

γ. υπάρχει $x_2 ∈ (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(x_2, f(x_2))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=2x+2000$.

ΘΕΜΑ 4ο 2002

α. Έστω δύο συναρτήσεις h, g συνεχείς στο $[α, β]$.

Να αποδείξετε ότι αν $h(x) > g(x)$ για κάθε $x \in [α, β]$, τότε

$$\text{και} \quad \int_{\alpha}^{\beta} h(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} g(x) dx .$$

Μονάδες 2

β. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f , που ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) - e^{-f(x)} = x - 1, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad f(0) = 0 .$$

ι) Να εκφραστεί η f' ως συνάρτηση της f .

Μονάδες 5

ιι) Να δείξετε ότι $\frac{x}{2} < f(x) < x f'(x)$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 12

ιιι) Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου Ω που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$ και τον άξονα $x'x$, να δείξετε ότι

$$\frac{1}{4} < E < \frac{1}{2} f(1) .$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο 2001

Για μια συνάρτηση f , που είναι παραγωγίσιμη στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$, ισχύει ότι:

$$f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R},$$

όπου β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\beta^2 < 3\gamma$.

α. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Μονάδες 10

β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 8

γ. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα $(0,1)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ 2014

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f: A \rightarrow \mathbb{R}, \quad A = (0, +\infty)$$

με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε

$$e^{f(x)} (f^2(x) - 2f(x) + 3) = x, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 4) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3, δίνεται ότι

$$f^{-1}(x) = e^x (x^2 - 2x + 3), \quad x \in \mathbb{R}$$

- Δ2.** Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. (μονάδες 3)
Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} , την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, και την ευθεία $x=1$ (μονάδες 6)

Μονάδες 9

- Δ3.** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A(x, f^{-1}(x))$, $B(f^{-1}(x), x)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

- i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1 (μονάδες 3)
- ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A , B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

(μονάδες 6)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ 2012

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$xf(x)+1=e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} \frac{e^x-1}{x}, & x \neq 0 \\ 1 & , x=0 \end{cases}$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2f(x)=x+2, x \in \mathbb{R}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

Μονάδες 8

Γ4. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0^+} [x(\ln x) \ln(f(x))]$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ 3° 2009

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \ln[(\lambda+1)x^2+x+1] - \ln(x+2), \quad x > -1$$

όπου λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \geq -1$

A. Να προσδιορίσετε την τιμή του λ , ώστε να υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και να είναι πραγματικός αριθμός.

Μονάδες 5

B. Έστω ότι $\lambda = -1$

α. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 10

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

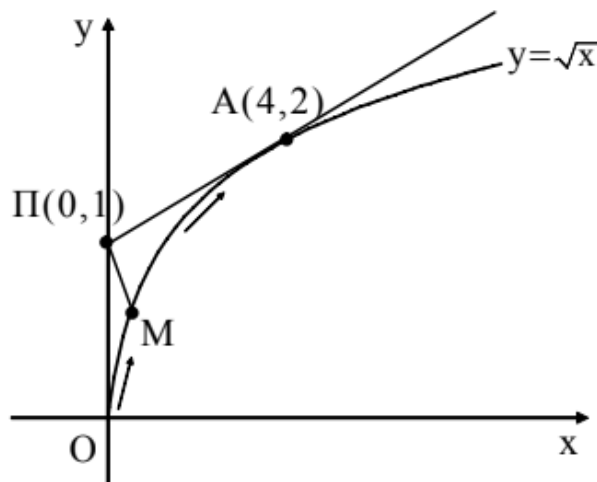
Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \alpha^2 = 0$ έχει μοναδική λύση για κάθε πραγματικό αριθμό α με $\alpha \neq 0$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ 2011

Ένα κινητό M κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$. Ένας παρατηρητής βρίσκεται στη θέση $\Pi(0,1)$ ενός συστήματος συντεταγμένων Oxy και παρατηρεί το κινητό από την αρχή O , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του κινητού για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ είναι $x'(t) = 16 \text{ m/min}$

- Γ1.** Να αποδείξετε ότι η τετμημένη του κινητού, για κάθε χρονική στιγμή t , $t \geq 0$ δίνεται από τον τύπο:

$$x(t) = 16t$$

Μονάδες 5

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι το σημείο της καμπύλης μέχρι το οποίο ο παρατηρητής έχει οπτική επαφή με το κινητό είναι το $A(4,2)$ και, στη συνέχεια, να υπολογίσετε πόσο χρόνο διαρκεί η οπτική επαφή.

Μονάδες 6

- Γ3.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που διαγράφει η οπτική ακτίνα ΠM του παρατηρητή από το σημείο O μέχρι το σημείο A .

Μονάδες 6

- Γ4.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει χρονική στιγμή $t_0 \in (0, \frac{1}{4})$, κατά την οποία η απόσταση $d = (\Pi M)$ του παρατηρητή από το κινητό γίνεται ελάχιστη.

Μονάδες 8

Να θεωρήσετε ότι το κινητό M και ο παρατηρητής Π είναι σημεία του συστήματος συντεταγμένων Oxy .

ΘΕΜΑ Α 2011

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία είναι 3 φορές παραγωγίσιμη και τέτοια, ώστε:

- i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$
- ii) $f'(0) < f(1) - f(0)$ και
- iii) $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Α1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

Μονάδες 3

Α2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Αν επιπλέον $g(x) = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$, τότε:

Α3. Να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο και να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{xg(x)}$

Μονάδες 6

Α4. Να αποδείξετε ότι $\int_0^2 f(x) dx > 2$

ΘΕΜΑ 2^ο 2007

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu 3x}{x}, & x < 0 \\ x^2 + \alpha x + \beta \sin x, & x \geq 0. \end{cases}$$

α. Να αποδειχθεί ότι $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 3$.

Μονάδες 8

β. Αν $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta = 3$.

Μονάδες 9

γ. Αν $\alpha = \beta = 3$, να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $\int_0^\pi f(x) dx$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4^ο 2009

Δίνεται μια συνάρτηση $f: [0,2] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες

$$f''(x) - 4f'(x) + 4f(x) = k x e^{2x}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

$$f'(0) = 2f(0), \quad f'(2) = 2f(2) + 12e^4, \quad f(1) = e^2$$

όπου k ένας πραγματικός αριθμός.

- α.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = 3x^2 - \frac{f'(x) - 2f(x)}{e^{2x}}, \quad 0 \leq x \leq 2$$

ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο διάστημα $[0,2]$.

Μονάδες 4

- β.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,2)$ τέτοιο, ώστε να ισχύει

$$f''(\xi) + 4f(\xi) = 6\xi e^{2\xi} + 4f'(\xi)$$

Μονάδες 6

- γ.** Να αποδείξετε ότι $k = 6$ και ότι ισχύει $g(x) = 0$ για κάθε $x \in [0,2]$.

Μονάδες 6

- δ.** Να αποδείξετε ότι $f(x) = x^3 e^{2x}$, $0 \leq x \leq 2$

Μονάδες 5

- ε.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$\int_1^2 \frac{f(x)}{x^2} dx$$

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Γ 2010

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x + x - 3$, $x > 0$

Γ1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[1, +\infty)$

Μονάδες 5

Γ3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς θετικές ρίζες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του ερωτήματος **Γ3** με $x_1 < x_2$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιος, ώστε $\xi \cdot f'(\xi) - f(\xi) = 0$
και ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο $M(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Α 2014

A1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) , με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 4

A3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 3ο 2008

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2 \ln x$, $x > 0$.

α. Να αποδείξετε ότι ισχύει: $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

β. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

γ. Έστω η συνάρτηση

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln x}{f(x)} & , \quad x > 0 \\ k & , \quad x = 0 \end{cases}$$

i. Να βρείτε την τιμή του k έτσι ώστε η g να είναι συνεχής.

Μονάδες 6

ii. Αν $k = -\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι η g έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0, e)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ 4ο 2006

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \ln(x+1) - (x+1) \ln x$ με $x > 0$.

α. i. Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x}$, $x > 0$.

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Μονάδες 12

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln(1 + \frac{1}{x})$.

Μονάδες 5

γ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $a \in (0, +\infty)$ τέτοιος ώστε $(a+1)^a = a^{a+1}$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4^ο 2005

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - x}{x^2} = 2005.$$

α. Να δείξετε ότι:

i. $f(0)=0$

Μονάδες 4

ii. $f'(0)=1$.

Μονάδες 4

β. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ έτσι, ώστε: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + \lambda(f(x))^2}{2x^2 + (f(x))^2} = 3$.

Μονάδες 7

γ. Αν επιπλέον η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο στο $\mathbb{R}$ και $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι:

i. $xf(x) > 0$ για κάθε $x \neq 0$.

Μονάδες 6

ii. $\int_0^1 f(x) dx < f(1)$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ 2ο 2004

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 2^x + m^x - 4^x - 5^x$, όπου $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.

α. Να βρείτε τον m ώστε $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 13

β. Αν $m = 10$, να υπολογισθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

Μονάδες 12

ΘΕΜΑ 3ο 2003

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$.

α. Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Μονάδες 5

β. Να βρείτε την πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f , όταν το x τείνει στο $-\infty$.

Μονάδες 6

γ. Να αποδείξετε ότι $f'(x) \cdot \sqrt{x^2 + 1} + f(x) = 0$.

Μονάδες 6

δ. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \ln(\sqrt{2} + 1)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ 4ο 2003

Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$$f(x) = -f(2-x) \text{ και } f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη .

Μονάδες 8

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Μονάδες 8

γ. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{f'(x)}$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα $x'x$, σχηματίζει με αυτόν γωνία 45° .

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ 2ο 2002

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$.

- α. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} .

Μονάδες 10

- β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το μηδέν.

Μονάδες 5

- γ. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f^{-1}(x) dx$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Α 2015

- A1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν η F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ , και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 7

- A2. Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Μονάδες 4

- A3. Πότε η ευθεία $x = x_0$ λέγεται κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης f ;

Μονάδες 4

Διαγώνισμα στα μαθηματικά

Θέμα Α

- A1.** Έστω f συνεχής σε διάστημα Δ . Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,
να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ . (6 μονάδες)
- A2.** Να αποδείξετε ότι αν f παραγωγίσιμη στο x_0 τότε είναι και συνεχής στο x_0 . (3 μονάδες)
- A3.** Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ ; (3 μονάδες)
- A4.** Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων μιας συνάρτησης; (3 μονάδες)
- A5.** Για κάθε μια πρόταση να γράψετε : Σωστό ή Λάθος
- 1) Αν $f'(x_0) = 0$ τότε η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 .
 - 2) Αν μια συνάρτηση δεν μηδενίζει τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο.
 - 3) Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f είναι 1-1.
 - 4) Αν $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$
 - 5) Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 τότε $f'(x_0) = 0$
- (10 μονάδες)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x-3} + x - 2$

- B1.** Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (6 μονάδες)
- B2.** Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα. (3 μονάδες)
- B3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της C_f . (6 μονάδες)
- B4.** Να σχεδιάσετε την C_f . (6 μονάδες)
- B5.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την πλάγια ασύμπτωτη της C_f , την ευθεία $x = 4$ και την ευθεία $x = 5$. (4 μονάδες)

Θέμα Γ

Γ1. Έστω $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και $f'(x) = \frac{x \cdot f(x)}{x+1}$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$.

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{(x+1)f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή

και στη συνέχεια να βρείτε την f .

(5 μονάδες)

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα. (6 μονάδες)

Γ3. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών

της εξίσωσης $e^{f(x)} = \mu$ (5 μονάδες)

Γ4. Έστω α, β με $-1 < \alpha < \beta$. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right) < \frac{2f(\alpha)+f(\beta)}{3}$ (5 μονάδες)

Γ5. Αν $h(x) = 1 - (x-1)^{2024}$, να εξετάσετε αν οι C_f και C_h έχουν κοινά σημεία. (4 μονάδες)

Θέμα Δ

Δ1. Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $-1 < \alpha < \beta$, $f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \beta + 1$. Να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία μεγαλύτερη από 45° . (3 μονάδες)

Δ2. Δίνεται $f: (-1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(0) = 0$ και $f'(x) = \frac{x+2}{x+1}$ για κάθε $x > -1$.

i) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{-f(\xi)}{\xi-1}$ (3 μονάδες)

ii) Να βρείτε την f . (3 μονάδες)

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) + x$

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, το πρόσημο, την κυρτότητα και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (5 μονάδες)

Δ4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x + 21$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την (ε) και την ευθεία $x = e - 1$. (5 μονάδες)

Δ5. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να υπολογίσετε το $\int_0^e f^{-1}(x) dx$. (6 μονάδες)

Καλή επιτυχία !!!

Απαντήσεις

A5 1Λ , 2Λ , 3Σ , 4Λ , 5Σ

B1 $f'(x) = \frac{(x-4)(x-2)}{(x-3)^2}$

B2 $f''(x) = \frac{2}{(x-3)^3}$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f''(x)$	-		+
$f(x)$	↘		↗

B3 $x=3$ κατακόρυφη ασύμπτωτη
 $y=x-2$ πλάγια ασύμπτωτη
 στο $-\infty$ και στο $+\infty$

B5 $E = \ln 2$ τ.μ.

B1

x	$-\infty$	2	3	4	$+\infty$	
$f'(x)$	+	○	-	-	○	+
$f(x)$						

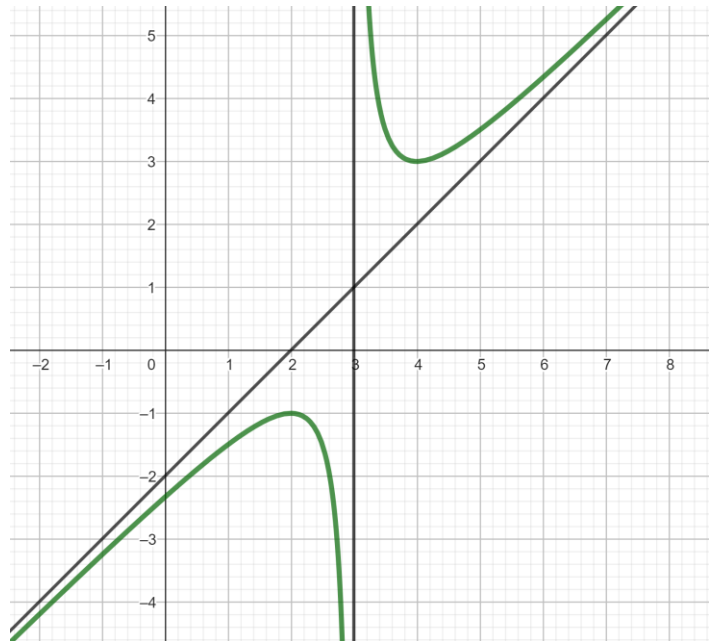
τ.μ.

$f(2) = -1$

τ.ε.

$f(4) = 3$

B4



Γ1 $g'(x) = 0$, $x \in (-1, +\infty) \Rightarrow g$ σταθερή , $g(0) = 1 \Rightarrow g(x) = 1$, $x \in (-1, +\infty)$

$\Rightarrow \frac{(x+1)f(x)}{e^x} = 1$, $x \in (-1, +\infty) \Rightarrow f(x) = \frac{e^x}{x+1}$, $x \in (-1, +\infty)$

Γ2 $f'(x) = \frac{xe^x}{(x+1)^2}$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	+
$f(x)$		↘	↗

ο.ε.

$f(0) = 1$

$f''(x) = \frac{e^x(x^2+1)}{(x+1)^3}$

x	-1	$+\infty$
$f''(x)$		+
$f(x)$		↗

Γ3 $\Delta_1 = (-1, 0]$ $f(\Delta_1) = [1, +\infty)$

$\Delta_2 = (0, +\infty)$ $f(\Delta_2) = (1, +\infty)$

Για $\mu \leq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη

Για $\mu > 0$ έχουμε :

$e^{f(x)} = \mu \Leftrightarrow f(x) = \ln \mu$

Αν $\ln \mu > 1 \Leftrightarrow \mu > e$ η εξίσωση έχει 2 ρίζες

Αν $\ln \mu = 1 \Leftrightarrow \mu = e$ η εξίσωση έχει 1 ρίζα

Αν $\ln \mu < 1 \Leftrightarrow \mu < e$ η εξίσωση είναι αδύνατη

$$\Gamma 4 \quad 3f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right) < 2f(\alpha) + f(\beta) \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \frac{f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right) - f(\alpha)}{\frac{2\alpha+\beta}{3} - \alpha} < \frac{f(\beta) - f\left(\frac{2\alpha+\beta}{3}\right)}{\beta - \frac{2\alpha+\beta}{3}} \quad \text{2 ΘΜΤ}$$

$$\Leftrightarrow f'(\xi_1) < f'(\xi_2) \quad \begin{matrix} f' \nearrow \\ (=) \end{matrix} \quad \xi_1 < \xi_2 \quad \text{που ισχύει αφού } \xi_1 < \frac{2\alpha+\beta}{3} < \xi_2$$

$$\Gamma 5 \quad f(x) \geq 1 \quad (\text{ισότητα για } x=0) \quad \text{και} \quad h(x) \leq 1 \quad (\text{ισότητα για } x=1)$$

Άρα $f(x) \neq h(x)$, $x \in (-1, +\infty) \Rightarrow$ οι C_f και C_h έχουν κοινά σημεία.

$$\Delta 1 \quad \text{Από ΘΜΤ} \quad f'(\xi) = 1 + \frac{1}{\beta - \alpha} > 1 \Rightarrow \lambda > 1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta > 1 \Rightarrow \dots$$

$$\Delta 2 \quad \text{i)} \quad \Theta \text{ Rolle για την } g(x) = f(x) \cdot (x-1)$$

$$\text{ii)} \quad f'(x) = (x + \ln(x+1))', \quad x \in (-1, +\infty) \Rightarrow \dots$$

$$\Delta 3 \quad f \nearrow (-1, +\infty), \text{ δεν παρουσιάζει ακρότατα, } f \text{ κοίλη, } f(D_f) = (-\infty, +\infty)$$

x	-1	0	$+\infty$
f(x)	-	0	+

$$\Delta 4 \quad f'(x) = 2 \Leftrightarrow x = 0$$

$$(\varepsilon): \quad y = 2x$$

$$E = \frac{e^2 - 2e - 1}{2} \quad \text{τ.μ.}$$

Δ5
(1^{ος} τρόπος)

$$E_1 = E_2 = \int_0^{e-1} (e - f(x)) dx$$

$$= \dots = \frac{e^2 - 3}{2}$$

(2^{ος} τρόπος)

$$u = f^{-1}(x)$$

$$f(u) = x$$

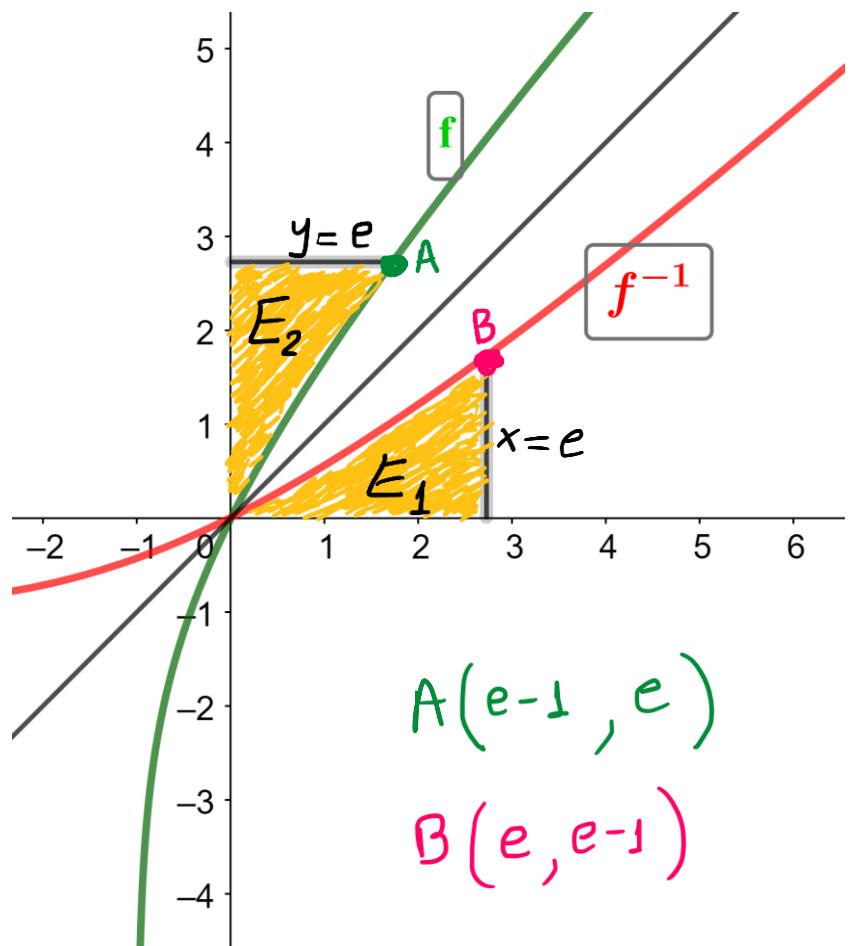
$$f'(u) du = dx$$

Για $x=0$ είναι $u=0$

Για $x=e$ είναι $u=e-1$

$$\int_0^{e-1} u f'(u) du =$$

$$\dots = \frac{e^2 - 3}{2}$$



Επανάληψη πριν το διαγώνισμα

1. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες ;
2. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ ;
3. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό μέγιστο ;
4. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται $1 - 1$;
5. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται συνεχής στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
6. Να διατυπώσετε το θεώρημα **Bolzano** και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
7. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το **θεώρημα ενδιάμεσων τιμών**.
8. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;
9. Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.
10. Να αποδείξετε ότι : Αν $f(x) = c$, με $c \in \mathbb{R}$, τότε $f'(x) = 0$
11. Να αποδείξετε ότι : Αν $f(x) = x$, τότε $f'(x) = 1$
12. Να αποδείξετε ότι : Αν $f(x) = \sqrt{x}$, τότε $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$
13. Να δείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
14. Να διατυπώσετε τι θεώρημα του **Rolle** και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
15. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία.
16. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν
 - η f είναι συνεχής στο Δ και
 - $f'(x) = 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ ,τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ .
17. Έστω δυο συναρτήσεις f, g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ . Αν
 - οι f, g είναι **συνεχείς** στο Δ και
 - $f'(x) = g'(x)$ για κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ ,τότε να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x \in \Delta$ να ισχύει: $f(x) = g(x) + c$
18. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι $\sigma \upsilon \nu \epsilon \chi \acute{\eta} \varsigma$ σε ένα διάστημα Δ .
Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ , τότε να δείξετε ότι η f είναι **γνησίως αύξουσα** σε όλο το Δ .

19. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ .
Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό,
να αποδείξετε ότι: $f'(x_0) = 0$
20. Ποια λέγονται κρίσιμα σημεία μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;
21. Ποιες είναι οι πιθανές θέσεις ακροτάτων μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;
22. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται κυρτή σε ένα διάστημα Δ ;
23. Πότε λέμε ότι η ευθεία $x = x_0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f ;
24. Πότε η ευθεία $y = \ell$ λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$;
25. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται **ασύμπτωτη** της C_f στο $+\infty$;
26. Τι ονομάζουμε αρχική μιας συνάρτησης f σε ένα διάστημα Δ ;
27. Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια **παράγουσα της f στο Δ** ,
να αποδείξετε ότι:
- Όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$, είναι παράγουσες της f στο Δ .
 - Κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c$, $c \in \mathbb{R}$.
28. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σ' ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$,
να αποδείξετε ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν με την ένδειξη **Σωστό (Σ)** ή **Λάθος (Λ)**.

1. Έστω f, g δύο **συνεχείς** συναρτήσεις στο $[\alpha, \beta]$.
Αν $f(x) \geq g(x)$, $x \in [\alpha, \beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$.
2. Έστω f μια **συνεχής** συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx > 0$.
3. Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ **κοντά στο x_0** και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$
4. Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ **κοντά στο x_0** , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$
5. Αν f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και **γνησίως αύξουσα** σε όλο το Δ τότε $f'(x) > 0$ σε κάθε **εσωτερικό** σημείο x του Δ
6. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
7. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σ' ένα σημείο x_0 , τότε δεν είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.
8. Αν μια συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε δεν είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Καλή επιτυχία !!!!

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\mu^2 - 4)x^3 + (\mu - 2)x + 1}{x + 1}$, $x \in (-1, +\infty)$.

Γ1. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε

το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (10 μ)

Γ2. Αν $\mu = 2$ τότε :

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

ii) Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) + e^{-x} - 2 = 0$ (5 μ)

iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ (5 μ)

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & , \quad x \in (-\infty, 2) \\ \frac{x^2 - 16}{x - 4} & , \quad x \in [2, 4) \\ \sqrt{x^2 + x + 1} & , \quad x \in [4, +\infty) \end{cases}$

B1. Να υπολογίσετε τα : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (6 μ)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια. (5 μ)

B3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 21x)$ (4 μ)

B4. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x)$ (5 μ)

B5. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\mu x^2 + x + 1)f(x)]$ (5 μ)

Θέμα 3

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & , x < -1 \\ \alpha x^2 + \beta & , x \in [-1, 2] \\ \frac{\eta\mu(x-2)}{\sqrt{x+2} - 2} & , x > 2 \end{cases}$

- Γ1.** Να υπολογίσετε τα α, β . (10 μ)
- Γ2.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (3 μ)
- Γ3.** Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (5 μ)
- Γ4.** Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 7)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. (7 μ)

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3$

- B1.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .
- B2.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- B3.** Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο, το οποίο έχει αρνητική τετμημένη.
- B4.** Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην $y = \frac{1}{11}x + 21$
- B5.** Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη.

Θέμα 5

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$xf'(x) = f(x)+x \quad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty) \quad \text{και } f(1)=0$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=x\ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. (5 μ)

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=21$. (5 μ)

Δ4. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f(x+3)+f(x+1)>2f(x+2)$ (5 μ)

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,21)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)(\xi-21)^4 + 4f(\xi)(\xi-21)^3 = 0 \quad (5 \mu)$$

Θέμα 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x}{x-1}$

B1. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

B2. Βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

B3. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x)=\alpha$

για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$. (5 μ)

B4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f

που είναι παράλληλες στην ευθεία $16y+x+21=0$ (5 μ)

B5. Αν $1<\alpha<\beta$ να δείξετε ότι $\alpha\beta f'(\alpha) - \beta < \alpha\beta f'(\beta) - \alpha$ (5 μ)

Θέμα 7

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(21) > 21$ και

$$f^2(x) - 2xf(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (7 μ)

Δ2. Να δείξετε ότι f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (5 μ)

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

Δ4. Να δείξετε ότι $f'(x) < f'(x+1) + e^x(e-1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μ)

Δ5. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{21} + 21 \cdot x}$ (3 μ)

Θέμα 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(1-x)\ln x}{x}$

B1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1-x-\ln x}{x^2}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. (3 μ)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (7 μ)

B3. Να δείξετε ότι η $h(x) = x^3 + x - 2$ είναι 1-1. (4 μ)

B4. Δίνεται συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$$\text{με } g^3(x) + g(x) = e^x - x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i) Να βρείτε το ακρότατο της g . (7 μ)

ii) Να εξετάσετε αν έχουν κοινό σημείο οι C_f και C_g . (4 μ)

Θέμα 9

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 2e^x + x^2 + \alpha x - 6$ για την οποία ισχύει

$$f(x) + 4 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Δείξτε ότι $\alpha = -2$. (5 μ)

Δ2. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (6 μ)

Δ3. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς 2 ρίζες. (6 μ)

Δ4. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+3) + 2f(x) > 3f(x+1)$. (5 μ)

Δ5. Να δείξετε ότι $f(x) + x^{2020} + 21 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (3 μ)

Θέμα 10

Δίνεται η $f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x^2}$ και η ευθεία $y = 9x - 12$ που είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$.

B1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -4$. (5 μ)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

B3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (5 μ)

B4. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. (5 μ)

B5. Αν $g(x) = (x^2 - 3x + 2)f(x)$ να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $g''(\xi) = 0$. (5 μ)

Θέμα 11

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και

$$(x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μ)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

Γ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

Γ4. Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|4f(\alpha)f(\beta)| \leq 1$. (5 μ)

Γ5. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (5 μ)

Θέμα 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + \alpha x + \beta$ και η ευθεία $y = x$ που είναι

ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$. (5 μ)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (4 μ)

Γ3. Δίνεται η $g(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$.

i) Μελετήστε την g ως προς τη μονοτονία. (4 μ)

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g . (4 μ)

iii) Να δείξετε ότι η g έχει ακριβώς μια ρίζα x_0
για την οποία ισχύει $0 < x_0^{21} < 1$. (4 μ)

iv) Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (4 μ)

Θέμα 13

Γ1. Αν η ευθεία $y = 2x + 2$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + \alpha x + \beta$ στο σημείο $A(0, f(0))$ να βρείτε τα α, β .

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα η οποία είναι αρνητική.

iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \eta \mu x - 2 \eta \mu x}{x^2}$

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$.

Θέμα 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση **Σ** (Σωστό), αν η πρόταση είναι αληθής ή **Λ** (Λάθος), αν η πρόταση είναι ψευδής.

- i) Αν η f είναι συνεχής στο x_0 τότε σίγουρα είναι και παραγωγίσιμη στο x_0 .
- ii) Αν η συνάρτηση $f + g$ είναι συνεχής στο x_0 τότε σίγουρα και η f είναι συνεχής στο x_0 .
- iii) Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε σίγουρα η f αντιστρέφεται.
- iv) Αν $f'(x_0) = 0$ τότε σίγουρα η f παρουσιάζει ακρότατο στο x_0 .
- v) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ τότε σίγουρα $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$. (10 μονάδες)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$

και ισχύει $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, δηλαδή $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (15 μονάδες)

Θέμα 2

Δίνεται συνάρτηση $f: [-3, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 - 3x$ για κάθε $x \in [-3, 2]$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (8 μονάδες)

β) Να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή της f . (7 μονάδες)

γ) Δίνεται η συνάρτηση
$$g(x) = \begin{cases} \beta \cdot x & , \quad x < -3 \\ f(x) & , \quad -3 \leq x \leq 2 \\ \alpha \cdot x + \beta & , \quad x > 2 \end{cases}$$

i) Να υπολογίσετε τα α και β ώστε η g να είναι συνεχής σ' όλο το $\mathbb{R}$. (5 μονάδες)

ii) Είναι η g παραγωγίσιμη στο 2; (5 μονάδες)

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 \cdot e^{1-x} + 1$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. (5 μονάδες)

β) Να δείξετε ότι $f^{-1}(x) = 1 - \ln\left(\frac{x-1}{3}\right)$, $x > 1$. (5 μονάδες)

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (4, 10)$ τέτοιο ώστε $f^{-1}(x_0) = 0$. (5 μονάδες)

δ) Να βρείτε την εφαπτομένη της c_f στο $A(1, f(1))$ και να αποδείξετε ότι

$e^{1-x} \geq -x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (10 μονάδες)

Θέμα 4

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) = f(x) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 0$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^x$, $x \in \mathbb{R}$. (7 μονάδες)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (8 μονάδες)

γ) Να δείξετε ότι η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη. (5 μονάδες)

δ) Έστω $g(x) = -\frac{1}{e} - (x - 2)^2$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και g δεν έχουν κανένα κοινό σημείο. (5 μονάδες)

Θέμα 5

Έστω $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $xf'(x) \ln x + f(x) = 2x^2$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και $f(e) = e^2$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

β) Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2e$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = -ex^2 + 2ex + e$.

Να δείξετε ότι οι C_f και C_g δεν έχουν κοινό σημείο.

Θέμα 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - 1}$

Η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(2,2)$ όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τα α και β .

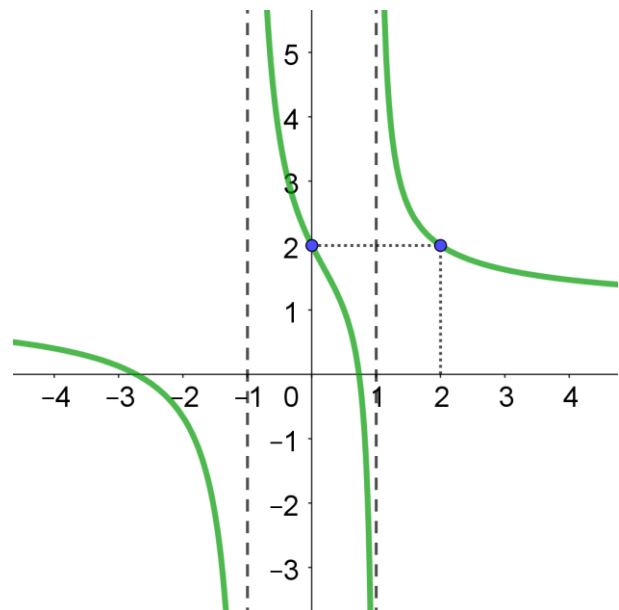
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

Επαληθεύστε τα αποτελέσματά σας με το διπλανό σχήμα



Θέματα εξετάσεων για επανάληψη

ΘΕΜΑ Β (2023)

Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση

$h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \ln x$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$.

Μονάδες 5

Έστω $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}$, $x > 0$.

B2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1 + x^2)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β (2022)

Δίνεται η συνάρτηση $f: (-\infty, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ και η συνάρτηση $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x}$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h = f \circ g$.

Μονάδες 6

B2. Αν $h(x) = (x-1)^2$, $x \in [0, 1]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι "1- 1" (μονάδες 3) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση h^{-1} της h (μονάδες 6).

Μονάδες 9

B3. Έστω $h^{-1}(x) = 1 - \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση:
$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x}, & x \in [0, 1) \\ \frac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$$

(i) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος ενδιάμεσων τιμών στο $[0, 1]$. (μονάδες 6)

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$, όπου $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. (μονάδες 4)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β (2021)

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(x+1) = (x+1) \cdot e^{-x}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 3

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

B3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα, τα σημεία καμπής και να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής της παράστασης, αν υπάρχουν.

Μονάδες 9

B4. Να βρείτε:

(i) το σύνολο τιμών της συνάρτησης f (μονάδες 4).

(ii) το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$. (μονάδες 3).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Β (2020)

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και } g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } g(x) = e^x.$$

B1. Να προσδιορίσετε την συνάρτηση $f \circ g$.

Μονάδες 5

B2. Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$, με $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι '1 - 1' και να βρείτε την αντίστροφή της.

Μονάδες 8

B3. Αν $\varphi(x) = (f \circ g)^{-1}(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, με $x > 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς την μονοτονία.

Μονάδες 6

B4. Αν φ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να βρεθούν τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Β (2019)

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = e^{-x} + \lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y=2$.

B1. Να αποδείξετε ότι $\lambda=2$.

Μονάδες 3

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) - x = 0$ έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα $(2,3)$

Μονάδες 7

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4).

Μονάδες 6

B4. Έστω $f^{-1}(x) = -\ln(x-2)$, $x > 2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β (2018)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- B1.** Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα. **Μονάδες 8**
- B2.** Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **Μονάδες 4**
- B3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . **Μονάδες 6**
- B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δεν σβήνει) **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Β (2017)

Δίνονται οι συναρτήσεις και $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$, $x \neq 1$.

- B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. **Μονάδες 5**
- B2.** Αν $h(x) = (f \circ g)(x) = \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$, $x \in (0,1)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. **Μονάδες 6**
- B3.** Αν $\varphi(x) = h^{-1}(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$, να μελετήσετε τη συνάρτηση φ ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. **Μονάδες 7**
- B4.** Να βρείτε τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ και να τη σχεδιάσετε. (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό) **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Β (2016)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

- B1.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f . **Μονάδες 6**
- B2.** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης. **Μονάδες 9**
- B3.** Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f . **Μονάδες 7**
- B4.** Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα B1,B2,B3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό) **Μονάδες 3**

ΘΕΜΑ Γ (2018)

Έχουμε ένα σύρμα μήκους 8m, το οποίο κόβουμε σε δύο τμήματα. Με το ένα από αυτά, μήκους x m, κατασκευάζουμε τετράγωνο και με το άλλο κύκλο.

Γ1. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων σε τετραγωνικά μέτρα, συναρτήσει του x , είναι

$$E(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 64x + 256}{16\pi}, \quad x \in (0, 8)$$

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ελαχιστοποιείται, όταν η πλευρά του τετραγώνου ισούται με την διάμετρο του κύκλου.

Μονάδες 10

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένας μόνο τρόπος με τον οποίο μπορεί να κοπεί το σύρμα μήκους 8m, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να ισούται με $5m^2$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Γ (2019)

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha, & x \geq 1 \\ e^{x-1} + \beta x, & x < 1 \end{cases}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=1$.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Μονάδες 4

Γ3. i. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική.

(Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) - x_0 f(x) = 0$ είναι αδύνατη στο $(x_0, +\infty)$.

(Μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Ένα σημείο $M(x, y)$ κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$, $x \geq 1$.

Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σημείο M διέρχεται από το σημείο $A(3, 10)$, ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου M είναι 2 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $\triangle MOK$ τη χρονική στιγμή t_0 , όπου $K(x, 0)$ και $O(0, 0)$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ (2021)

Δ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\ell n x = \frac{1}{x} \quad (1)$$

έχει μοναδική ρίζα, x_0 , η οποία ανήκει στο $(1, e)$.

Μονάδες 4

Στα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) και η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ έχει τύπο $f(x) = (\ell n x_0)(x+1) - \ell n x - 1$.

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 , το $f(x_0) = 0$.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$g(x) = x \cdot e^{-x}, x \in \mathbb{R} \quad \text{και} \quad h(x) = \left(\frac{x_0}{e} \right)^{x+1}, x \in \mathbb{R}$$

έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, στο οποίο έχουν και κοινή εφαπτομένη.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω η συνάρτηση $\varphi : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής, με $f(x) > \varphi(x)$, για κάθε $x > 0$. Θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(x, \varphi(x))$, με $x > 0$. Αν η απόσταση των σημείων A και B γίνεται ελάχιστη στο $x = x_0$, να δείξετε ότι το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της συνάρτησης φ .

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ (2022)

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = x - \ln(3x)$$

Δ1. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 , με $x_1 < 1 < x_2$.

(μονάδες 6)

ii) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι κυρτή.

(μονάδες 2)

Μονάδες 8

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1, x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ1.

Δ2. Αν E είναι το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και τον άξονα $x'x$, να αποδείξετε ότι:

$$E = \frac{1}{2} (x_2 - x_1)(x_1 + x_2 - 2)$$

Μονάδες 7

Δ3. Να αποδείξετε ότι: $f(2-x_1) < 0$.

Μονάδες 4

Δ4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση: $2f(x) + \ln 3 = 1 + f'(x_2)(x - x_2)$ έχει λύση.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ (2021)

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha x^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2}, \text{ με } \alpha < -3. \end{cases}$$

Γ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της (μονάδες 3) αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$ (μονάδες 3). **Μονάδες 6**

Γ2. (i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί καθεμιά από τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ (μονάδες 3).

(ii) Να βρεθεί το μοναδικό $\xi \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο ισχύει $f'(\xi) = 0$ (μονάδες 3). **Μονάδες 6**

Γ3. Να δείξετε ότι στη γραφική παράσταση της συνάρτησης f δεν υπάρχουν σημεία με αρνητική τετμημένη στα οποία η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$. **Μονάδες 6**

Γ4. Να δείξετε ότι $f(x) \geq -1$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$. **Μονάδες 7**

ΘΕΜΑ Γ (2023)

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + \alpha, & x \geq 1 \end{cases}$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 xf(x) dx = 1.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$. **Μονάδες 4**

Γ2. i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ϵ) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ϵ) και τη γωνία που σχηματίζει η (ϵ) με τον άξονα $x'x$ (μονάδες 4). **Μονάδες 8**

Γ3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» (“1-1”) (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3). **Μονάδες 6**

Γ4. Έστω (ϵ): $y = -x + 2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ϵ), τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = e$. **Μονάδες 7**

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[α, β]$ και
- $f(α) \neq f(β)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό $ζ$ μεταξύ των $f(α)$ και $f(β)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (α, β)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = ζ$.

Μονάδες 6

A2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ ;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

Μονάδες 5

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της f με τη g , δηλαδή η συνάρτηση $g \circ f$, ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

β) Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Ισχύει $(\sigma\phi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}$, $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$.

δ) Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό της μέγιστο.

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α, β]$. Αν $f(x) ≥ 0$ για κάθε $x ∈ [α, β]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx ≥ 0$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$$

και $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

B1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \frac{g}{h}$ και $r = g \cdot h$.

Μονάδες 6

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1 \quad \text{και} \quad r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1.$$

B2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι $f^{-1} = f$ (μονάδες 5), όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f .

Μονάδες 7

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης r .

Μονάδες 6

B4. Να λύσετε την εξίσωση $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} -2x+4+e^{\lambda}, & 0 \leq x < 2 \\ -x^2+4x-3+\lambda, & x \geq 2, \end{cases}$$

με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 0$.

Μονάδες 5

- Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

Μονάδες 6

- Γ3.** i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0,3]$.
(μονάδες 4)

ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, $\xi \in (0,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

- Γ4.** Κινητό σημείο M ξεκινά από το σημείο $A(2,0)$ και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $v=0,5$ μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία $\hat{\omega} = \hat{AOM}$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο M θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x) = \frac{\ln x + \alpha x}{x},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0, +\infty)) = \left(-\infty, 1 + \frac{1}{e}\right]$.

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1$.

Μονάδες 4

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, x_0 , η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Μονάδες 6

- Δ3.** i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

(μονάδες 3)

- ii) Να λύσετε την ανίσωση $2^x \leq x^2$ στο διάστημα $(0, +\infty)$.

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

- Δ4.** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $x = -\ln 2$ και $x = 0$, και περικλείεται από αυτές, τον άξονα $x'x$ και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 6 ΙΟΥΝΙΟΥ 2023

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

- A1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$$

Μονάδες 6

- A2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A . Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α,β]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

- A3. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Rolle (μονάδες 3) και να δώσετε τη γεωμετρική του ερμηνεία (μονάδες 2).

Μονάδες 5

- A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x}{x} = 1$.

- β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

- γ) Για κάθε συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα στο Δ , ισχύει ότι $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ .

- δ) Αν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια «ένα προς ένα» (“1-1”) συνάρτηση, τότε οι γραφικές παραστάσεις C και C' των συναρτήσεων f και f^{-1} είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$ που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$.

- ε) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι $f \circ g$ και $g \circ f$, τότε αυτές δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \frac{4 - e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \ln x$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f = g \circ h$.

Μονάδες 5

Έστω $f(x) = \frac{4 - x^2}{x}$, $x > 0$.

B2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{4 - \pi^2}{4 - e^2} > \frac{\pi}{e}$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

B4. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1 + x^2)}{f(x)}$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 3, & x < 1 \\ \frac{1}{x} + \alpha, & x \geq 1 \end{cases},$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία γνωρίζουμε επιπλέον ότι

$$\int_2^3 x f(x) dx = 1.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 0$.

Μονάδες 4

Γ2. i) Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ (μονάδες 4).

ii) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) και τη γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον άξονα $x'Ox$ (μονάδες 4).

Μονάδες 8

- Γ3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «ένα προς ένα» (“1-1”) (μονάδες 3) και στη συνέχεια να βρείτε το σύνολο τιμών της (μονάδες 3).

Μονάδες 6

- Γ4.** Έστω $(\varepsilon): y = -x + 2$ η εξίσωση της εφαπτομένης του ερωτήματος Γ2. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f με $x \geq 1$, την ευθεία (ε) , τον άξονα $x'Ox$ και την ευθεία $x = e$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: (0,2) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \ln(2-x) - \frac{1}{x} + \kappa, \text{ όπου } \kappa \in \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x - 1} = \ell \in \mathbb{R}.$$

- Δ1.** Να αποδείξετε ότι $\kappa = 3$.

Μονάδες 4

- Δ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες x_1, x_2 με $x_1 < 1 < x_2$ (μονάδες 4) και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{1}{3}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Στα παρακάτω ερωτήματα, x_1 και x_2 είναι οι ρίζες που αναφέρονται στο ερώτημα Δ2.

- Δ3.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο $M(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,1)$, στο οποίο η κλίση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f ισούται με

$$\frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}.$$

Μονάδες 6

Δ4. Αν επιπλέον F και G είναι δύο αρχικές συναρτήσεις της συνάρτησης f στο διάστημα $(0,2)$ με $F(x_1) = G(x_2) = 0$, να αποδείξετε ότι:

i) $F(x_2) + G(x_1) = 0$

(μονάδες 4)

ii) η εξίσωση

$$x_1 F(x) + x_2 G(x) = x_1 + x_2 - 2x$$

έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα (x_1, x_2) .

(μονάδες 5)

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους / τις εξεταζόμενες)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά αλλού στο τετράδιό σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, μόνο αν το ζητάει η εκφώνηση, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κ.λπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 10 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2022
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

A1. Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

A2. Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

A3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.) του Διαφορικού Λογισμού και να το ερμηνεύσετε γεωμετρικά.

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

β) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$, για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \geq 0$.

γ) Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ . Αν η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε $f'(x_0) = 0$.

δ) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 0$.

ε) Η συνάρτηση $f(x) = \ln|x|$, $x \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ και ισχύει:

$$(\ln|x|)' = \frac{1}{|x|}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*.$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x}{x-1} \text{ και}$$

$$g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ με τύπο } g(x) = \ln x.$$

- B1.** Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις κατακόρυφες και οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

- B2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = g(x)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα (e, e^2) .

Μονάδες 8

- B3.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $\varphi = g \circ f$.

Μονάδες 6

- B4.** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση με τύπο $h(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$. Αν

$$\varphi(x) = \ln x - \ln(x-1), \quad x \in (1, +\infty),$$

να εξετάσετε αν $\varphi = h$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta \mu x}{x} = 0.$

- $f'(x)f''(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Γ1.** i. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = 1$ (μονάδες 4).

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο με τετμημένη $x_0 = 0$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f'(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 8

Γ3. Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε, αν υπάρχουν, τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 4

Γ4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1» (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f^{-1} (μονάδες 5).

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} -x^3 + 3x + 1, & -1 \leq x \leq 0 \\ x^x, & 0 < x \leq \frac{2}{e}. \end{cases}$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής αλλά μη παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

Δ2. i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f (μονάδες 3).

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f (μονάδες 5).

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ υπάρχει $\xi \in \left[-1, \frac{2}{e}\right]$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = \frac{2f(\alpha) + 3f(\beta)}{5}$.

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} x f(x) dx > \left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{2}{e}} - \left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 17:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα.

γ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες.

δ) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$.

ε) Δείξτε ότι $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$ για κάθε $x \neq -1$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$.

Κάποιες απαντήσεις :

α) Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο -3 το $f(-3) = -6$ και

τοπικό ελάχιστο στο 1 το $f(1) = 2$

β) Κυρτή στο $(-1, +\infty)$

Κοίλη στο $(-\infty, -1)$

γ) $x = -1$ κατακόρυφη ασύμπτωτη

$y = x - 1$ πλάγια ασύμπτωτη

στο $-\infty$ και στο $+\infty$

δ) Για $\alpha > 2$ έχει 2 ρίζες

Για $\alpha = 2$ έχει μια ρίζα

Για $-6 < \alpha < 2$ δεν έχει ρίζα

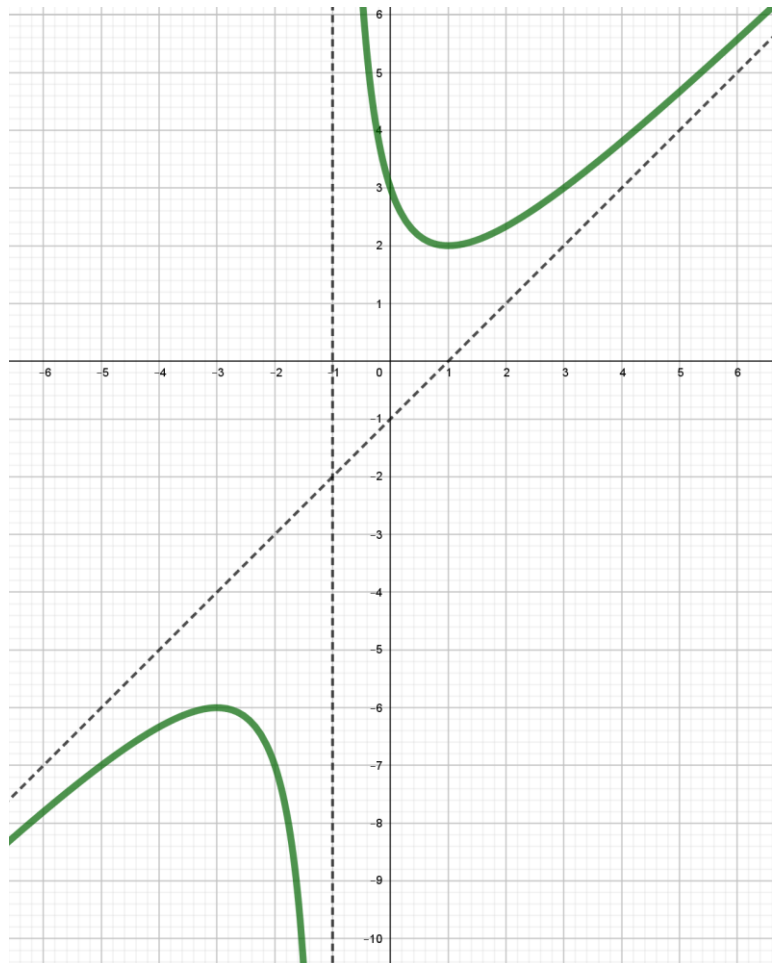
Για $\alpha = -6$ έχει μια ρίζα

Για $\alpha < -6$ έχει 2 ρίζες

$$\varepsilon) x - 1 + \frac{4}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{4}{x+1} =$$

$$= \frac{x^2 - 1 + 4}{x+1} = f(x)$$

$$E = 4 \ln 2 - \frac{1}{2} \text{ τ.μ.}$$



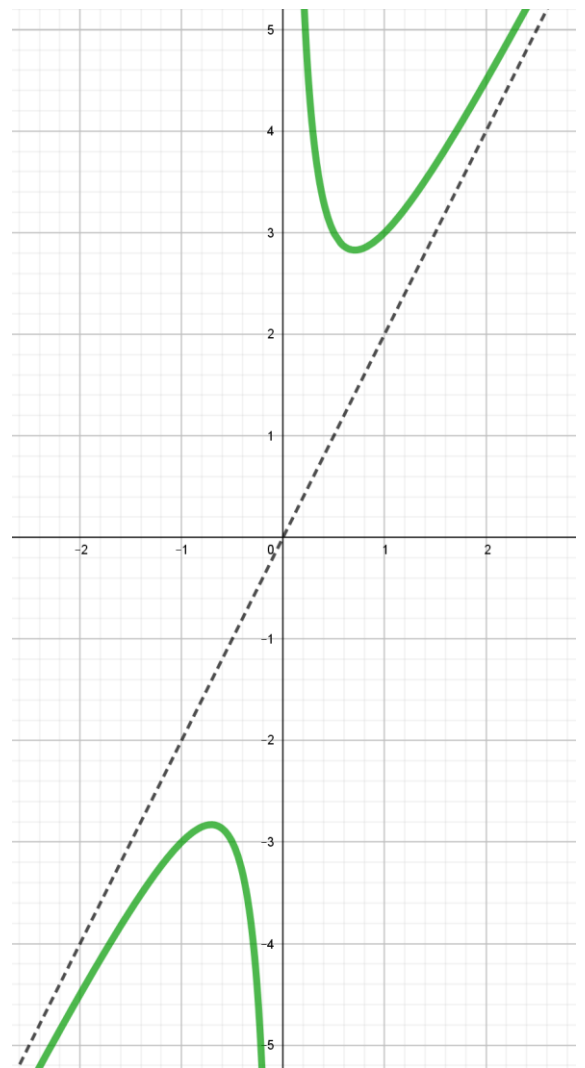
Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta \cdot x$ και η ευθεία $y = x + 2$ η οποία εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$.

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{1}{x} + 2x$.
- β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση ως προς την κυρτότητα.
- δ) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες.
- ε) Από όλα τα ορθογώνια που έχουν εμβαδόν $\frac{1}{2}$ να βρείτε αυτό που έχει την ελάχιστη περίμετρο καθώς και την τιμή της περιμέτρου του.

Κάποιες απαντήσεις :

- α) $f'(1) = 1 \Rightarrow -\alpha + \beta = 1$
 $f(1) = 3 \Rightarrow \alpha + \beta = 3$
Από το σύστημα $\alpha = 1$ και $\beta = 2$
Άρα $f(x) = \frac{1}{x} + 2x$.
- β) Παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $-\frac{\sqrt{2}}{2}$
το $f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -2\sqrt{2}$ και τοπικό ελάχιστο
στο $\frac{\sqrt{2}}{2}$ το $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}$.
- γ) Κυρτή στο $(0, +\infty)$
Κοίλη στο $(-\infty, 0)$
- δ) $x = 0$ κατακόρυφη ασύμπτωτη
 $y = 2x$ πλάγια ασύμπτωτη
στο $-\infty$ και στο $+\infty$
- ε) Έστω οι πλευρές x, y του ορθογωνίου.
Είναι $xy = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{2x}$, $x > 0$
Η περίμετρος είναι ίση με :
 $2x + 2y = 2x + 2 \cdot \frac{1}{2x} = 2x + \frac{1}{x}$, $x > 0$
Περίμετρος : $f(x) = \frac{1}{x} + 2x$ με $x > 0$
Από β) ελάχιστη περίμετρος όταν $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
(τότε και $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ δηλαδή είναι τετράγωνο)
Ελάχιστη περίμετρος $2\sqrt{2}$.



Καλή επιτυχία !!!

3^ο ΓΕΛ ΒΥΡΩΝΑ

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ ΠΡΙΝ ΤΙΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2022

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Θέμα Α

A1. Να αποδείξετε ότι : αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0 , τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 4

A2. Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 6

A3. Πότε μια συνάρτηση λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 3

A4. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο;

Μονάδες 2

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις γράφοντας **Σωστό** ή **Λάθος**.

α) Κάθε συνάρτηση με θετική παράγωγο σ' όλο το $\mathbb{R}$ έχει ρίζα.

β) Κάθε συνάρτηση με θετική παράγωγο σ' όλο το $\mathbb{R}$ έχει αντίστροφη.

γ) Για κάθε συνεχή συνάρτηση f στο $[\alpha, \beta]$ που έχει ρίζα στο (α, β)

ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.

δ) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ισχύει : $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Για κάθε παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\mathbb{R}$ η οποία έχει δυο ρίζες ,

υπάρχει εφαπτομένη της C_f η οποία είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

Μονάδες 10

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{-x^2-3}{2x-2}$

B1. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 7

B2. Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 4

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

Μονάδες 6

B4. Να σχεδιάσετε τη C_f .

Μονάδες 6

B5. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ;

Μονάδες 2

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$

Γ1. Έστω $f''(x) < 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. Να δείξετε ότι αν $1 < \alpha < \beta$

τότε $(\beta - \alpha) \cdot f'(\alpha) + f(\alpha) > f(\beta)$

Μονάδες 5

Γ2. Αν $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$, να δείξετε ότι η συνάρτηση

$h(x) = f(3 - x) - f(9 + x)$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

Μονάδες 6

Γ3. Έστω $f(x) = \ln x$, $x \in (1, +\infty)$ και

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x > 1 \\ e^{\alpha-1} + \alpha^{21} - 2 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

Αν g συνεχής, να υπολογίσετε το α .

Μονάδες 6

Γ4. Έστω $f(x) = \ln x$, $x \in (1, +\infty)$ και

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & , \quad x > 1 \\ 0 & , \quad x = 1 \end{cases}$$

- i) Να δείξετε ότι η C_g και η ευθεία (ε) : $y = \frac{1}{e-1} \cdot (x - 1)$ έχουν ακριβώς 2 κοινά σημεία.
- ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g και την ευθεία (ε) .

Μονάδες 8

Θέμα Δ

Δ1. Έστω συνάρτηση $f: (-\infty, 3) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) - f'(x) = e^x$, $x < 3$ και $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$. Να βρείτε την f .

Μονάδες 5

Δ2. Δίνεται η $f(x) = (3 - x) \cdot e^x$, $x < 3$.

Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα, την κυρτότητα και εξετάστε αν η C_f έχει ασύμπτωτες.

Μονάδες 8

Δ3. Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές $\alpha = 1 - \frac{x}{3}$ και $\beta = e^x$.

Αν $E(x)$ είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου :

- i) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού $E(x)$.
- ii) Να υπολογίσετε ως συνάρτηση του α το $\int_{\alpha}^{-1} E(x) dx$ για $\alpha < -1$.
- iii) Αν $\varphi(\alpha) = \int_{\alpha}^{-1} E(x) dx$ να υπολογίσετε το $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \varphi(\alpha)$.

Μονάδες 12

Καλή επιτυχία !!!

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

A1 , A2 , A3 , A4 θεωρία σχολικού βιβλίου

A5 $\Lambda, \Sigma, \Lambda, \Lambda, \Sigma$

Θέμα Β

B1 $f'(x) = \frac{-x^2+2x+3}{2(x-1)^2}$

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		-	0	+	+	0	-
$f(x)$							

B2 $f''(x) = \frac{-4}{(x-1)^3}$

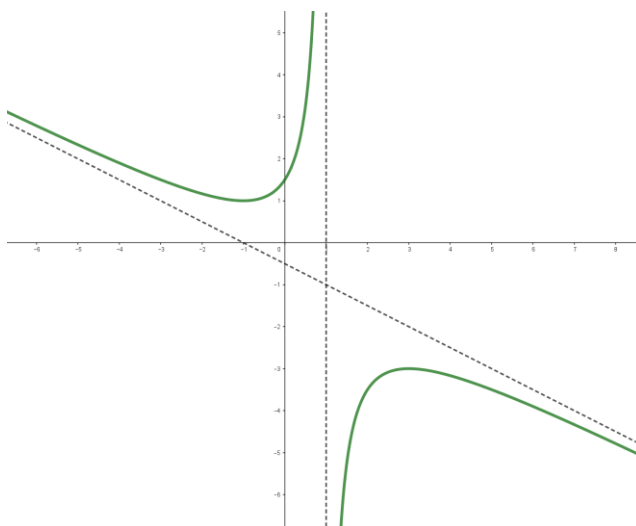
x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f''(x)$	+		-
$f(x)$	$\curvearrowright$		$\curvearrowleft$

B3 $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ Η ευθεία $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2}$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \frac{1}{2}x \right) = -\frac{1}{2}$ (όμοια και στο $-\infty$)

Η ευθεία $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ (όμοια και στο $-\infty$)

B4



B5 $f(D_f) = (-\infty, -3] \cup [1, +\infty)$

Θέμα Γ

Γ1 $f''(x) < 0 \quad f' \searrow (1, +\infty)$

Από ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$

Θέλουμε $(\beta - \alpha) \cdot f'(\alpha) + f(\alpha) > f(\beta) \Leftrightarrow (\beta - \alpha) \cdot f'(\alpha) > f(\beta) - f(\alpha) \quad (\beta - \alpha) > 0$
 $\Leftrightarrow f'(\alpha) > \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Leftrightarrow f'(\alpha) > f'(\xi) \quad \left(\begin{smallmatrix} f' \searrow \\ (=) \end{smallmatrix} \right) \quad \alpha < \xi \quad \text{που ισχύει αφού } \xi \in (\alpha, \beta)$

Γ2 Για το πεδίο ορισμού της h έχουμε $3 - x > 1$ και $9 + x > 1$ οπότε $D_h = (-8, 2)$

$f'(x) > 0 \Rightarrow f \nearrow (1, +\infty)$ Δείχνουμε ότι $h \searrow (-8, 2)$ και παρατηρούμε ότι $h(-3) = 0$

Άρα το -3 είναι ρίζα της h και επειδή είναι γνησίως φθίνουσα είναι η μοναδική ρίζα της.

Γ3 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0$ και $g(1) = e^{\alpha-1} + \alpha^{21} - 2$ Πρέπει $e^{\alpha-1} + \alpha^{21} - 2 = 0$

Ορίζουμε $k(x) = e^{x-1} + x^{21} - 2$, δείχνουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα (οπότε και 1-1) και έχουμε :

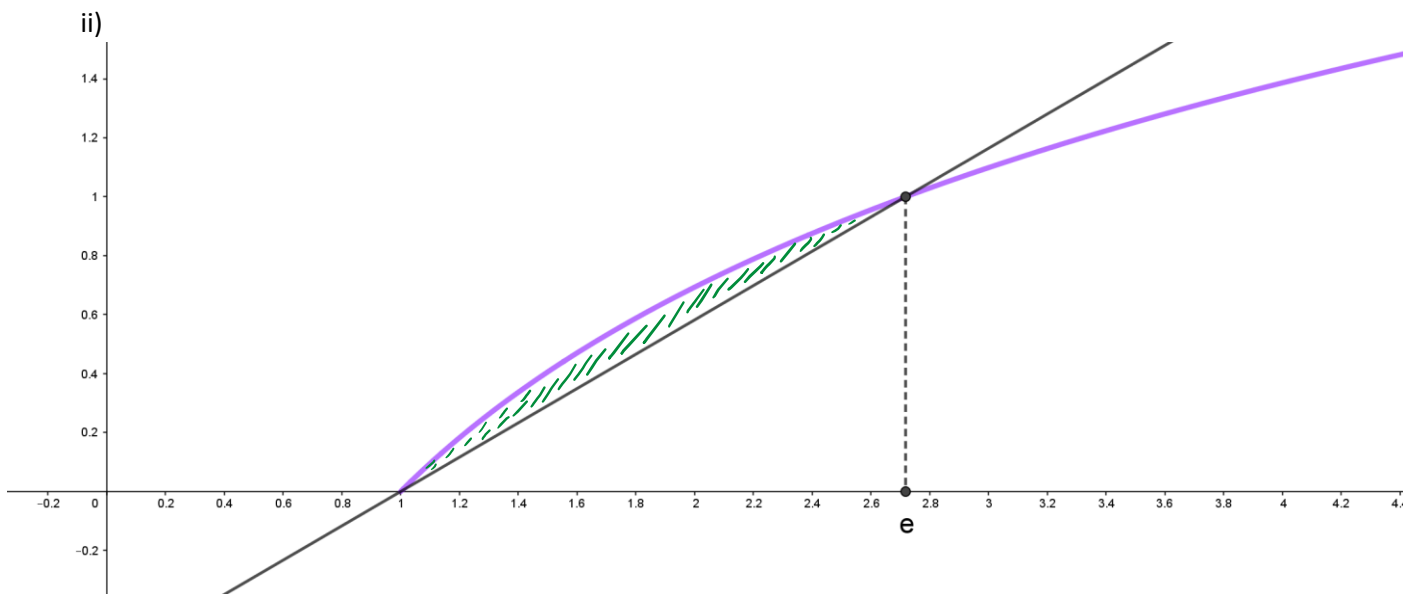
$e^{\alpha-1} + \alpha^{21} - 2 = 0 \Leftrightarrow K(\alpha) = K(1) \Leftrightarrow \alpha = 1$ αφού η k είναι 1-1.

Γ4 i) Ορίζουμε $M(x) = \ln x - \frac{1}{e-1} \cdot (x-1)$, $x \geq 1$

Δείχνουμε ότι $M \nearrow [1, e-1]$ και $M(1) = 0$, άρα ακριβώς μια ρίζα στο $[1, e-1]$

$M \searrow [e-1, +\infty)$ και $M(e) = 0$, άρα ακριβώς μια ρίζα στο $[e-1, +\infty)$

Άρα η M έχει ακριβώς δυο ρίζες, οπότε η C_g και η ευθεία (ε) έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία.



$$E = \int_1^e \left[\ln x - \frac{1}{e-1}(x-1) \right] dx = \dots = \frac{3-e}{2} \text{ τ.μ.}$$

Θέμα Δ

Δ1 $f(x) - f'(x) = e^x \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{e^x}\right)' = (-x)'$ οπότε $\frac{f(x)}{e^x} = -x + c$

Δείχνουμε ότι $c = 3$ και $f(x) = (3 - x) \cdot e^x$, $x < 3$

Δ2

x	$-\infty$	2	3	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$				

x	$-\infty$	1	3	
$f''(x)$		+	0	-
$f(x)$				

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ Η ευθεία $y = 0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$

Δ3 i) Πρέπει $1 - \frac{x}{3} > 0 \Leftrightarrow x < 3$

$$E(x) = \frac{1}{3}f(x), \quad x < 3$$

$$E'(x) = \frac{1}{3}f'(x), \quad x < 3$$

x	$-\infty$	2	3	
$E'(x)$		+	0	-
$E(x)$				

ii) $\int_{\alpha}^{-1} \frac{1}{3}(3 - x)e^x dx = \dots = \frac{5}{3e} - \frac{4 - \alpha}{3}e^{\alpha}$

iii) Είναι $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{4 - \alpha}{3e^{-\alpha}} \stackrel{\text{DLH}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{-1}{-3e^{-\alpha}} = 0$

Άρα $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \varphi(\alpha) = \frac{5}{3e}$

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 6 \cdot \ln x$ και η ευθεία (ε): $y = 4x - 3$.

α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας (ε). (20 μ)

β) Είναι η ευθεία (ε) εφαπτομένη της C_f ; (10 μ)

Θέμα 2

Λύστε την εξίσωση $x \ln x = 2x - e$ (20 μ)

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$, $x \in [-2, 2]$

Να δείξετε ότι η f έχει 4 θέσεις τοπικών ακροτάτων. (20 μ)

Θέμα 4

Έστω $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x f'(x) \ln x + f(x) = 2x^2$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και $f(e) = e^2$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. (10 μ)

β) Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2e$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. (10 μ)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = -ex^2 + 2ex + e$.

Να δείξετε ότι οι C_f και C_g δεν έχουν κοινό σημείο. (10 μ)

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \frac{6\sqrt{x}-18}{x-9} & , \quad x > 9 \\ \alpha x + \beta & , \quad 1 \leq x \leq 9 \\ \frac{2}{x} & , \quad 0 < x < 1 \end{cases}$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (5 μονάδες)

β) Να βρείτε τα α , β ώστε να υπάρχουν τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$ (20 μονάδες)

Θέμα 2

Δίνονται οι αριθμοί A, E, K, P :

$$A = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\eta\mu(x-\alpha)}{1 - \frac{x}{\alpha}} \quad E = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha(x-\alpha)(x+2\alpha)}{x^2 - \alpha x}$$

$$K = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\alpha x - 4\alpha}{8 - 2x} \quad P = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\alpha^2 \cdot \sqrt{x+1} - 2\alpha^2}{\alpha x - 3\alpha}$$

Αν ισχύει η ισότητα $A + E + K + A + P + A = 21$, να υπολογίσετε το α . (25 μονάδες)

Θέμα 3

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = 2x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. (10 μονάδες)

β) Να βρείτε το $f(2)$. (5 μονάδες)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(4 - f(x^2 + x)) - 2 = 0$. (10 μονάδες)

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία . (5 μονάδες)

β) Λύστε την ανίσωση $3 \cdot f(f(x^{21}) - f(4 - 3x)) < 1$ (10 μονάδες)

γ) Βρείτε την f^{-1} . (10 μονάδες)

Καλή επιτυχία !!!

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

- α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , την ευθεία (ε) και τον άξονα $y'y$.
- ε) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\alpha$ με $\alpha > 1$.
- στ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$.

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

$$f(1) = e, \quad f'(x) > 0 \text{ και } x f'(x) = (1 + 2x^2) f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο.
- β) Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = x e^{x^2}$.
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=0$ με $\alpha < 0$.
- δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} E(\alpha)$.
- ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, 5)$ τέτοιο ώστε: $f'(\xi) = e^{25}$.
- στ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

Θέμα 3

A) Να δείξετε ότι αν $K(x) > N(x)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$

$$\text{τότε } \int_{\alpha}^{\beta} K(x) dx > \int_{\alpha}^{\beta} N(x) dx \quad (K, N \text{ συνεχείς στο } [\alpha, \beta])$$

B) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 1003$ με $x \in (0, +\infty)$.

α) Δείξτε ότι για κάθε $t \in (x, x+2)$ ισχύει: $f(x) > f(t) > f(x+2)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_x^{x+2} f(t) dt \right)$.

Θέμα 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(0)=0$.

Για κάθε $x \neq 0$ ισχύει $f'(x) = \frac{f(x)}{x} + \frac{2x^2}{x^2+1}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0$.

- α) Να δείξετε ότι $f(x) = x \ln(x^2+1)$.
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = -\sqrt{e-1}$.

Θέμα 5

Δίνεται η $f(x) = 2 - 2e^x$.

- α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- β) Εξετάστε αν έχει ασύμπτωτες η γραφική παράσταση της f .
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.
- δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 \frac{x^2}{2}(2-f(x)) dx$

Θέμα 6

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$.

Για την f είναι γνωστό ότι : $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(1)=0$

και $\int_0^1 x^3 f'(x) dx = -12$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x)$.

- α) Να δείξετε ότι $f'(1) = 0$
- β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 0$.
- γ) Να δείξετε ότι : $\int_0^1 g(x) dx = 4$
- δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_1^{\sqrt{2}} x g(x^2-1) dx$
- ε) Δίνεται η συνάρτηση h με $h(x) = -g(x) - 1$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται : από την γραφική παράσταση της h , τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=0$, $x=1$.

Θέμα 7

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

- α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β) Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.
- δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=1$, $x=1$, $x=e$.
- ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=1$, $x=\alpha$ με $\alpha > 1$.
Να υπολογίσετε επίσης το όριο: $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$. Τι εκφράζει το όριο αυτό;
- στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\beta)$ του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$, και τις ευθείες $x=\beta$, $x=1$ με $0 < \beta < 1$.
Να υπολογίσετε επίσης το όριο: $\lim_{\beta \rightarrow 0^+} E(\beta)$. Τι εκφράζει το όριο αυτό;

Θέμα 8

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = f(x) + e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = -e^x + \frac{e}{e-2}$.
- β) Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- γ) Δείξτε ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι θετικός αριθμός.
- δ) Αν x_0 η λύση της παραπάνω εξίσωσης, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, x_0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = -\xi f'(\xi)$.
- ε) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

Θέμα 9

Δίνονται οι $f(x) = \frac{1+\ln x}{e^x}$ και $g(x) = \frac{\ln x}{e^x}$.

A) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

B) Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Γ) Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των f , g και τις ευθείες $x=1$, $x=2$.

Δ) Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ ισχύει $\int_{\alpha}^{\frac{1}{e}} f(x) dx < 0$.

Ε) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\pi, 2\pi)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) \sin \xi = -f'(\xi) \eta \mu \xi$.

Θέμα 10

Δίνεται f συνεχής στο $[0,1]$ με $0 < f(1) < \frac{2}{e^2}$.

Αν $\int_0^1 e^{2x} f(x) dx = 2$ και $\int_0^1 e^{2x} f'(x) dx = 0$, να δείξετε

ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Θέμα 11

Έστω $f(x) = \frac{4005+x}{x^2-4x+3}$, $g(x) = (x-3)f(x)$, $h(x) = \frac{g(x)}{[g(x)-2004]^2}$

Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

A) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

B) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$

Γ) $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$

Δ) $\lim_{x \rightarrow 3} \ln[h(x)]$

Ε) $\lim_{x \rightarrow 3} \ln\left[\frac{1}{h(x)}\right]$

Θέμα 12

Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα όρια :

A) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+1} - \mu x)$

B) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu^2 - \mu)x^4 - \mu x^3 + x + 2004}{(\mu - 1)x^3 + x + 1975}$

Θέμα 13

Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Έστω επιπλέον ότι για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $2004 + (7 - x^8)f(x) \leq 1975 + f(x)$.

A) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$.

B) Αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$ να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Γ) Αν $f(\alpha) = \frac{2004}{49}$ και $f(\beta) = \frac{2004}{29}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{2004}{39}$.

Θέμα 14

Έστω συναρτήσεις f και g με $f'''(x) = g''(x) + 6x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $f(1) - g(1) = 3$, $f'(0) - g'(0) = 1$ και οι αριθμοί $x_1 = -1$ και

$x_2 = 2004$ είναι ρίζες της g , να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα

τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 2004)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Θέμα 15

Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζει η παραβολή $x = y^2$ και η ευθεία $x = 1$.

Θέμα 16

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής σ' όλο το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\int_{1980}^{2010} f(x-5) dx = \int_{1975}^{2005} f(x) dx$

β) Να δείξετε ότι $\int_{1980}^{2010} (x-5)^{30} dx = \frac{2005^{31} - 1975^{31}}{31}$

Θέμα 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{x-1}$.

α) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [1, 5]$ ισχύει $f(x) \in [0, 10]$.

β) Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$, $x = 5$.

Θέμα 18 (1998)

Η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 3$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$.

Θέμα 19 (1997)

A) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι δύο διαφορετικές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ και ικανοποιούν τις σχέσεις $f''(x) - g''(x) = 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(1) = g'(1)$ και $f(2) = g(2)$.

i) Να βρείτε τη συνάρτηση $t(x) = f(x) - g(x)$.

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g .

B) Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για $\alpha < \beta$ να αποδειχθεί ότι :

i) $f(x) - f(\alpha) \leq f'(\beta)(x - \alpha)$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

ii) $2 \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \leq f'(\beta)(\beta - \alpha)^2 + 2f(\alpha)(\beta - \alpha)$

Θέμα 20 (1995)

A) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 2x^2 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$

i) Αν $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $\Gamma(x_3, f(x_3))$ είναι τοπικά ακρότατα της γραφικής παράστασης της f και $x_1 < x_2 < x_3$, να δείξετε ότι η ευθεία AB είναι κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$.

ii) Αν $0 < \alpha < 1$ να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία λύση στο διάστημα $(-1, 0)$.

B) Δίνεται η συνάρτηση f , δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g τέτοια ώστε

$g(x)f'(x) = 2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι, αν η γραφική

παράσταση της f έχει σημείο καμπής το $A(x_0, f(x_0))$, τότε η εφαπτομένη

της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $B(x_0, g(x_0))$

είναι παράλληλη στην ευθεία $y - 2x + 5 = 0$.

Θέμα 21 (1994)

Έστω συνάρτηση f με συνεχή f'' στο $\mathbb{R}$, η οποία παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0=2$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το $A(0,1)$.

Αν ισχύει $\int_0^2 [xf'''(x)+3f'(x)]dx = -\frac{8}{3}$, να υπολογίσετε το $f(2)$.

Θέμα 22 (1996)

A) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=2x-1$ και την ευθεία $x=0$.

B) Θεωρούμε την $f(x)=\sqrt{1+x^2}+\lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε την τιμή του λ αν είναι γνωστό ότι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

β) Για την τιμή του λ που βρήκατε, να υπολογίσετε το $\int_0^1 \frac{x}{f^2(x)} dx$.

Θέμα 23 (1996)

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει ότι :

$f(x)+f(\alpha+\beta-x)=c$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, όπου c σταθερός πραγματικός αριθμός. Να αποδείξετε ότι :

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = (\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) = \frac{\beta - \alpha}{2} (f(\alpha) + f(\beta))$$

Θέμα 24 (1992)

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=(x+4)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τα σημεία (x, y) με $-1 \leq x \leq 1$ και $0 \leq y \leq f(x)$.

Θέμα 25 (1991)

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\sqrt{x}-\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}$, $x > 0$.

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f .

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, το οποίο περικλείεται από την C_f τον $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=4$.

Θέμα 26 (1989)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ με πεδίο ορισμού το $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$.

- A) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_0 = \frac{\pi}{8}$.
- B) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την παραπάνω εφαπτομένη, την C_f και τους άξονες Ox και Oy .

Θέμα 27 (1990)

Να δείξετε ότι η συνάρτηση f με

$$f(x) = \frac{x^4}{3} + \frac{2\alpha x^3}{3} + \left(\alpha^2 - 2\alpha + \frac{5}{2}\right)x^2 + (\alpha^2 + 7)x - 5\alpha^2$$

δεν έχει σημεία καμπής για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

Θέμα 28 (1996)

- A) Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες συναρτήσεις f, g που έχουν πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ για τις οποίες ισχύει η σχέση $f'(x) = g'(x) + \eta\mu^2 x + e^x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$. Να αποδείξετε ότι $f(0) + g(x) < g(0) + f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
- B) α) Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{\alpha x}$ όπου $\alpha \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τιμές της παραμέτρου α έτσι ώστε να ικανοποιείται η σχέση $f''(x) + 2f'(x) = 3f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- β) Έστω $\lambda, \mu, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$ με $\beta_1 \neq \beta_2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \lambda e^{\beta_1 x} + \mu e^{\beta_2 x}$ με $x \in \mathbb{R}$. Έστω ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός x_0 τέτοιος ώστε $g(x_0) = g'(x_0) = 0$. Να αποδειχθεί ότι $\lambda = \mu = 0$.

Θέμα 29 (1996)

Να αποδείξετε τις ανισότητες :

- α) $\eta\mu x < 2x$, για κάθε $x > 0$ β) $\eta\mu x - x + \frac{x^3}{3} > 0$, για κάθε $x > 0$

Θέμα 30 (1996)

- A) Δίνονται οι f, g με $D_f = D_g = \mathbb{R}$. Αν οι f, g έχουν συνεχείς πρώτες παραγώγους και συνδέονται μεταξύ τους με τις σχέσεις $f' = g$, $g' = -f$ τότε να δείξετε ότι υπάρχουν οι συναρτήσεις f'' και g'' και είναι συνεχείς. Αποδείξτε ακόμα ότι ισχύουν οι σχέσεις $f'' + f = g'' + g = 0$ και ότι η συνάρτηση $h = f^2 + g^2$ είναι σταθερή.
- B) Θεωρούμε τις παραπάνω συναρτήσεις f και g . Να αποδείξετε ότι αν x_1 και x_2 είναι δύο ρίζες της f και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (x_1, x_2)$, τότε η g έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα (x_1, x_2) .

Θέμα 31 (1995)

Η αξία μιας μηχανής που εκτυπώνει βιβλία, μειώνεται με το χρόνο t , σύμφωνα με τη συνάρτηση $f(t) = \frac{7A}{2} e^{-\frac{t+28}{14}}$, $t \geq 0$ όπου A ένας θετικός αριθμός. Ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $K(t)$, από την πώληση των βιβλίων που εκτυπώνει η συγκεκριμένη μηχανή, δίνεται από τη συνάρτηση $K'(t) = \frac{A}{4} e^{-\frac{t}{7}}$, $t \geq 0$ και υποθέτουμε ότι $K(0) = 0$. Να βρεθεί η χρονική στιγμή κατά την οποία θα πρέπει να πουληθεί η μηχανή, έτσι ώστε το συνολικό κέρδος $P(t)$ από τα βιβλία που πουλήθηκαν συν την αξία της μηχανής, να γίνεται μέγιστο.

Θέμα 32 (1994)

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $0 < f(x) < 1$ και $f'(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [1, e]$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 \in (1, e)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) + x_0 \ln x_0 = x_0$.

Θέμα 33 (1992)

- α) Να μελετήσετε τη μονοτονία της $f(x) = \alpha^x - x$, $0 < \alpha < 1$
- β) Αν $0 < \alpha < 1$, να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση :
- $$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2)$$

Θέμα 34 (1993)

Μια βιομηχανία παράγει x ποσότητα απο ένα προϊόν με κόστος που δίνεται

από τη συνάρτηση $K(x) = \frac{\alpha}{4}x^3$ με $x \in (0, +\infty)$ και $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$. Τα έσοδα απο

την πώληση x ποσότητας του προϊόντος δίνονται απο τη συνάρτηση $E(x) = x^2$,

$x \in (0, +\infty)$ και το κέρδος δίνεται απο τη συνάρτηση $f(x) = E(x) - K(x)$,

$x \in (0, +\infty)$.

α) Να βρείτε την ποσότητα x_0 για την οποία έχουμε το μέγιστο κέρδος,

το οποίο συμβολίζουμε με $M(\alpha)$.

β) Να βρείτε την τιμή του $\alpha \in \left[\frac{2}{9}, \frac{9}{2}\right]$ για την οποία το $M(\alpha)$ γίνεται μέγιστο,

καθώς και το μέγιστο αυτό κέρδος.

Θέμα 35 (1993)

Δίνεται η ορθή γωνία xOy και το ευθύγραμμο τμήμα AB μήκους 10 m,

του οποίου τα άκρα A και B ολισθαίνουν πάνω στις πλευρές Oy και Ox

αντίστοιχα. Το σημείο B κινείται με σταθερή ταχύτητα $v = 2 \frac{m}{sec}$ και η θέση του

πάνω στον άξονα Ox δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = vt$, $t \in [0, 5]$ όπου t

ο χρόνος σε sec.

α) Να βρεθεί το εμβαδόν $E(t)$ του τριγώνου AOB ως συνάρτηση του χρόνου.

β) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού $E(t)$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το μήκος του τμήματος OA είναι 6 m.

Θέμα 36 (1995)

Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί κ, λ με $\kappa < \lambda$ και η συνάρτηση

$f(x) = (x - \kappa)^5 (x - \lambda)^3$ με $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι :

α) $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{5}{x - \kappa} + \frac{3}{x - \lambda}$ για κάθε $x \neq \kappa$ και $x \neq \lambda$.

β) Η συνάρτηση $g(x) = \ln|f(x)|$ στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω στο διάστημα (κ, λ) .

Θέμα 37

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f και οι αριθμοί α, β με $\alpha < \beta$. Δίνεται επιπλέον ότι $f(\alpha + \beta - x) = x + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

A) Να δείξετε ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(\alpha + \beta - x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

B) Να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι αντίθετοι.

Γ) Για κάθε $x > 0$ να δείξετε ότι υπάρχει ξ με $|\xi| < x$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -\frac{1}{2}$.

Δ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι η f είναι περιττή, να βρείτε τον τύπο της.

Θέμα 38

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση f με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$.

Δίνεται ότι : $\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{e^x + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

δ) Να βρείτε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

Θέμα 39

A) Για την συνάρτηση f ισχύουν $f(2) + 4 = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + f(x)}{(x-2)^4} = L \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 2.

B) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $|f(x) - f(\psi)| \leq |x - \psi| \quad \forall x, \psi \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Γ) Έστω f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$x f(x) + 3x = \sin(5x) + (x+2)^4 x \quad \forall x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.

Θέμα 40

Για την $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $f(x+y) = f(x) + f(y) + 5xy$ για κάθε

$x, y \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την $f'(3)$.

Θέμα 41

A) Αν $f(x) \leq x^2 + x, \forall x \in \mathbb{R}, f(1) = 2$ και f παραγωγίσιμη στο 1 δείξτε ότι $f'(1) = 3$.

B) Αν $e^{ax} \geq 1 + x, \forall x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι $a = 1$.

Γ) Αν $a \ln x \leq x - 1, \forall x \in \mathbb{R}_+^* (a \in \mathbb{R})$ να δείξετε ότι $a = 1$.

Θέμα 42

A) Αποδείξτε ότι $\frac{1}{x} + \ln x > 1$, για κάθε $x \in (1, +\infty)$

B) Αποδείξτε ότι $\ln x > x - \frac{x^3}{6}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Γ) Αποδείξτε ότι $e^x \geq x^2 + 1$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Δ) i) Αποδείξτε ότι $x^2 - 1 > 2x \ln x$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

ii) Αν $0 < a < b$ δείξτε ότι $\ln b - \ln a < \frac{b^2 - a^2}{2ab}$.

Θέμα 43

A) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xe^x = e^x - 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

B) Δείξτε ότι η εξίσωση $(2-x)e^x = x+2$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\mathbb{R}$.

Γ) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης $x^3 - 3x + a = 0, (a \in \mathbb{R})$.

Θέμα 44

A) Έστω f, g συναρτήσεις συνεχείς στο $[a, b]$ παραγωγίσιμες στο (a, b) με $f(a) = f(b) = 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)g(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$.

B) Αν g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $g(x) + xg'(x) \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, δείξτε ότι η g δεν έχει πραγματικές ρίζες.

Γ) Αν g συνεχής στο $[0, a], a > 0$ και παραγωγίσιμη στο $(0, a)$ με $g(a) = 0$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0, a)$ ώστε $g'(\xi) = -\frac{g(\xi)}{\xi}$.

Θέμα 45

A) Έστω f συνεχής στο $[α,β]$ παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ με $f(α)=e^α$, $f(β)=e^β$.
Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $ξ \in (α,β)$ ώστε $f'(ξ) = f(ξ)$.

B) Αν η f είναι συνεχής στο $[α,β]$ και παραγωγίσιμη στο $(α,β)$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $ξ \in (α,β)$ ώστε
$$\frac{f'(ξ)}{f(ξ)} = \frac{1}{α-ξ} + \frac{1}{β-ξ}.$$

Θέμα 46

Δείξτε ότι :

$$\alpha) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu\chi - \sigma\upsilon\nu\chi}{\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi} d\chi = 0 \qquad \beta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\eta\mu\chi}{\eta\mu\chi + \sigma\upsilon\nu\chi} d\chi = \frac{\pi}{4}$$
Θέμα 47

A) Αν f, g συνεχείς στο $[α,β]$ με $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)dx$, να δείξετε ότι υπάρχει $\chi_0 \in [α,β]$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = g(\chi_0)$.

B) Έστω f συνεχής στο $[α,β]$ με $f(α) > α$ και $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx < \frac{\beta^2 - \alpha^2}{2}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\chi_0 \in (α,β)$ τέτοιο ώστε $f(\chi_0) = \chi_0$.

Θέμα 48

α) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $xe^x \geq e^x - 1$

β) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = xe^x - 3e^x + x^2$

i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0, f(0))$.

ii) Δείξτε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει : $f(x) + 2x \geq -3$.

Θέμα 49

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$ Να βρείτε :

- α) Τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f .
- β) Το σύνολο τιμών της f .
- γ) Τις τετμημένες των σημείων της C_f , στα οποία οι εφαπτόμενες αυτής διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Θέμα 50

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = x^2 + (5-\alpha)x - (\alpha+8)$.

Για ποια τιμή του α το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της f είναι ελάχιστο ;

Θέμα 51

Για τις συναρτήσεις f, g ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η συνθήκη :

$$f^2(x) + 1 + g^2(x) = 2f(x) \cdot g(x) + 2f(x) - 2g(x)$$

Να βρεθεί η σχετική θέση των γραφικών παραστάσεών τους .

Θέμα 52

Να υπολογίσετε το εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις γραμμές με εξισώσεις $\chi + \psi - 2 = 0$ και $\psi^2 = \chi$.

Θέμα 53

Αν f συνεχής στο $[-1, 1]$ και $f(x) + f(-x) = 2016$ για κάθε $x \in [-1, 1]$,
να υπολογίσετε το $\int_{-1}^1 f(x) dx$.

Θέμα 54

Δίνεται f παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ η οποία δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη σε κανένα σημείο της γραφικής της παράστασης .

Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 .

Θέμα 55

Δίνεται ότι $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Δείξτε ότι :

- α) $f(0) = 0$ β) Αν f συνεχής στο 0 τότε f συνεχής σε κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.
- γ) f περιττή .

Θέμα 56

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = xe^{x^2+1}$.

- α) Δείξτε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει $f(x_0) = 1975$.
- β) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = -1$.
- γ) Δείξτε ότι $\int_{-1}^0 |f(x)| dx = \int_0^1 |f(x)| dx$.
- δ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.
- ε) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο σημείο $A(1, f(1))$ και τον άξονα $y'y$.

Θέμα 57

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{1+x}$ ορισμένη στο $[0, 2]$.

- α) Δείξτε ότι $0 \leq f(x) \leq \frac{4}{3}$ για κάθε $x \in [0, 2]$.
- β) Δείξτε ότι $0 \leq \int_0^2 f(x) dx \leq \frac{8}{3}$.

Θέμα 58

A) Να δείξετε ότι :

$$\frac{1}{[f(1975)]^{2004} - [f(0)]^{2004}} \int_0^{1975} 2004 [f(x)]^{2003} f'(x) dx = 1$$

B) Να δείξετε ότι : $\int_1^{1975} \left(e^{f(x)} f'(x) \ln x + e^{f(x)} \frac{1}{x} \right) dx = e^{f(1975)} \ln 1975$.

Θέμα 59

Να δείξετε ότι : $\int_1^e \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \right) dx = \int_{2003}^{2004} \frac{1}{e} dx$.

Θέμα 60

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$\alpha) \int_1^e 2004 x^{2003} \ln x \, dx$$

$$\beta) \int_0^1 e^x x^2 \, dx$$

$$\gamma) \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx$$

$$\delta) \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} \, dx$$

Θέμα 61

A) Αν $f(2004) - f(2003) = -1975$ και $2004 f'(2004) = 2003 f'(2003)$

να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_{2003}^{2004} x f''(x) \, dx$.

B) Αν για την f με συνεχή παράγωγο στο $[0,1]$ ισχύει $f(1) = \ln 2004$

να δείξετε ότι : $\int_0^1 \left(2004 x^{2003} e^{f(x)} + x^{2004} e^{f(x)} f'(x) \right) dx = 2004$.

Θέμα 62

Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

$$\alpha) \int_{\sqrt{2003}}^{\sqrt{2004}} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \, dx$$

$$\beta) \int_0^2 x^2 \sqrt{9 - x^3} \, dx$$

Θέμα 63

A. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx$

κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $x = \sin u$.

B. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} \, dx$

κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $x = \tan u$.

Θέμα 64

A. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\eta\mu x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sigma\upsilon\nu x) dx$

κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $x = \frac{\pi}{2} - u$.

B. Να αποδείξετε ότι $\int_0^{\pi} x f(\eta\mu x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} f(\eta\mu x) dx$

κάνοντας αλλαγή μεταβλητής $x = \pi - u$.

Θέμα 65

Αν $I_1 = \int_0^{2004} \frac{e^x}{e^x + e^{2004-x}} dx$ και $I_2 = \int_0^{2004} \frac{e^{2004-x}}{e^x + e^{2004-x}} dx$

να δείξετε ότι :

α) $I_1 = I_2$ β) $I_1 + I_2 = 2004$ γ) $I_1 = 1002$

Θέμα 66

A. Αν f συνεχής και άρτια στο $[-\alpha, \alpha]$, να δείξετε ότι :

α) $\int_{-\alpha}^0 f(x) dx = \int_0^{\alpha} f(x) dx$ β) $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 2 \int_0^{\alpha} f(x) dx$

B. Αν f συνεχής και περιττή στο $[-\alpha, \alpha]$, να δείξετε ότι :

α) $\int_{-\alpha}^0 f(x) dx = - \int_0^{\alpha} f(x) dx$ β) $\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$

Γ. Να υπολογίσετε τα παρακάτω ολοκληρώματα :

α) $\int_{-\sqrt{2003}}^{\sqrt{2003}} |x| \ln(x^2 + 1) dx$

β) $\int_{-\sqrt{2003}}^{\sqrt{2003}} x \ln(x^2 + 1) dx$

γ) $\int_{-2004}^{2004} \eta\mu x \cdot \eta\mu(x^2 + 1) dx$

δ) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |x| \eta\mu|x| dx$

Θέμα 67

A. Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$\begin{array}{ll} \alpha) \int_{-1}^1 \frac{x^3 + x^2 + x}{x} dx & \beta) \int_1^2 \frac{x^2 - 1}{x + 1} dx \\ \gamma) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) dx & \delta) \int_1^{81} \frac{1}{4\sqrt{x}} dx \\ \delta) \int_1^{\sqrt[3]{27}} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx & \epsilon) \int_1^e \frac{5+x}{x} dx \end{array}$$

B. Να υπολογίσετε την παράγωγο της $f(x) = x^2 e^x$ και κατόπιν να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x e^x (2+x) dx$.

Γ. Να υπολογίσετε την παράγωγο της $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ και κατόπιν να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e \frac{2002(1 - \ln x)}{x^2} dx$.

Θέμα 68

A. Να αποδείξετε ότι $\int_{1975}^{2005} e^{2002x} (x^3 - 3x^2 + 2x) dx \geq 0$

B. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\int_0^1 (4\alpha x^3 + 2x + \alpha) dx = 7$.

Γ. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^2 |x^2 - x - 2| dx$.

Θέμα 69

A. Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι ισχύει $\int_0^1 (2\alpha x^3 + \alpha^2 x^2 + 2x) dx = 1$.

B. Να αποδείξετε ότι ισχύει $\int_0^1 \frac{x-2}{2x^2-5x-3} dx \geq 0$.

Γ. Να βρείτε την συνάρτηση f , για την οποία ισχύει $f''(x) = 3$, $f'(1) = 6$, $f(0) = 4$.

Θέμα 70

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$\alpha) \int_0^1 (2e^x + 1) dx$$

$$\beta) \int_1^e \frac{x-e}{x} dx$$

$$\gamma) \int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$\delta) \int_{-1}^1 |x^3 + x^2 - 2x| dx$$

$$\epsilon) \int_0^1 |x^2 + x + 1| dx$$

$$\zeta) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sigma\upsilon\nu x - 3\eta\mu x) dx$$

$$\eta) \int_9^{16} \frac{3\sqrt{x}}{x} dx$$

$$\theta) \int_0^8 \sqrt[3]{x} dx$$

Θέμα 71

A. Έστω $f(x) = ax^3 + bx^2 + \gamma x$, για την οποία ισχύει :

$$f(13) - f(3) = 5 \quad , \quad f(23) - f(13) = 10 \quad , \quad f(33) - f(23) = 15 \quad .$$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_3^{33} (3ax^2 + 2bx + \gamma) dx$.

B. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 \ln x$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης f .

β) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^e 10x^2 (3 \ln x + 1) dx$.

Γ. Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax^2 + \beta x$.

Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι :

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{4}{3} \quad \text{και} \quad \int_1^2 f(x) dx = \frac{16}{3}$$

Θέμα 72

Να υπολογίσετε το $\alpha \in \mathbb{R}$, αν είναι γνωστό ότι ισχύει :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\alpha^2 \eta\mu x + \alpha \sigma\upsilon\nu x) dx = 3\alpha - 1 \quad .$$

Θέμα 73

Έστω $f(x) = \alpha \ln x + \beta x$, με $f(2004) - f(2002) = 1975$.

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα :

$$\alpha) \int_{2002}^{2004} \left(\frac{\alpha}{x} + \beta \right) dx \quad \beta) \int_{2002}^{2004} \frac{1}{1975} \left(\frac{\alpha}{x} + \beta \right) dx .$$

Θέμα 74

Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $\int_0^1 \frac{2x+1}{x+1} dx + \int_1^0 \frac{x^2+2x}{x+1} dx = \frac{1}{2}$

Θέμα 75

A. Έστω $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 1$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

B. Έστω $f(x) = x^2 \eta \mu x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x = -\frac{\pi}{2}$ και $x = 0$.

Γ. Έστω $f(x) = 2004 - x \ln x$, $x \in [1, e]$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

Θέμα 76

A. Έστω $f(x) = x^3 e^x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 0$.

B. Έστω $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ και $g(x) = 3x^2 + 3x$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και τις ευθείες $x = 1$ και $x = 2$.

Θέμα 77

A. Έστω $f(x) = 2004 - \ln x$ και $g(x) = 2004 + \ln x$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

B. Έστω $f(x) = -1002 \ln x$ και $g(x) = 1002 \ln x$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

Γ. Έστω $f(x) = -3 - \eta\mu x$ και $g(x) = \sigma\upsilon\nu x$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 2\pi$.

Θέμα 78

A. Δίνονται οι $f(x) = x^3 + 3x + 2004$ και $g(x) = 4x^2 + 2004$.

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των f και g .

B. Έστω $f(x) = \ln(x+10)$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x = -9$ και $x = e - 10$.

Γ. Έστω η $f(x) = x \ln x$.

- Να δείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $(0, +\infty)$.
- Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(1, f(1))$.
- Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο $(1, f(1))$ και την ευθεία $x = e$.

Θέμα 79

Θεωρούμε την συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1, 2]$ με συνεχή παράγωγο στο $[1, 2]$. Για την f ισχύουν:

α) $f(1) = f(2) - \frac{7}{3}$ και

β) $f'(1) > 4$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = x_0^2$.

ii) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = 4\xi$.

Θέμα 80

Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση σε κάθε σημείο της $M(x, f(x))$ έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $4x\sqrt{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισχύει $f(1) = 9$.

Θέμα 81

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x^3) = 3x^4 + 1$, να υπολογίσετε τις τιμές $f'(1)$ και $f'(0)$.

Θέμα 82

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0, 1)$ με $f(0) = \alpha$, $\alpha > 0$ και $f(1) = 0$.

i) Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ ώστε $f(x_0) = \alpha x_0$.

ii) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (0, 1)$ ώστε $f'(x_1) \cdot f'(x_2) = \alpha^2$.

Θέμα 83

Θεωρούμε τη συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και την $F(x) = f^2(x) + (f'(x))^2$, $x \in \mathbb{R}$. Αν $f''(x) + f(x) = 0$ αποδείξτε ότι η $F(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση. Ποιος είναι ο τύπος της $f(x)$, όταν $f(0) = f'(0) = 0$;

Θέμα 84

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) < x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(4) - f(2) < 6$.

Θέμα 85

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0) = 2$ και ισχύουν

$f(a+x) = f(a)f(x)e^{2ax}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x, a \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

i) $f(0) = 1$ και $f'(x) = 2f(x)(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^{x^2+2x}}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

iii) Να βρεθεί ο τύπος της f .

Θέμα 86

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν οι επόμενες προϋποθέσεις:

α) $f(x) \neq 0$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) $f(0) = 1$ και $g(0) = 1$.

γ) $f'(x) = \frac{1}{g(x)}$ και $g'(x) = -\frac{1}{f(x)}$.

Αποδείξτε ότι:

i) $f(x) \cdot g(x) = 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Υπολογίστε τους τύπους των f και g .

Θέμα 87

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$.

Η καμπύλη C_f δέχεται σε κάθε σημείο της (μη κατακόρυφη) εφαπτομένη.

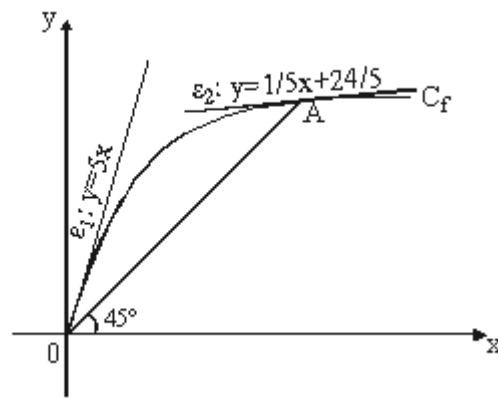
Οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 5x$ και $\varepsilon_2: y = \frac{1}{5}x + \frac{24}{5}$ είναι εφαπτόμενες της C_f στα

σημεία O και A αντίστοιχα.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A .

ii) Ποιος είναι ο ρυθμός αύξησης της $f(x)$ για $x_1 = 0$ και $x_2 = 6$;

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 6)$ ώστε ο ρυθμός αύξησης της $f(x)$ να είναι 1.



Θέμα 88

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = 4x^2 - 4ax + a^2 - 2a + 2$ με $x \in [0, 2]$. Για ποιες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι ίση με 3;

Θέμα 89

Θεωρούμε το σημείο $M(x, y)$ του οποίου οι συντεταγμένες καθορίζονται από τις συναρτήσεις $x = x(t)$, με $x(t) = \frac{3t}{1+t^3}$ και $y = y(t)$, με

$$y(t) = \frac{3t^2}{1+t^3}, \quad t \geq 0.$$

Να αποδείξετε ότι για όλες τις τιμές του $t \in [0, +\infty)$ το σημείο M βρίσκεται πάντα εντός τετραγώνου που ορίζεται από τις ημιευθείες Ox , Oy και τις ευθείες $x = \sqrt[3]{4}$ και $y = \sqrt[3]{4}$.

Θέμα 90

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{2x-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Για κάποιο $a \in \mathbb{R}$, θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = a$ (1).

i) Έχει η εξίσωση (1) λύση όταν $a = -\frac{1}{8}$;

ii) Έχει η εξίσωση (1) λύση όταν $a > 0$; Αν ναι, πόσες ρίζες έχει;

Θέμα 91

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1, e]$ με $f(1) = 2$, $f(e) = e + 1$ και σύνολο τιμών το $[-1, 4]$. Να αποδείξετε ότι:

A. α) Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τιμές $x_1, x_2 \in (1, e)$ με $x_1 \neq x_2$ ώστε

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0.$$

β) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi) = 0$.

γ) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) \cdot [f'(x_0) - 4f^4(x_0)] = x_0.$$

B. α) Η ευθεία $y = -x + e + 2$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $c_0 \in (1, e)$.

β) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1, e)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιοι ώστε να ισχύει $f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 1$.

Θέμα 92

Θεωρούμε τη συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε $f''(x) + \kappa^2 f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $\kappa \neq 0$ πραγματικό αριθμό. Αν $f(0) = f'(0) = 0$ αποδείξτε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 93

- A. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[α, β]$ και ισχύουν $f'(α) > 0$, $f'(β) < 0$.
- α) Δικαιολογήστε γιατί υπάρχει $ξ ∈ (α, β)$ στο οποίο η f παίρνει μέγιστη τιμή.
- β) Αποδείξτε ότι $f'(ξ) = 0$.
- B. Υποθέστε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[α, β]$ και ισχύει $f'(α) \cdot f'(β) < 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $ξ ∈ (α, β)$ τέτοιο ώστε $f'(ξ) = 0$.
- Γ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, αποδείξτε τα επόμενα:
- α) $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \Delta$ ή $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \Delta$.
- β) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ άξονα το πολύ σ' ένα σημείο.

Θέμα 94

- Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = \ln x - \frac{\alpha}{x} + \alpha$ με $x > 0$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x > 0$
- i) Αποδείξτε ότι $\alpha = -1$.
- ii) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.
- iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 0$.
- iv) Να λυθεί η ανίσωση $\ln(2\lambda^2 + 2) - \frac{1}{\lambda^2 + 3} > \ln(\lambda^2 + 3) - \frac{1}{2\lambda^2 + 2}$.

Θέμα 95

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[α, β]$, παραγωγίσιμη στο $(α, β)$ με $f(α) = f(β) = 0$ και f' γνησίως φθίνουσα στο $(α, β)$.
- A) Αποδείξτε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (α, β)$.
- B) i) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα μόνο $x_0 \in (α, β)$ ώστε η f να παρουσιάζει μέγιστο στο x_0 .
- ii) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1, x_2 \in (α, β)$ ώστε $f'(x_1) - f'(x_2) \geq \frac{4f(x_0)}{\beta - \alpha}$.
- Γ) Αν επιπλέον υπάρχει η f'' στο $(α, β)$ αποδείξτε ότι υπάρχει $ξ \in (x_1, x_2)$ ώστε
- i) $f''(ξ) < 0$
- ii) $f(x) \leq -f''(ξ) \left(\frac{\beta - \alpha}{2} \right)^2$.

Θέμα 96

Δίνεται συνάρτηση $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f''(x_0) \leq 0$.

Θέμα 97

Εστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 2x}{x - 3} = 1 \text{ και } f(5) = 6.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(3) = 6$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(3, f(3))$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = x + 2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (3, 5)$.

δ) Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (3, 5)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Θέμα 98

i) Αν το πολυώνυμο $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, $a > 0$ έχει τρεις ρίζες $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P'(x) = 0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες x_1, x_2 ($x_1 \neq x_2$). Αν υποθέσουμε ότι $x_1 < x_2$ να βρείτε το είδος των ακρότατων που παρουσιάζει το πολυώνυμο σ' αυτά τα σημεία.

ii) Αποδείξτε ότι $\beta^2 > 3\alpha\gamma$.

iii) Να αποδείξετε ότι $P''(x_1) + P''(x_2) = 0$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του (i) ερωτήματος.

iv) Είναι δυνατόν το πολυώνυμο $P(x)$ να παρουσιάζει σημείο καμπής σε κάποια από τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $P'(x) = 0$;

Θέμα 99

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, ώστε $f'''(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f έχει το πολύ ένα σημείο καμπής.

β) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ευθεία που να εφάπτεται σε δύο διαφορετικά σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ της γραφικής παράστασης της f .

Θέμα 100

Εστω f, g συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f''(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g''(x)$, $f'(0)g(0) = f(0)g'(0)$ και $g(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x) = \lambda g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 101

Θεωρούμε f, g συναρτήσεις τέτοιες ώστε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύει $f(x) + f(3-2x) = 2g(x)$.

α) Αποδείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα τουλάχιστον κοινό σημείο.

β) Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) + 2f(1-x) = x^2 - x$ να βρεθούν οι τύποι των f, g και το κοινό σημείο των C_f, C_g .

Θέμα 102

B. Αν η εξίσωση $f(x) = x$ έχει 3 ρίζες τότε :	A. Δίνεται η συνάρτηση $y = f(x)$ με $x \in \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(f(x)) = x^3$. Να αποδείξετε ότι: α) Η f αντιστρέφεται. β) Ισχύει $(f(x))^3 = f(x^3)$. B. α) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = x$ στο $\mathbb{R}$. β) Να αποδείξετε ότι $[f(-1)]^3 + [f(1)]^3 = f(0)$. γ) Αν $f(8) = 64$ να υπολογιστεί η τιμή $f(2)$.
--	---

Θέμα 103

Θεωρούμε την γνησίως μονότονη συνάρτηση f με $x \in (0, +\infty)$ για την οποία

$$\text{ισχύει } f(x) = \frac{e^x}{2004^{f(x)}}.$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) $f(2005^{2003}) < f(2004^{2004})$.

Θέμα 104

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2 - \eta \mu x}{x^2 + x} = 3$ να υπολογίσετε τα :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2}{x}$ και

ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|5 - 3f(x)| - 1}{x^2 - x}$.

Θέμα 105

Θεωρούμε συνάρτηση f τέτοια ώστε $(f(x))^3 + x^2 f(x) = 2x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \ell \in \mathbb{R}$ να βρείτε το ℓ .

Θέμα 106

Αν $x^2 f(x) \leq x^2 - \eta\mu^2 x \leq f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

Θέμα 107

Αν $\eta\mu(\alpha x) \leq \eta\mu(\beta x) + \eta\mu(\gamma x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι $\alpha = \beta + \gamma$.

Θέμα 108

Αν για την συνάρτηση f ισχύει $f(x) - x \leq x^2 \leq f(x-1) + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$:

α) Να βρεθεί ο τύπος της f .

β) Να υπολογιστεί το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\eta\mu x}$.

Θέμα 109

Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $f^2(x) + 4f(x) + 4\sin^2 x \leq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Θέμα 110

A) Θεωρούμε τη συνάρτηση f που ορίζεται στο $[a, \beta]$, είναι παραγωγίσιμη και γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $[\gamma, \delta]$. Αν η f' είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ να αποδείξετε ότι: $\int_a^\beta f(x) dx + \int_\gamma^\delta f^{-1}(x) dx = \beta\delta - \alpha\gamma$.

B) Αν η f είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση και ισχύει $f^5(x) + 5f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε:

i) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να βρείτε την f^{-1} και να υπολογίσετε το $\int_a^\beta f(x) dx$ όταν

$$f(a) = -1 \text{ και } f(\beta) = 1.$$

Θέμα 111

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $g: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Θεωρούμε και την συνάρτηση $f: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $\kappa f(x) + \lambda f(\alpha - x) = g(x)$ για κάθε $x \in [0, \alpha]$, με $\kappa, \lambda > 0$ και $\kappa \neq \lambda$.

A. Να αποδείξετε ότι:

α) Η f είναι συνεχής στο $[0, \alpha]$.

β) $(\kappa + \lambda) \int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^\alpha g(x) dx$.

B. Να αποδείξετε ότι $\int_0^1 \frac{1}{1 + e^{\sqrt{1-x} - \sqrt{x}}} dx = \frac{1}{2}$.

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x$

- α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.
- γ) Εξετάστε αν έχει ασύμπτωτες η C_f .
- δ) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^x - x - \alpha = 0$.
- ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x$

- α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.
- γ) Εξετάστε αν έχει ασύμπτωτες η C_f .
- δ) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $\ln x = \frac{\alpha}{x}$.
- ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x = \frac{1}{e}$ και $x = \frac{2}{e}$.

Θέμα 3

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x}{x}$ και $g(x) = \frac{x}{e^x}$.

- α) Μελετήστε τις f και g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- β) Μελετήστε τις f και g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.
- γ) Βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f και g .
- δ) Δείξτε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο, το οποίο έχει τετμημένη στο διάστημα $(-1, 0)$.
- ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που ορίζεται από την C_g , τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = \alpha$ με $\alpha > 1$.
Στη συνέχεια να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$.

Θέμα 4

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(2) = 0$ και

$$f'(x) = 1 - f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 1 - e^{2-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να βρείτε την αντίστροφη της f .

δ) Αν $g(x) = \sqrt{x}$ να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f$.

ε) Να δείξετε ότι $f(x+1) > \frac{f(x+2) + f(x)}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 5

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \alpha \cdot \ln x + \beta \cdot x + \gamma$ για την οποία ισχύει $f(x) - f(1) \leq 0$

για κάθε $x > 0$. Αν η ευθεία $y = \frac{1-e}{e} \cdot x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $A(e, f(e))$ τότε :

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x - x$ για κάθε $x > 0$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να δείξετε ότι $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{1-e}{e}$ για κάθε $x > 0$.

$$\text{Στη συνέχεια να δείξετε ότι } \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx \leq -\frac{(e-1)^2}{e}.$$

δ) Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η C_f .

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f ,

τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 1$ και $x = e$.

Θέμα 6

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) \cdot (f(x) + 2x) = 1$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν $f(0) = 1$ τότε :

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = \sqrt{2022}$.

ε) Να λύσετε την εξίσωση $e^{f(x)} - e = 1 - f(x)$.

Καλή επιτυχία !!!

Λύση θέματος 1

α) $f(x) = e^x - x$ $f'(x) = e^x - 1$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		$- \quad 0 \quad +$	
$f(x)$		$\nwarrow \quad \nearrow$	

ο.ε.
 $f(0) = 1$

β) $f''(x) = e^x > 0 \Rightarrow f \cup \mathbb{R}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \cdot e^x - 1 \right) = -1$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-1) \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

Άρα η ευθεία $y = -x$ είναι οριζόντιο άσυμπτωτό της f ως $x \rightarrow -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} - 1 = +\infty$ $\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \stackrel{\text{ο.ε.}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty \right)$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \cdot \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) \right] = +\infty$ $\left(\begin{array}{l} \text{Από } \delta_{\text{f}} \\ \text{εχρ } \text{ ως } \\ +\infty \end{array} \right)$

δ) Εξίσωση $f(x) = \alpha$

- Για $\alpha > 1$ δύο ρίζες
- Για $\alpha = 1$ μία ρίζα
- Για $\alpha < 1$ δεν έχει ρίζα.

ε) $f(x) > 0$ για $x \in [0, 1]$ Άρα $E = \int_0^1 f(x) dx =$
 $= \int_0^1 (e^x - x) dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = e - \frac{1}{2} - 1 + 0 =$

$= e - \frac{3}{2} = \frac{2e - 3}{2}$ τ.μ.

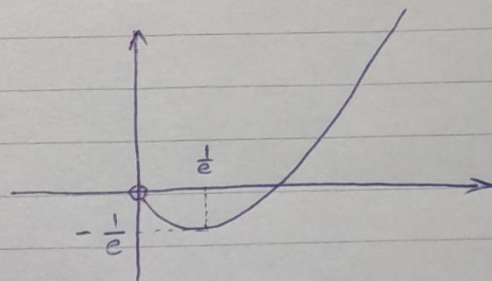
$$\alpha) f(x) = x \cdot \ln x, \quad x > 0 \quad f'(x) = \ln x + 1$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$$

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$		$\nwarrow$ $\nearrow$	

o.e.

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \ln \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$$



$$\beta) f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \quad f \cup (0, +\infty)$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{DLH}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -x = 0 \quad (\Delta \text{EN EXEI KAT.})$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad (\Delta \text{EN EXEI AS. STO } +\infty)$$

$$\delta) \text{ ΕΞΙΣΤΩΣΗ } f(x) = \alpha$$

- Για $\alpha \in (-\frac{1}{e}, 0)$ 2 p'k
- Για $\alpha = -\frac{1}{e}$ 1 p'k
- Για $\alpha \geq 0$ 1 p'k
- Για $\alpha < -\frac{1}{e}$ ΔΕΝ ΕΧΕΙ p'k

$$\epsilon) \text{ Για } x \in \left[\frac{1}{e}, \frac{2}{e}\right] \text{ είναι } f(x) < 0$$

$$\text{Αρα } E = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} -f(x) dx = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} -x \ln x dx = \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} \left(-\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx =$$

$$= \left[-\frac{x^2}{2} \ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} - \int_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} -\frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \left[-\frac{x^2}{2} \ln x\right]_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}} + \left[\frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{e}}^{\frac{2}{e}}$$

$$= -\frac{4}{2e^2} \ln \frac{2}{e} + \frac{1}{2e^2} \ln \frac{1}{e} + \frac{1}{e^2} - \frac{1}{4e^2} =$$

$$= -\frac{2}{e^2} (\ln 2 - 1) + \frac{1}{2e^2} (-1) + \frac{3}{4e^2} = \frac{-8 \ln 2 + 8 - 2 + 3}{4e^2} =$$

$$= \frac{9 - 8 \ln 2}{4e^2} \text{ τ.μ.}$$

$$\alpha) f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

T.E.
 $f(1)=e$

$$g'(x) = \frac{1-x}{e^x}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$

T.V.
 $g(1) = \frac{1}{e}$

$$\beta) f''(x) = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	-	-	+
$f(x)$	$\cap$	$\cap$	$\cup$

$$g''(x) = \frac{x-2}{e^x}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$g''(x)$	-	0	+
$g(x)$	$\cap$	$\cup$	$\cup$

Σκ.
 $(2, \frac{2}{e^2})$

$$\gamma) \Delta_1 = (-\infty, 0) \quad f(\Delta_1) = (-\infty, 0)$$

$$\Delta_2 = (0, 1] \quad f(\Delta_2) = [e, +\infty)$$

$$\Delta_3 = (1, +\infty) \quad f(\Delta_3) = (e, +\infty)$$

$$f(D_f) = (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$$

$$g(D_g) = (-\infty, \frac{1}{e}]$$

$$\delta) f(x) = g(x) \Leftrightarrow \frac{e^x}{x} = \frac{x}{e^x} \Leftrightarrow (e^x)^2 = x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{matrix} e^x = x \\ \text{αδυνατό} \end{matrix} \right) \vee e^x = -x \Leftrightarrow e^x + x = 0 \quad \text{Ορίζω } h(x) = e^x + x$$

$$h \text{ h } S_{\text{GR}} \text{ h } \text{GR} \text{ p } i] \alpha \text{ GR } [0, +\infty)$$

$$h(-1) = e^{-1} - 1 = \frac{1}{e} - 1 < 0$$

$$h'(x) = e^x + 1 > 0 \Rightarrow h \nearrow$$

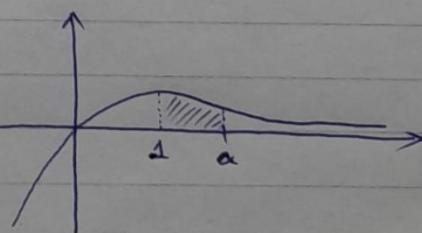
$$h(0) = 1 > 0$$

Από Θ. Bolzano υπάρχει $x_0 \in (-1, 0)$ τ.ω. $h(x_0) = 0$

και είναι μοναδικό αφού $h \nearrow$.

$$\epsilon) \text{ Για } x \in [1, \alpha] \text{ είναι } g(x) > 0$$

$$E(\alpha) = \int_1^\alpha g(x) dx = \int_1^\alpha x e^{-x} dx = \int_1^\alpha x (-e^{-x})' dx =$$



$$= [-x e^{-x}]_1^\alpha - \int_1^\alpha -e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_1^\alpha - [e^{-x}]_1^\alpha =$$

$$= -\alpha e^{-\alpha} + e^{-1} - e^{-\alpha} + e^{-1} = \frac{-\alpha-1}{e^\alpha} + \frac{2}{e}$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{-\alpha-1}{e^\alpha} \stackrel{\text{DCH}}{=} \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{-1}{e^\alpha} = 0$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left(\frac{-\alpha-1}{e^\alpha} + \frac{2}{e} \right) = \frac{2}{e}$$

$$α) f'(x) + f(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x)e^x + f(x)e^x = e^x \Leftrightarrow (f(x)e^x)' = (e^x)'$$

$$\text{Άρα } f(x)e^x = e^x + C \quad \text{Για } x=2 \quad 0 = e^2 + C \Rightarrow C = -e^2$$

$$\text{Άρα } f(x)e^x = e^x - e^2 \Rightarrow f(x) = 1 - \frac{e^2}{e^x} \Rightarrow f(x) = 1 - e^{2-x}$$

$$β) f'(x) = e^{2-x} > 0 \Rightarrow f \uparrow \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1} \Rightarrow f \text{ αντιστρέφεται.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{Άρα } f(D_f) = (-\infty, 1)$$

$$γ) y = 1 - e^{2-x} \Rightarrow e^{2-x} = 1 - y \Rightarrow 2 - x = \ln(1 - y) \Rightarrow \\ \Rightarrow x = 2 - \ln(1 - y) \quad f^{-1}(x) = 2 - \ln(1 - x), \quad x \in (-\infty, 1)$$

$$δ) x \in D_f \text{ και } f(x) \in D_g \Rightarrow 1 - e^{2-x} \geq 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow e^{2-x} \leq 1 \Rightarrow 2 - x \leq 0 \Rightarrow x \geq 2 \quad \text{Άρα } D_{g \circ f} = [2, +\infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{1 - e^{2-x}}, \quad x \in [2, +\infty)$$

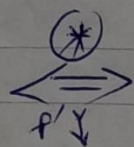
$$ε) \text{Θέλουμε } 2f(x+1) > f(x+2) + f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x+1) - f(x) > f(x+2) - f(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x+1) - f(x)}{x+1 - x} > \frac{f(x+2) - f(x+1)}{(x+2) - (x+1)} \quad \Longleftrightarrow$$

ΘΜ7

$$\Leftrightarrow f'(ξ_1) > f'(ξ_2)$$



$$ξ_1 < ξ_2 \quad \text{που ισχύει γιατί } x < ξ_1 < x+1 < ξ_2 < x+2$$

$$(*) \quad f''(x) = -e^{2-x} < 0 \Rightarrow f' \downarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \alpha \cdot \ln x + \beta x + \gamma \quad f'(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta$$

$$f(x) \leq f(1) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \Rightarrow \text{H } f \text{ παρ. ακρότατο στο } 1 \xrightarrow{\text{Fermat}} f'(1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\alpha + \beta = 0} \quad f'(e) = \frac{1-e}{e} \Rightarrow \frac{\alpha}{e} + \beta = \frac{1-e}{e} \Rightarrow \frac{\alpha}{e} - \alpha = \frac{1-e}{e} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha - \alpha e = 1 - e \Rightarrow \alpha(1-e) = 1-e \Rightarrow \boxed{\alpha = 1} \text{ και } \boxed{\beta = -1}$$

$$f(e) = \frac{1-e}{e} \cdot e \Rightarrow \alpha + \beta e + \gamma = 1-e \Rightarrow \boxed{\gamma = 0} \text{ Άρα } f(x) = \ln x - x$$

$$b) f(x) = \ln x - x \quad f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

x	0	1	+
f'(x)		+	-
f(x)		↗	↘

Ο.Μ.

$$c) f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad f \cap \downarrow (0, +\infty)$$

$$f(x) \leq \frac{1-e}{e} x \Leftrightarrow \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1-e}{e} \text{ για κάθε } x > 0 \quad f(1) = -1$$

$$\text{Άρα } \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx \leq \int_1^e \frac{1-e}{e} dx \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx \leq \left[\frac{1-e}{e} x \right]_1^e \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx \leq \frac{1-e}{e} (e-1) \Rightarrow \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx \leq -\frac{(e-1)^2}{e}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\ln x - x) = -\infty \Rightarrow \text{H } x=0 \text{ παρ. άκρότατο στο } (f.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ Άρα έφη άκρότατο στο } +\infty$$

$$e) f(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in [1, e] \Rightarrow E = \int_1^e -f(x) dx =$$

$$= \int_1^e (-\ln x + x) dx = \int_1^e (-x)' \ln x dx + \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^e =$$

$$= \left[-x \ln x \right]_1^e + \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} =$$

$$= -e + \left[x \right]_1^e + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = -e + e - 1 + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{e^2 - 3}{2} \text{ Τ.μ.}$$

$$\alpha) (f(x))^2 + 2xf(x) = 1 \Leftrightarrow (f(x))^2 + 2xf(x) + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = x^2 + 1$$

$$f(x) + x > 0$$

$$\Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$\Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

Η $g(x) = f(x) + x$ είναι συνεχής και $\neq 0$
Αρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

$$g(0) = 1 > 0 \Rightarrow g(x) > 0 \text{ για } x \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow f(x) + x > 0 \text{ για } x \in \mathbb{R}$$

$$\beta) f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

$$f'(x) < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \Rightarrow f \downarrow \mathbb{R} \Rightarrow f^{-1} \Rightarrow f \text{ αντιστρέφεται.}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} + x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \cdot \left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}} + 1\right)} = 0$$

$$f \downarrow \text{ και συνεχής στο } (-\infty, +\infty) \text{ Αρα } f(\mathbb{R}) = (0, +\infty)$$

$$\delta) f^{-1}(x) = \sqrt{2022} \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{2022}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{2023} - \sqrt{2022}$$

$$\epsilon) e^{f(x)} - e = 1 - f(x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)} + f(x) = e + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h(f(x)) = h(1) \Leftrightarrow$$

$$\stackrel{h^{-1}}{\Leftrightarrow} f(x) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(0) \stackrel{f^{-1}}{\Leftrightarrow} x = 0$$

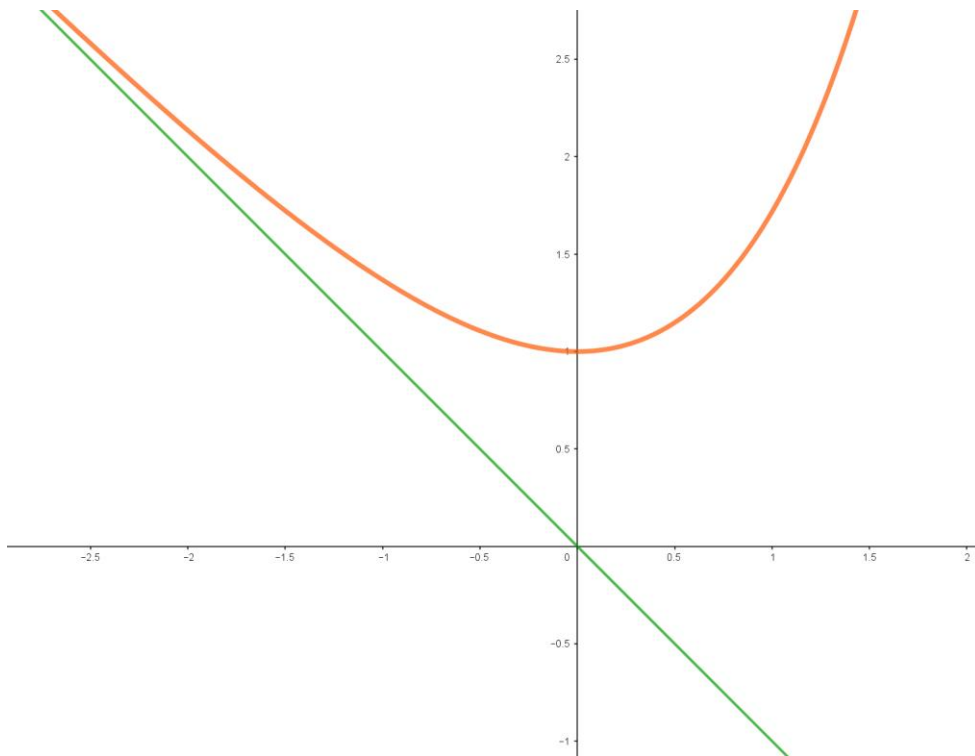
$$h(x) = e^x + x$$

$$h'(x) = e^x + 1 > 0$$

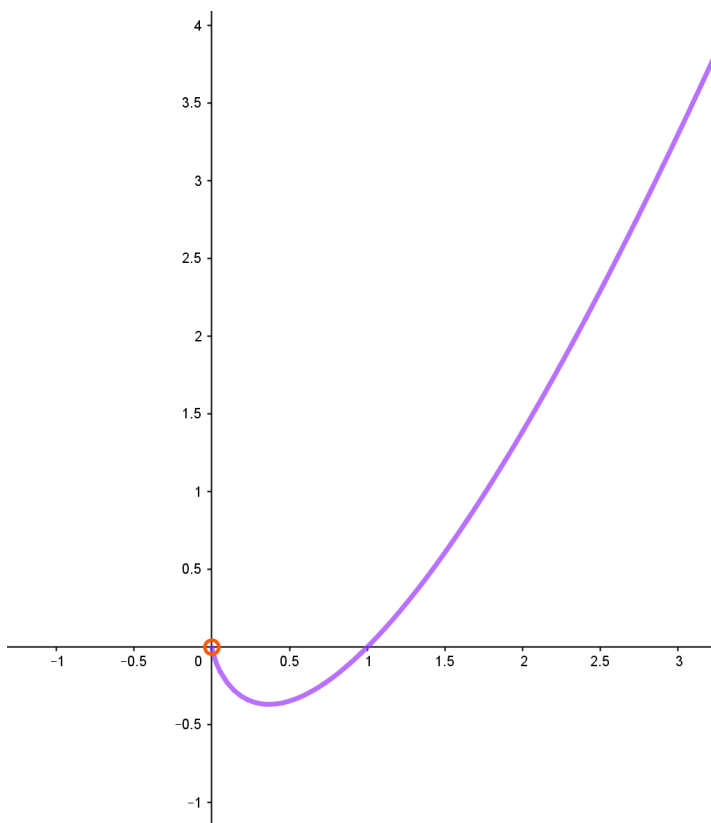
$$h \uparrow \mathbb{R} \quad h^{-1}$$

Γραφικές παραστάσεις συναρτήσεων των θεμάτων επανάληψης

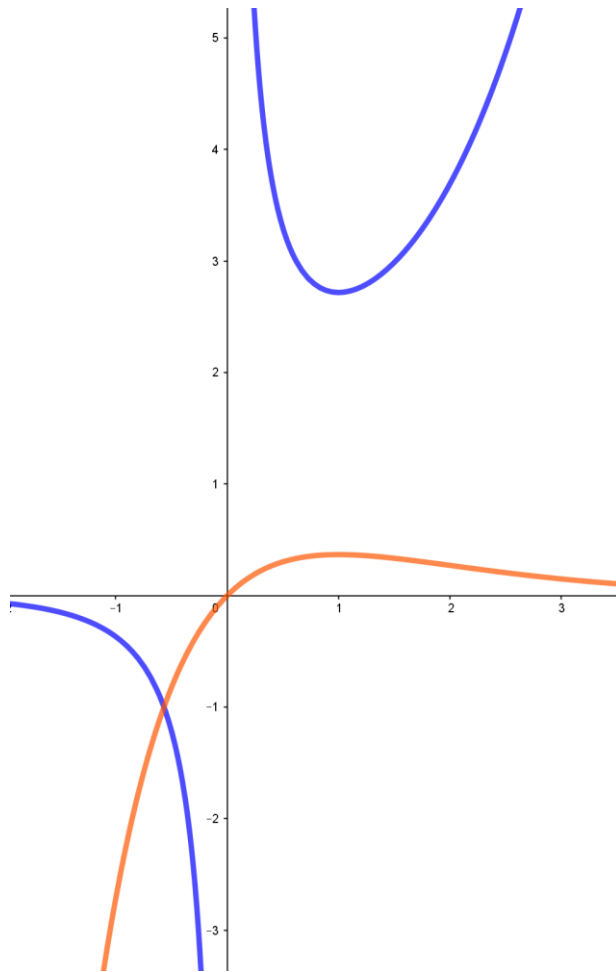
1) Συνάρτηση $f(x) = e^x - x$ και η ασύμπτωτη $y = -x$



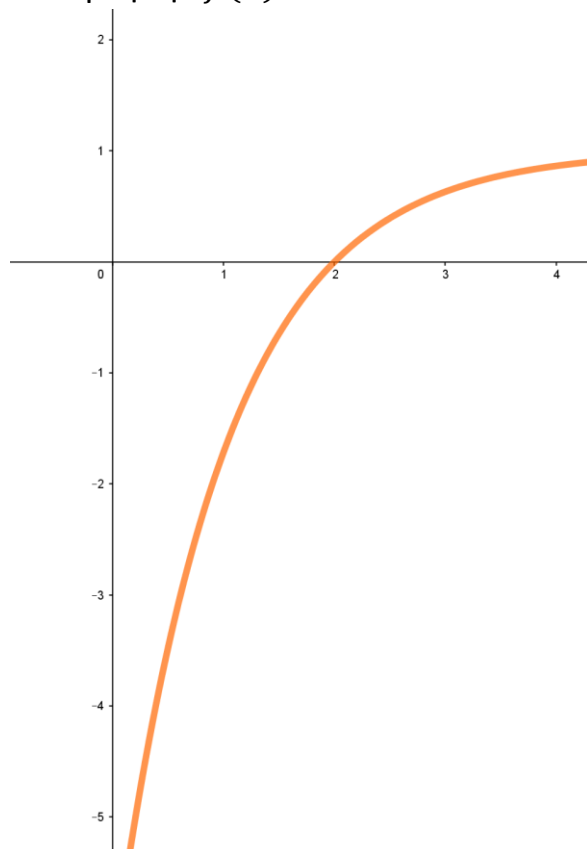
2) Συνάρτηση $f(x) = x \cdot \ln x$ (Η αρχή των αξόνων δεν είναι σημείο της !)



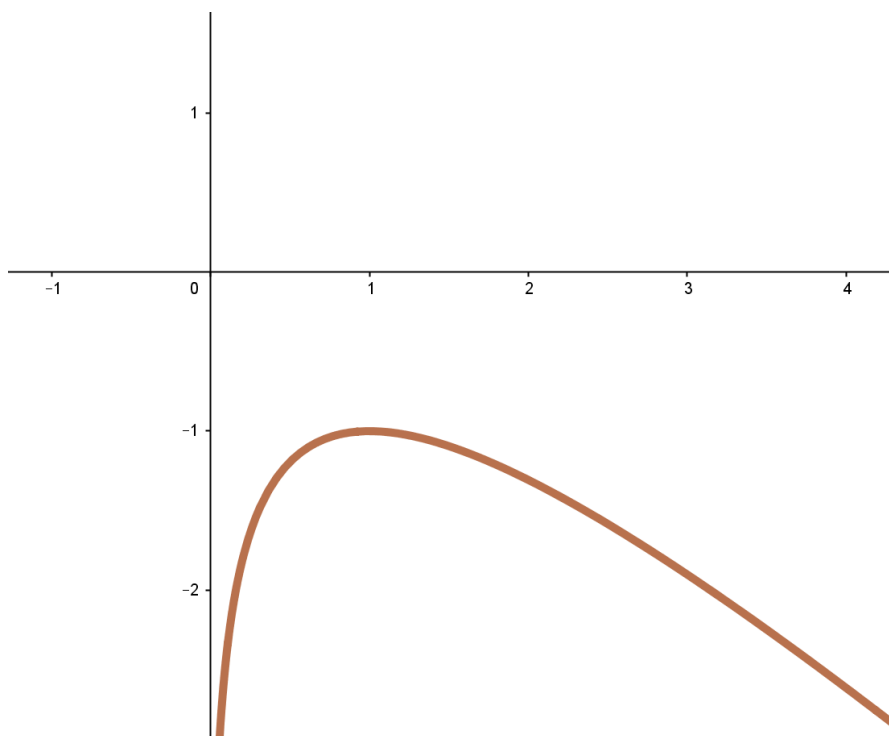
3) Συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x}{x}$ και $g(x) = \frac{x}{e^x}$



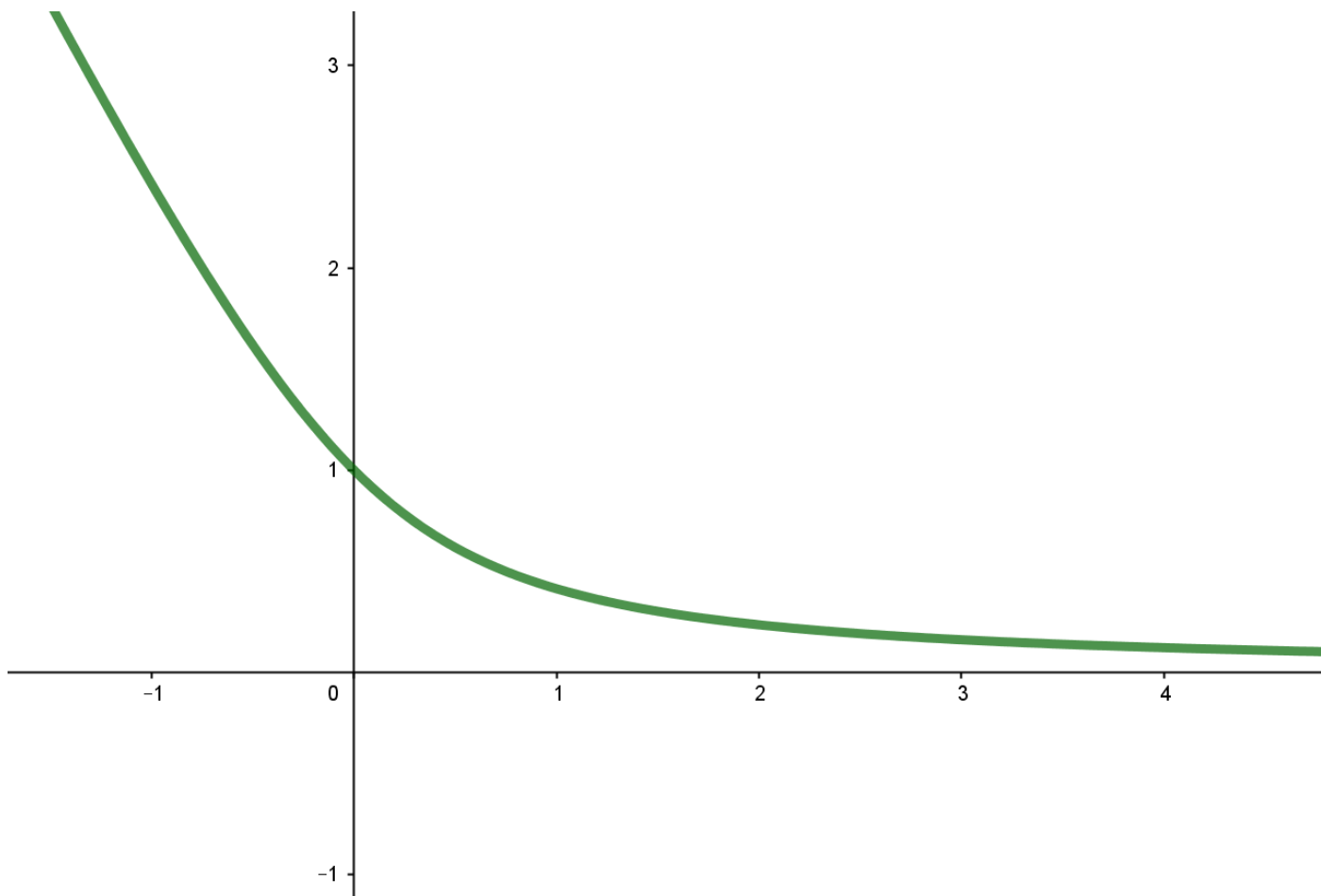
4) Συνάρτηση $f(x) = 1 - e^{2-x}$



5) Συνάρτηση $f(x) = \ln x - x$



6) Συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$



Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + \lambda$ και το $A(0,3)$ που είναι ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.

B1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$. (3μ)

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (6μ)

B3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. (6μ)

B4. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x - 21) < 3$ (6μ)

B5. Εξετάστε αν η ευθεία $y = 1$ τέμνει την C_f . (4μ)

Θέμα 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$.

Γ1. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία. (5μ)

Γ2. Δείξτε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0.

Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της f ; (5μ)

Γ3. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία. (4μ)

Γ4. Έχει η g ελάχιστη τιμή; Ποια; (3μ)

Γ5. Να βρείτε τις $f \circ g$ και $g \circ f$. (8μ)

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. (6 μ)

Δ2. Να βρείτε την f^{-1} . (6 μ)

Δ3. Αν $g(x) = 1 + \frac{1}{e^x + 1}$ να δείξετε ότι $f = g$. (4 μ)

Δ4. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (6 μ)

Δ5. Να αποδείξετε ότι $\frac{e^{\sqrt{2019}} + 2}{e^{\sqrt{2019}} + 1} > \frac{e^{\sqrt{2020}} + 2}{e^{\sqrt{2020}} + 1}$. (3 μ)

Θέμα 4

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

B1. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ; (3 μ)

B2. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ; (4 μ)

B3. Υπολογίστε τα όρια:

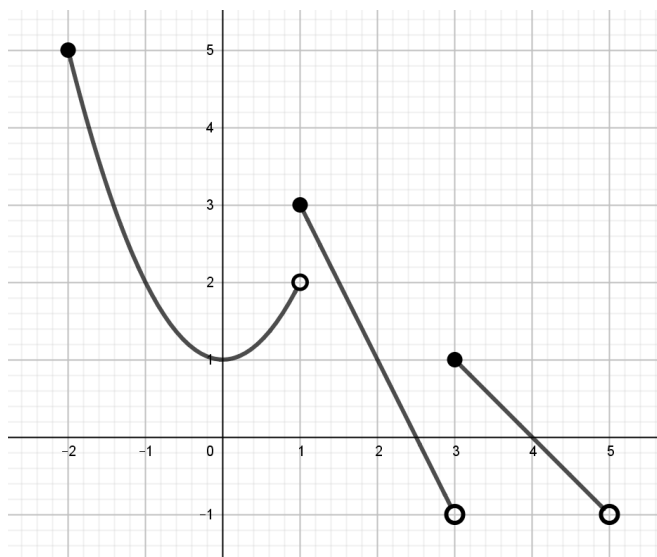
i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ (3 μ)

ii) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (3 μ)

B4. Υπολογίστε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ (3 μ)

ii) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ (3 μ)



B5. Ποιες είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 1$; (6 μ)

Θέμα 5

Γ1. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x^2-1} + \alpha x + \beta & , \quad x > 1 \\ \frac{2\eta\mu(x-1)}{x-1} + 3x - 12\alpha & , \quad x < 1 \end{cases}$

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ να υπολογίσετε τα α, β . (10 μ)

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση : $g(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-2}{2x^2-18} & , \quad x > 3 \\ \frac{\gamma}{x^2+1} + \frac{x}{2} & , \quad x \leq 3 \end{cases}$

Αν $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = 1$, να υπολογίσετε το γ και να εξετάσετε

αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$. (8 μ)

Γ3. Αν $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = -3$, $\gamma = -5$, να υπολογίσετε το όριο :

$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + g(x))$ (7 μ)

Θέμα 6

Δ1. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x + 6$ για κάθε

$x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται . (5 μ)

Δ2. Αν f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,

να δείξετε ότι η $h = f - g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (5 μ)

Δ3. Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = x + 3$ και $g(x) = e^{-2x+1} - e + 3$.

α) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία . (5 μ)

β) Να βρείτε την g^{-1} . (5 μ)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - g(x) = 0$. (5 μ)

Θέμα 7

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta & , x \in [-2, 1] \\ (\beta + 1)x + 4\alpha & , x \in (1, 2] \end{cases}$

B1. Αν $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$,

να υπολογίσετε τα α, β . (9 μ)

B2. Αν $\alpha = -1$ και $\beta = 2$ τότε :

i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (5 μ)

ii) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ; (3 μ)

iii) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + x}{\sqrt{-x} - 1}$ (8 μ)

Θέμα 8

Γ1. Αν $|x^2 f(x) - \eta \mu^2 x| \leq 2x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x f(x) - \eta \mu 4x}{x + \eta \mu x}$ (10 μ)

Γ2. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(f(x) - 1 \right)^2 \eta \mu \left(\frac{1}{x} \right) \right]$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(f(x))^3 + f(x) - 2}{\sqrt{f(x)} - 1}$ (10 μ)

Γ3. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 0} (3f(x)g(x) + x^{21} - 60) = 3$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ (5μ)

Θέμα 9

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$(f(x))^3 + e^{f(x)} - 1 = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (5 μ)

Δ2. Να βρείτε την αντίστροφη της f . (5 μ)

$$\mathbf{\Delta 3.} \text{ Αν } f^{-1}(x) = x^3 + e^x - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1} + \alpha x + \beta & , \quad x > 1 \\ 2\alpha x - \beta + f(0) & , \quad x \leq 1 \end{cases}$$

τότε :

i) να βρείτε το πρόσημο της f^{-1} για τις διάφορες τιμές του x . (5 μ)

ii) να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - e^x}{\eta\mu(x-1)}$ (5 μ)

iii) να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε να ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{7}{2}$ (5 μ)

Θέμα 10

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2-2x} & , \quad x > 2 \\ \alpha x + \beta & , \quad 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

B1. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$

B2. Να υπολογίσετε τα α, β ώστε να υπάρχουν τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

B3. Για κάθε $x \in (2, +\infty)$ να δείξετε ότι : $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$

B4. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2, +\infty)$.

B5. Αν $\alpha = 4$ και $\beta = -6$ να βρείτε τα σημεία τομής της C_f

με τους άξονες συντεταγμένων.

Θέμα 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 2$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

Γ2. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. (5 μ)

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση : $x^{12} + x^4 < 16^3 + 16$ (5 μ)

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\eta\mu(x-1)}$ (5 μ)

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(f(x)) \cdot (x-1)}{(f(x))^2}$ (5 μ)

Θέμα 12

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

f γνησίως φθίνουσα στο $[0, \sqrt{5}]$, f γνησίως αύξουσα στο $[\sqrt{5}, +\infty)$

$f(1) = f(3) = 0$ και f άρτια.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο. (10 μ)

Δ2. Αν $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$ τότε :

i) να δείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται. (5 μ)

ii) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \eta\mu\left(\frac{1}{x-3}\right)$ (5 μ)

iii) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{\sqrt{x+1} - 2}$ (5 μ)

Θέμα 13

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta + 2 & , x \geq 1 \\ \beta x + 3\alpha & , x < 1 \end{cases}$ με $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

B1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -1$. (5 μ)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

B3. Είναι η f 1-1; (5 μ)

B4. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (5 μ)

B5. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της f ; (5 μ)

Θέμα 14

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^7 + x^5 + x - 3$ και $g(x) = e^{1-x} - 1$.

Γ1. Να δείξετε ότι οι f και g αντιστρέφονται. (5 μ)

Γ2. Να δείξετε ότι για $x < 1$ ισχύει $f(x) < 0$. (5 μ)

Γ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\eta\mu(x-1)}$ (5 μ)

Γ4. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο. (5 μ)

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \left[|f(x)| \eta\mu \left(\frac{1+x^2}{f(x)} \right) \right]$. (5 μ)

Θέμα 15

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{1-x}$, $x \in (1, +\infty)$

Δ1. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. (5 μ)

Δ2. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (5 μ)

Δ3. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} [(\sqrt{x} - 1)f(x)]$ (5 μ)

Δ4. Να δείξετε ότι $f(x) = x + \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. (5 μ)

Δ5. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (5 μ)

Θέμα 16

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(1-x)$ και $g(x) = e^{2-x}$.

B1. Να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ g$ και να δείξετε ότι είναι 1-1. (9 Μ)

B2. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της $f \circ g$. (7 Μ)

B3. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της $(f \circ g)^{-1}$ έχει σημείο τομής με τον $x'x$. (3 Μ)

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{f(x)}}{\sqrt{3x+1} - 2}$ (3 Μ)

B5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x f^2(x)}$ (3 Μ)

Θέμα 17

Για την συνάρτηση f ισχύει $x^4 + x^3 < x f(x) < x^3 + x^2$ για κάθε $x \in (0,1)$.

Γ1. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ (9 Μ)

Γ2. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{f(x)}$ (3 Μ)

Γ3. Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu^2 f(x)}{f(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu f(x)}{f^2(x)}$ (6 Μ)

Γ4. Δίνεται η $g(x) = \frac{\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{5}{8}\right)x^3 + x}{\left(f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}\right)x^2 + 1}$

Αν το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)} \frac{x-1}{\left(x-\frac{5}{8}\right)^2}$ (7 Μ)

Θέμα 18

Δίνονται συναρτήσεις f, g για τις οποίες είναι γνωστά τα παρακάτω :

- i. $g(2x-1) + 2f(x) = g(1-x) + f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- ii. Η g είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το $\mathbb{R}$.
- iii. $f(1+f(x)) - f(e^{x-2} + 3x - 6) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$. (8 Μ)

Δ2. Να βρείτε τον τύπο της f . (8 Μ)

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο. (3 Μ)

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση : $g(2016 + f(x^{21} + x)) = g(2016)$. (3 Μ)

Δ5. Να λύσετε την ανίσωση : $g(3) < g(f^{-1}(e + e^x))$. (3 Μ)

Θέμα 19

Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{3}{2-x} - \frac{4}{4-x^2}$ και $g(x) = \sqrt{x^2+1}$

B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g . (4 μ)

B2. Να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$. (5 μ)

B3. Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) + 2x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (g(x) + x)$. (8 μ)

B4. Είναι η g 1-1 ; (2 μ)

B5. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2 - 5x| + x}{g(x)}$ (6 μ)

Θέμα 20

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\mu^2 - 4)x^3 + (\mu - 2)x + 1}{x + 1}$, $x \in (-1, +\infty)$.

Γ1. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε

το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (10 μ)

Γ2. Αν $\mu = 2$ τότε :

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

ii) Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) + e^{-x} - 2 = 0$ (5 μ)

iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ (5 μ)

Θέμα 21

Δ1. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2f(x)}{f(x) + 5x + 1}$ (5 μ)

Δ2. Αν $f(x) = 2x + 4$ τότε :

i) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{f(x)}{2}} - \sqrt{2f(x)} \right)$ (5 μ)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{x+2}) - f(-x-1) < 0$ (5 μ)

iii) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{(x+2)^3}$ (5 μ)

iv) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{\sqrt{x+3} - 1}$ (5 μ)

Θέμα 22

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & , x \in (-\infty, 2) \\ \frac{x^2-16}{x-4} & , x \in [2, 4) \\ \sqrt{x^2+x+1} & , x \in [4, +\infty) \end{cases}$

B1. Να υπολογίσετε τα: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (6 μ)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια. (5 μ)

B3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 21x)$ (4 μ)

B4. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x)$ (5 μ)

B5. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\mu x^2 + x + 1)f(x)]$ (5 μ)

Θέμα 23

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{16\sqrt{x} - 16\alpha}{x^2 - 4x} & , x > 4 \\ \alpha x + \beta & , x \leq 4 \end{cases}$

Γ1. Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. **(9 μ)**

Γ2. Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -7$ τότε να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow \frac{7}{2}} \frac{f(x)}{\left(x - \frac{7}{2}\right)^3}$ **(4 μ)**

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\sqrt{x} - 1}$ **(4 μ)**

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) \eta \mu \left(\frac{1}{f(x)} \right) \right]$ **(4 μ)**

iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \eta \mu \left(\frac{1}{f(x)} \right) \right]$ **(4 μ)**

Θέμα 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x+1} - e$

Δ1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. **(5 μ)**

Δ2. Να βρείτε την αντίστροφη της f . **(5 μ)**

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 + f(x) = 0$ **(5 μ)**

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση $x^3 - x^6 < f(x^2) - f(x)$ **(5 μ)**

Δ5. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(e^{2x} - 1)x^2}$ **(5 μ)**

Θέμα 25

B1. Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$f(0) + e^4 + 1 = f(2) \quad \text{και} \quad f(0) + f(2) = (e^2 - 1)^2.$$

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο τομής της C_f με τον $x'x$. (9 μ)

B2. Να λύσετε την εξίσωση $e^{2x} + x = e^2 + 1$. (6 μ)

B3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x - e^2 - 1$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της f στο $(0, 2)$. (5 μ)

β) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο. (5 μ)

Θέμα 26

$$\text{Δίνεται η συνεχής στο } \mathbb{R} \text{ συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & , x < -1 \\ \alpha x^2 + \beta & , x \in [-1, 2] \\ \frac{\eta\mu(x - 2)}{\sqrt{x + 2} - 2} & , x > 2 \end{cases}$$

Γ1. Να υπολογίσετε τα α, β . (10 μ)

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (3 μ)

Γ3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (5 μ)

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (2, 7)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. (7 μ)

Θέμα 27

Δ1. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(21) < 21$ και $(f(x) - x)^2 = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της f . (6 μ)

Δ2. Έστω $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \sqrt{3})$

τέτοιο ώστε $2f(x_0) - \sqrt{3} + 3 = 0$. (6 μ)

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (4 μ)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (3 μ)

δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + f(x)}{x}$. (6 μ)

Θέμα 28

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = xe^x$ και η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$x + 1 \leq f(x) \leq x^2 + x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B1. Να υπολογίσετε το $f(0)$. (3 μ)

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0. (7 μ)

B3. Να υπολογίσετε την παράγωγο της g στο 0. (4 μ)

B4. Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $A(0, g(0))$. (4 μ)

B5. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$. (7 μ)

Θέμα 29

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-3} & , \quad x > 3 \\ 2^x - 10 & , \quad x \leq 3 \end{cases}$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια. (5 μ)

Γ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f(x_0) = \sqrt[3]{21} + \sqrt{21} + 21 \quad (5 \mu)$$

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} \cdot f(x))$. (5 μ)

Θέμα 30

Δίνεται η παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta & , \quad x < 1 \\ 2x + 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

Δ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 2$. (7 μ)

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1, f(1))$. (3 μ)

Δ3. Έστω g συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $g(-2) = 11$ και $g(-3) = 6$. Να δείξετε ότι υπάρχει

τουλάχιστον ένα σημείο τομής των C_f και C_g το οποίο έχει τετμημένη στο

διάστημα $(-3, -2)$. (5 μ)

Δ4. Δίνεται συνάρτηση h με $h(x) < \mu x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $f(x) \neq h(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (4 μ)

Δ5. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\mu x^3 + 21x^2}{f(x)}$ (6 μ)

Θέμα 31

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

B3. Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο, το οποίο έχει αρνητική τετμημένη.

B4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην $y = \frac{1}{11}x + 21$

B5. Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη.

(5x5 = 25 μ)

Θέμα 32

Γ1. Αν f παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$ και $f(x^2 - 1) = x^4 - 2x^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(3, f(3))$. (10 μ)

Γ2. Αν $f(x) = x^2 + 1$ τότε :

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -8x + 21$ (5 μ)

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f οι οποίες διέρχονται από το σημείο $E(0, -3)$ (5 μ)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 1}{f(x^3) - 1}$ (5 μ)

Θέμα 33

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x-h) - f(x) = -2h$ για κάθε $x, h \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(6 μ)

Δ2. Να δείξετε ότι $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{h} = 4$

(6 μ)

Δ3. Αν g συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 42$, να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη

στο 0 και στη συνέχεια ότι ισχύει $g'(0) = 21 \cdot f'(21)$

(6 μ)

Δ4. Αν $f(x) = 2x + 21$ και $g(x) = 42e^x - 42$ να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα

$x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

(3 μ)

Δ5. Αν $f(x) = 2x + 21$ να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

$$\lim_{x \rightarrow -11} \frac{1}{f(x)+1} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)+1}$$

(4 μ)

Θέμα 34

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = 21 - e^x$.

B1. Να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ g$.

(5 μ)

B2. Να δείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.

(7 μ)

B3. Να δείξετε ότι οι C_f και C_g δεν έχουν παράλληλες εφαπτόμενες.

(3 μ)

B4. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη

στην ευθεία $4y - x - 21 = 0$.

(4 μ)

B5. Ένα κινητό ξεκινά από την αρχή των αξόνων και κινείται κατά μήκος της C_f .

Τη στιγμή που διέρχεται από το σημείο $A(4,2)$ ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του είναι 1 cm/sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του όταν διέρχεται από το $A(4,2)$.

(6 μ)

Θέμα 35

Γ1. Έστω f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f''(x) > 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $f(-3) = 5$, $f(-3) \cdot f(-1) < 0$, $f(21) > 21$, να δείξετε ότι η C_f

έχει ακριβώς 2 κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$. (8 μ)

Γ2. Αν $1 \leq g'(x) \leq 2$ για κάθε $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ και $g(1) = 0$,

να δείξετε ότι $-1 \leq g\left(\frac{1}{2}\right) \leq -\frac{1}{2}$ (7 μ)

Γ3. Αν $f(x) = x^2 - 4$ και $g(x) = \ln x$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη με την

εφαπτομένη της C_g στο σημείο τομής της με τον $x'x$. (5 μ)

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)g(\xi) = -f(\xi)g'(\xi)$ (5 μ)

Θέμα 36

Δ1. Αν η παράγωγος της f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0)$ και $\alpha < \beta < \gamma < 0$

α) Να δείξετε ότι $(\gamma - \beta)(f(\beta) - f(\alpha)) < (\beta - \alpha)(f(\gamma) - f(\beta))$ (5 μ)

β) Να δείξετε ότι $f'(\alpha) - f'(\beta) < \beta^3 - \alpha^3$ (7 μ)

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{1}{x} - 21$, $x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (7 μ)

β) Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς δυο κοινά σημεία με τον $x'x$. (3 μ)

γ) Είναι η f 1-1; (3 μ)

Θέμα 37

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 1$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

B3. Να δείξετε ότι η f έχει μια αρνητική και δυο θετικές ρίζες. (5 μ)

B4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 9x$. (5 μ)

B5. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 21} \frac{f(x-21)-1}{x-21}$ (5 μ)

Θέμα 38

Δίνεται η $f(x) = e^{x-1} - 2 \ln x + x$ και συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ για την οποία ισχύει $g^3(x) + g(x) = -x$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (6 μ)

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = ex + 21$. (6 μ)

Γ3. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα. (6 μ)

Γ4. Να δείξετε ότι οι C_f και C_g δεν έχουν κοινά σημεία. (3 μ)

Γ5. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(x)}{\eta \mu x}$ (4 μ)

Θέμα 39

Δίνεται συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$x f'(x) = f(x) + x \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty) \quad \text{και} \quad f(1) = 0$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. (5 μ)

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 21$. (5 μ)

Δ4. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in (0, +\infty)$ ισχύει $f(x+3) + f(x+1) > 2f(x+2)$ (5 μ)

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 21)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)(\xi - 21)^4 + 4f(\xi)(\xi - 21)^3 = 0 \quad \text{(5 μ)}$$

Θέμα 40

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{x-1}$

B1. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

B2. Βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

B3. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$

για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$. (5 μ)

B4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f

που είναι παράλληλες στην ευθεία $16y + x + 21 = 0$ (5 μ)

B5. Αν $1 < \alpha < \beta$ να δείξετε ότι $\alpha\beta f'(\alpha) - \beta < \alpha\beta f'(\beta) - \alpha$ (5 μ)

Θέμα 41

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2 + \ln x}{x + 1}$ και $g(x) = e^x - x + 1$

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (8 μ)

Γ2. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

Γ3. Έχουν οι C_f και C_g κοινό σημείο; (2 μ)

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $2g(x_0) = 5 - 2x_0$ (5 μ)

Γ5. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $g'(\xi) = \frac{1 - 2x_0}{2x_0}$ (5 μ)

Θέμα 42

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $f(21) > 21$ και

$$f^2(x) - 2x f(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (7 μ)

Δ2. Να δείξετε ότι f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (5 μ)

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

Δ4. Να δείξετε ότι $f'(x) < f'(x+1) + e^x(e-1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μ)

Δ5. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{21} + 21 \cdot x}$ (3 μ)

Θέμα 43

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(1-x)\ln x}{x}$

B1. Να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{1-x-\ln x}{x^2}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$. (3 μ)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (7 μ)

B3. Να δείξετε ότι η $h(x) = x^3 + x - 2$ είναι 1-1. (4 μ)

B4. Δίνεται συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

με $g^3(x) + g(x) = e^x - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να βρείτε το ακρότατο της g . (7 μ)

ii) Να εξετάσετε αν έχουν κοινό σημείο οι C_f και C_g . (4 μ)

Θέμα 44

Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $g(x) = x f(x) - 5x$

Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(2, f(2))$ έχει εξίσωση $y = 18x - 31$.

Γ1. Να υπολογίσετε τα $f(2)$ και $f'(2)$. (3 μ)

Γ2. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$. (5 μ)

Γ3. Αν $f''(x) = 12x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να βρείτε τον τύπο της f . (6 μ)

Γ4. Δίνεται ότι $f(x) = 2x^3 - 6x + 1$.

i) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f . (4 μ)

iii) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 21$. (2 μ)

Θέμα 45

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = 2e^x + x^2 + \alpha x - 6$ για την οποία ισχύει

$$f(x) + 4 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Δείξτε ότι $\alpha = -2$. (5 μ)

Δ2. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (6 μ)

Δ3. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς 2 ρίζες. (6 μ)

Δ4. Να δείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x+3) + 2f(x) > 3f(x+1)$. (5 μ)

Δ5. Να δείξετε ότι $f(x) + x^{2020} + 21 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (3 μ)

Θέμα 46

Δίνεται η $f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x^2}$ και η ευθεία $y = 9x - 12$ που είναι η εφαπτομένη της C_f

στο σημείο της $A(1, f(1))$.

B1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = -4$. (5 μ)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

B3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (5 μ)

B4. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. (5 μ)

B5. Αν $g(x) = (x^2 - 3x + 2)f(x)$ να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$

τέτοιο ώστε $g''(\xi) = 0$. (5 μ)

Θέμα 47

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0) = 0$ και

$$(x^2 + 1)f'(x) + 2xf(x) = 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μ)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

Γ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

Γ4. Να δείξετε ότι για οποιαδήποτε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $|4f(\alpha)f(\beta)| \leq 1$. (5 μ)

Γ5. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (5 μ)

Θέμα 48

Δ1. Αν $f'(x)f(x)=x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

να δείξετε ότι η f έχει ακρότατο. (5 μ)

Δ2. Αν $f'(x)f(x)=x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0)=1$,

να βρείτε τον τύπο της f . (5 μ)

Δ3. Αν $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ και $g(x)=x-f(x)$ τότε :

i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα. (5 μ)

ii) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g . (5 μ)

Θέμα 49

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x + \frac{\beta}{x}$ και η ευθεία (ε): $y=-3x+8$ η οποία εφάπτεται της C_f στο $A(1, f(1))$.

B1. Να δείξετε ότι $f(x)=x + \frac{4}{x}$ (4 μ)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς :

τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα. (9 μ)

B3. Έστω $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+x+3$.

Να δείξετε ότι $|f(x)| \geq 4$ και $|f(x)| > g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (4 μ)

B4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f . (4 μ)

B5. Να σχεδιάσετε την C_f . (4 μ)

Θέμα 50

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + \alpha x + \beta$ και η ευθεία $y = x$ που είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 0$. (5 μ)

Γ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (4 μ)

Γ3. Δίνεται η $g(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}x^2$.

i) Μελετήστε την g ως προς τη μονοτονία. (4 μ)

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της g . (4 μ)

iii) Να δείξετε ότι η g έχει ακριβώς μια ρίζα x_0 για την οποία ισχύει $0 < x_0^{21} < 1$. (4 μ)

iv) Να μελετήσετε την g ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (4 μ)

Θέμα 51

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) = f(x) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 f(x) - f(x)}{x-1} = 2e$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μ)

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

Δ3. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα. (5 μ)

Δ4. Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η C_f . (5 μ)

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $\sqrt{f(\xi)} - e = 0$. (5 μ)

Θέμα 52

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x+10}{x+3}$

- B1.** Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία. (4 μ)
- B2.** Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα. (4 μ)
- B3.** Βρείτε (αν υπάρχουν) τις ασύμπτωτες της C_f . (5 μ)
- B4.** Σχεδιάστε την C_f . (6 μ)
- B5.** Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$. (6 μ)

Θέμα 53

Δίνεται η $f(x) = x \cdot \ln(9+x^2)$

- Γ1.** Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και βρείτε το σύνολο τιμών της. (5 μ)
- Γ2.** Βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $(f(x)-21)(f(x)+2020)=0$ (5 μ)
- Γ3.** Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0,0)$. (5 μ)
- Γ4.** Να δείξετε ότι $f(x) > \ln 9^x$ για κάθε $x>0$ και στη συνέχεια αν E το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x=1$, $x=21$, να δείξετε ότι
- $$E > \left(\frac{21^2}{2} - \frac{1}{2} \right) \cdot \ln 9 \quad (5 \mu)$$
- Γ5.** Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$, $x=1$. (5 μ)

Θέμα 54

Έστω f, g με $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1) + 1$ και $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = g(x) + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μ)

Δ2. Αν η g έχει δυο ρίζες α, β με $\alpha < 0 < \beta$, να δείξετε ότι

η f έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (α, β) . (5 μ)

Δ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από

τις C_f , C_g και τις ευθείες $x = \alpha$ και $x = \beta$. (5 μ)

Δ4. Αν $g(x) = (x - \alpha)(x - \beta)$ τότε :

i) Να δείξετε ότι $g(x) \geq -\frac{(\beta - \alpha)^2}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μ)

ii) Αν E το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g και τον $x'x$

να δείξετε ότι $E < \frac{(\beta - \alpha)^3}{4}$ (5 μ)

Θέμα 55

Δίνεται η $f(x) = x \ln x$.

B1. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

B2. Βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

B3. Βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $3f(x) + 1 = 0$. (5 μ)

B4. Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα και σχεδιάστε την C_f . (5 μ)

B5. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από

την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$. (5 μ)

Θέμα 56

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Γ1. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$. (5 μ)

Γ2. Αν f παραγωγίσιμη στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ και η εξίσωση $f(x) = x$ έχει δυο ρίζες α, β με $\alpha < \beta$

να δείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην $y = x + 21$. (5 μ)

Γ3. Αν $f(x) = x \cdot \eta\mu x$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ τότε :

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και το πρόσημο. (5 μ)

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον $x'x$ και την ευθεία $x = \frac{\pi}{2}$. (5 μ)

iii) Αν g συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} g(x) < 0$

και $f^2(x) + g^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

να βρείτε την g . (5 μ)

Θέμα 57

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x) + f(x) = e^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $f(0) + (f(0))^{21} = 0$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x) = xe^{-x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μ)

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και την κυρτότητα. (5 μ)

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια να βρείτε το πλήθος των ριζών

της εξίσωσης $2e f(x) - 1 = 0$. (5 μ)

Δ4. Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η C_f και να τη σχεδιάσετε. (5 μ)

Δ5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από

την C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$. (5 μ)

Θέμα 58

Δίνεται η $f(x) = \frac{2}{x} + \frac{4 \ln x}{x}$

B1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (5 μ)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (5 μ)

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f . (4 μ)

B4. Να σχεδιάσετε την C_f . (5 μ)

B5. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα x'
και τις ευθείες $x=1$ και $x=e$. (6 μ)

Θέμα 59

Δίνεται η $f(x) = e^x + x - 1$

Γ1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μ)

Γ2. Να δείξετε ότι ορίζεται η f^{-1} , να βρείτε το πεδίο ορισμού της
και να την μελετήσετε ως προς το πρόσημο. (5 μ)

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την $C_{f^{-1}}$, τον άξονα x'
και τις ευθείες $x=0$ και $x=e$. (5 μ)

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (1, 2)$
τέτοιο ώστε $2f(x_0) = e^2 + e + 1$ (5 μ)

Γ5. Για κάθε $x > 0$ να δείξετε ότι $20f(2x) < f(21x) + 19f(x)$ (5 μ)

Θέμα 60

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x \cdot (\ln x - 1)$ και συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$x f'(x) = \ln x - f(x) \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 0.$$

Δ1. Να δείξετε ότι η g είναι παράγουσα της $h(x) = \ln x$ και να βρείτε

το σύνολο τιμών της συνάρτησης g . (5 μ)

Δ2. Αν $\theta \in (\pi, 2\pi)$, να βρείτε το πλήθος των ριζών

της εξίσωσης $g(x) = \eta \mu \theta$. (5 μ)

Δ3. Να δείξετε ότι $f(x) = \ln x + \frac{1}{x} - 1$ (5 μ)

Δ4. Να δείξετε ότι $x^x \geq e^{x-1}$ για κάθε $x > 0$. (5 μ)

Δ5. Να δείξετε ότι $\int_1^2 x^x dx > e - 1$ (5 μ)

Θέμα 61

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 \ln(\sqrt{x-1} + 1) + 3$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1-1”.

iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x) = 2$.

v. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{(e-1)^2+1} \frac{f(x)}{4\sqrt{x-1}} dx$

Θέμα 62

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0)=1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) \cdot e^y + f(y) \cdot e^x \text{ για κάθε } x, y \in \mathbf{R}.$$

- i. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.
- ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.
- iii. Δείξτε ότι $f(x) = xe^x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$
- iv. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- v. Εξετάστε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f

Θέμα 63

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

1. η $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$
2. $f(2) - f(1) < 3$
3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.
4. Δείξτε ότι $\int_0^1 f'(x) e^x dx < e - \int_0^1 2xe^x dx$
5. Αν $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον x' και την ευθεία $x=1$.

Θέμα 64

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^{2011} + 2x - 5, x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα τη $x = 1$.
- iii. Να βρείτε το πρόσημο της f .
- iv. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τον άξονα $y'y$.
- v. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)\eta\mu x_0 + f(x_0)\sigma\upsilon\nu x_0 = 0$$

Θέμα 65

Δίνεται συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $f(2) = 0$, $f'(0) = 0$ και

$f''(x) < 0$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 + 1) < 0$
- iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,3)$, ώστε : $f(\xi) + 4\xi = \xi^2 + 3$.
- iv. Αν $f(x) = -x^2 + 4$ για κάθε $x \in [0, +\infty)$ τότε :

α) Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 e^x f(x) dx$

β) Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} f(x)$

Θέμα 66

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :
 $f'(x) - f(x) = -4e^{-3x}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(0) = 2$. Να αποδείξετε ότι :

- i. Η συνάρτηση $h(x) = e^{-x}f(x) - e^{-4x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = e^x + \frac{1}{e^{3x}}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .
- iv. Να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f .
- v. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο της C_f
 με την ευθεία $y = 4x$ το οποίο έχει τετμημένη στο διάστημα $(0, 1)$.

Θέμα 67

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + k \cdot x - 1$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

- i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 5$, να βρείτε την τιμή του k .
- ii. Αν $k = 2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$.
- iii. Αν $k = 2$ να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.
- iv. Αν $k = 2$ να δείξετε ότι υπάρχει αρνητικός αριθμός x_0
 για τον οποίο ισχύει $f(x_0) = -2019$.
- v. Αν $k = 2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο $A(0, f(0))$
 και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την (ε) και την ευθεία $x = 1$.

(5 x 5 = 25 μονάδες)

Θέμα 68

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^3 + x - 2$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- iii. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f^{-1} .
- iv. Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής, να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα: $I = \int_{-1}^e f^{-1}(x) dx$
- v. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_0^1 x^3 f(x^2 + 1) dx$.

(5 x 5 = 25 μονάδες)

Θέμα 69

Γ1. Αν η ευθεία $y = 2x + 2$ είναι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$$f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + \alpha x + \beta \quad \text{στο σημείο } A(0, f(0)) \quad \text{να βρείτε τα } \alpha, \beta.$$

Γ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 + x + 1$.

- i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- ii) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα η οποία είναι αρνητική.
- iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 2\eta\mu x}{x^2}$
- iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από τη C_f , τον $x'x$ και τις ευθείες $x = 0$, $x = 1$.

Θέμα 70

Δ1. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$x f'(x) + f(x) = 2x \quad \text{για κάθε } x \neq 0, \quad (f(1))^{2019} + f(1) = 2^{2019} + 2$$

$$\text{και } e^{f(-1)} + f(-1) = \frac{1}{e^2} - 2.$$

Να βρείτε τη συνάρτηση f . (9 μονάδες)

Δ2. Δίνεται η $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

- i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- ii) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.
- iii) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες.
- iv) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f .

(4 x 4 = 16 μονάδες)

Θέμα 71

Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(0)=0$, $f(3)=18$ και

$$f'(x) \neq 2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα κοινό σημείο της C_f

με την ευθεία $y = 2x + 4$. (10 μονάδες)

Γ2. Αν $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 3x$ και $h(x) = e^x f(x)$ τότε :

α) Να εξετάσετε αν έχει ασύμπτωτες η C_h . (5 μονάδες)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_h ,

τον x 'ς και την ευθεία $x=1$. (5 μονάδες)

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,2)$ τέτοιο ώστε

$$h'(x_0) = e^2 f'(x_0) \quad (5 \text{ μονάδες})$$

Θέμα 72

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f''(x) - f'(x) = x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η ευθεία $y = x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο της $O(0,0)$.

Δ1. Να υπολογίσετε τα $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$ (4 μονάδες)

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x) = e^x - \frac{1}{2}x^2 - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (7 μονάδες)

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (5 μονάδες)

Δ4. Να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f . (3 μονάδες)

Δ5. Δίνεται η $g(x) = x f'(x) + x^2$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_g , τον $x'x$ και την ευθεία $x = -1$. (6 μονάδες)

Θέμα 73

Β1. Αν f συνεχής στο 3 και $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 1$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(3, f(3))$.

Β2. Αν $f(x) = \frac{\ln(x-2)}{x-2}$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να εξετάσετε αν η C_f έχει ασύμπτωτες.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο.

δ) Αν E το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα $x'x$ και τις

ευθείες $x = 4$ και $x = 5$, να δείξετε ότι $E < \frac{1}{e}$.

Θέμα 74

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) - f(x) = x^2 - 2x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $e^{f(0)} + f(0) = e^2 + 2$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(0) = 2$.

Γ2. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) + x^2 - 1}{e^x}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Γ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x - x^2 + 1$

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα x_0 , η οποία είναι αρνητική.

Γ5. Αν x_0 η ρίζα της f , να αποδείξετε ότι $\int_{x_0}^0 f(x) dx < 4$.

Θέμα 75

Δίνεται f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

και $f^3(x) + f(x) = x + 10$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

Δ3. Να βρείτε το $f'(0)$ και να δείξετε ότι για κάθε $x > -10$ ισχύει $f(x) \leq \frac{1}{13}x + 2$.

Δ4. Αν E το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , τον άξονα x' και τις

ευθείες $x=0$ και $x=1$, να δείξετε ότι $E < \frac{53}{26}$.

Δ5. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια :

α) να βρείτε την f^{-1}

β) να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_{-10}^{f^{-1}(1)} f(x) dx$

Θέμα 76

B1. Αν $f(x) = \frac{x^3 + \alpha x + \beta}{x-1}$ και η $y = -27x$ είναι η εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$,

να υπολογίσετε τα α, β .

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x) = \frac{x^3 + 27x}{x-1}$

B3. Να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $2f(x) - 42 = 0$

B4. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης

$$x^3 + 27x - \alpha x + \alpha = 0$$

B5. Έστω $g: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = (x-1)f(x)$.

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x > 1$ ισχύει: $g(x+1) < \frac{g(x) + g(x+2)}{2}$

Θέμα 77

Γ1. Να βρείτε συνάρτηση g για την οποία ισχύει $xg'(x) + g(x) = -3x^2 + 2e \cdot x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)}{x^{21}} = e$

Γ2. Αν $f(x) = e^x + \alpha x + \beta$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, να υπολογίσετε τα α, β .

Γ3. Αν $f(x) = e^x$ και $g(x) = -x^2 + ex + 1$ να αποδείξετε ότι:

- i) Υπάρχουν ακριβώς 2 κοινά σημεία των C_f και C_g
- ii) Υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ είναι παράλληλη στην εφαπτομένη της C_g στο $B(x_0, g(x_0))$.

Γ4. Αν $f(x) = e^x$, να λύσετε την εξίσωση: $f(x+2) + f(19) = f(x) + f(21)$

Θέμα 78

Έστω πολυώνυμο $P(x)$ για το οποίο ισχύει :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x^2} = 0$
- το $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{P(x)}{(x-6)^2}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{x+21} = -2$

Δ1. Να δείξετε ότι το $P(x)$ είναι το πολύ 1^{ου} βαθμού.

Δ2. Να δείξετε ότι $P(x) = -2x + 12$

Δ3. Έστω σημεία $M(x, P(x))$, $N(2x, 0)$, $O(0, 0)$ με $x \in (0, 6)$.

- Να δείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου OMN είναι ίσο με $E = -2x^2 + 12x$
- Να βρείτε τη μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδόν του τριγώνου OMN.
- Αν τα σημεία M , N κινούνται και η τετμημένη του M μεταβάλλεται με ρυθμό 2 cm/sec , να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMN τη στιγμή κατά την οποία το M έχει τετμημένη 5 .

Θέμα 79

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ και $g(x) = \frac{1}{2}x$

B1. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

B2. Να λύσετε την ανίσωση $(e^x - 1)(e^{21} + 1) > (e^x + 1)(e^{21} - 1)$

B3. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την f^{-1}

B4. Να δείξετε ότι η C_g εφάπτεται της C_f στην αρχή των αξόνων.

B5. Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες η C_f είναι πάνω από την C_g

και τις τιμές του x για τις οποίες η C_g είναι πάνω από την C_f

Θέμα 80

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \alpha^x$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, για την οποία ισχύει

$$f(x) - \ln 2^x - 1 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Δίνεται και συνάρτηση } g(x) = -x^2 + \beta x + 1$$

για την οποία είναι γνωστό ότι το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - 2}{x^2 - 1}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$.

Γ2. Να δείξετε ότι $\beta = 2$.

Γ3. Να δείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς 2 κοινά σημεία.

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε

$$(f'(x_0) - g'(x_0))(x_0^2 + 1) + (f(x_0) - g(x_0))2x_0 = 0$$

Γ5. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x^3) = f(3x^2 - 3x - 1)$

Θέμα 81

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f^3(x) + f(x) = x^9 + 3x^7 + 3x^5 + 2x^3 + x \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Αν f συνεχής στο 0, να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και

να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $O(0, f(0))$.

Δ2. Αν f παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ τότε :

- i) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα.
- ii) Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και ότι ο άξονας συμμετρίας των C_f και $C_{f^{-1}}$ εφάπτεται σε αυτές.
- iii) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$
- iv) Να βρείτε το σύνολο τιμών της $h(x) = x^3 + x$ και να δείξετε ότι $f = h$.

Θέμα 82

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x+1} & , \quad x > -1 \\ x^2 - 5 & , \quad x \leq -1 \end{cases}$

- B1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f , τις τιμές της στα -2 και 0 και να εξετάσετε αν είναι 1-1 .
- B2.** Υπάρχει σημείο στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι παράλληλη στον $x'x$;
Αιτιολογήστε την απάντησή σας .
- B3.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- B4.** Να φτιάξετε ένα πρόχειρο σχήμα για την C_f
- B5.** Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \alpha$

Θέμα 83

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & , \quad x \geq 1 \\ x^2 + \alpha x + \beta & , \quad x < 1 \end{cases}$

- Γ1.** Να δείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = 3$
- Γ2.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
- Γ3.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f
- Γ4.** Να λύσετε την ανίσωση $f(x^{21} + 1) - f(3 - x) > f(x^{21}) - f(2 - x)$
- Γ5.** Να δείξετε ότι $\frac{f(x) + f(x+2)}{2} > f(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Θέμα 84

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f'(x)=\frac{x^3+x-10}{x^2} \text{ για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

και η ευθεία $y=-8x+19$ η οποία εφάπτεται της C_f στο $A(1, f(1))$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(1)+f'(1)=\lim_{x\rightarrow+\infty} x\eta\mu\frac{3}{x}$

Δ2. Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{1}{2}x^2+\ln x+\frac{10}{x}+\frac{1}{2}$

Δ3. Να δείξετε ότι $2f(x)\geq 15+\ln 4$ για κάθε $x>0$

Δ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της παραγώγου της f

Δ5. Να δείξετε ότι $10f(2)+f(11)<f(21)+10f(1)$

Θέμα 85

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+x^3-\frac{5}{2}x^2+2x+\frac{1}{2}$

B1. Να δείξετε ότι $f'(x)\geq 1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

B2. Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων f και f' .

Στη συνέχεια, για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών των εξισώσεων

$$f(x)=\alpha, \quad f'(x)=\alpha, \quad f'(x)=(\alpha-21)^2+1$$

B3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια θεωρήστε την f^{-1} παραγωγίσιμη και

αποδείξτε ότι οι C_f και $C_{f^{-1}}$ έχουν στο $A(1,1)$ κοινή εφαπτομένη,

η οποία είναι ο άξονας συμμετρίας τους.

B4. Να δείξετε ότι $x<e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

B5. Να δείξετε ότι αν $x>1$ τότε $(f'(x)-1)(e^x-x)<(x-1)(f'(e^x)-f'(x))$

Θέμα 86

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\alpha + \ln x}{\beta + x}$ και $g(x) = e^{x-e} - x + \frac{e^2 - e + 1}{e}$

Δίνεται ακόμα ότι $\left(f(1) - \frac{1}{e+1}\right)(f^2(1) + 21) = 0$ και $e^{f(x)} + f(x) \leq e^{f(e)} + f(e)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

- Γ1.** Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = e$
- Γ2.** Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .
- Γ3.** Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .
- Γ4.** Δείξτε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο , στο οποίο δέχονται κοινή εφαπτομένη , η οποία είναι οριζόντια.
- Γ5.** Να δείξετε ότι αν $e < \kappa < \lambda$ τότε $(e + \lambda)(1 + \ln \kappa) > (e + \kappa)(1 + \ln \lambda)$

Θέμα 87

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x(f''(x) + 1) = 1$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

και $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1-h)}{h} = 2e - 4$. Δίνεται επίσης η $g(x) = x \ln x + (e-2)x - \frac{x^2}{2}$

Οι C_f και C_g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο .

- Δ1.** Να δείξετε ότι $f'(1) = e - 2$
- Δ2.** Να δείξετε ότι $f = g$
- Δ3.** Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει δυο τοπικά ακρότατα , των οποίων οι θέσεις ανήκουν στο διάστημα (e^{-2}, e^2)
- Δ4.** Αν το x_0 είναι θέση τοπικού ακροτάτου της f , να δείξετε ότι το $A(x_0, f(x_0))$ ανήκει στη γραφική παράσταση της $h(x) = \frac{x^2}{2} - x$ καθώς και ότι $f(x_0) > -\frac{1}{2}$
- Δ5.** Αν $x > e$, να δείξετε ότι $(x+1)\ln(x+1) - x \ln x < x + \frac{5}{2} - e$

Θέμα 88

B1. Έστω συνάρτηση $g: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $g(x) = 1 - xg'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

Αν το -1 είναι ρίζα της g και $(g(1))^{21} + g(1) = 2^{21} + 2$, να βρείτε την g .

B2. Αν $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $x^2 f''(x) + 1 = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 1$,

να βρείτε την f .

B3. Αν $g(x) = \frac{1}{x} + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ και $f(x) = \ln x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ τότε :

- i) Να δείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο.
- ii) Να δείξετε ότι οι $C_{f^{-1}}$ και C_g έχουν ακριβώς δυο κοινά σημεία.
- iii) Έχουν οι $C_{f^{-1}}$ και C_g παράλληλες εφαπτόμενες; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Θέμα 89

Δίνεται f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $g(x) = f(x) - x^4 + 20x^3 + 25x^2 + x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $|g(x) - g(y)| \leq (x-y)^2$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xg(x) - \eta\mu x}{x} = 0$ τότε :

Γ1. Να δείξετε ότι η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

Γ2. Να δείξετε ότι $f(x) = x^4 - 20x^3 - 25x^2 - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ3. Να δείξετε ότι η f έχει τουλάχιστον 3 ρίζες στο διάστημα $(-2, 1)$

Γ4. Να αποδείξετε ότι :

- i) η εξίσωση $4x^3 - 60x^2 - 50x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον 2 ρίζες στο $(-2, 1)$
- ii) η f'' έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(-2, 1)$

Γ5. Να δείξετε ότι $f''(x) \geq -350$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 90

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f'(x) = 2(x-\alpha)(x-\beta)^2 + 2(x-\alpha)^2(x-\beta) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δίνεται επίσης ότι $\alpha < \beta$, $\alpha\beta \neq 0$, $f(\alpha) = 0$ και

υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $f(x) \leq f(0)$ για κάθε $x \in (-\delta, \delta)$.

Δίνεται τέλος ότι το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 16}{x}$ υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(0) = 0$ και $f(0) = 16$

Δ2. Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα στα α , $\frac{\alpha+\beta}{2}$, β .

Δ3. Να δείξετε ότι $f(x) = (x+2)^2(x-2)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f και στη συνέχεια για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = \mu$.

Δ5. Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές $(x-2)^2$ και $(x+2)^2$ με $x \in [-3, -2) \cup (-2, 2)$.

Να υπολογίσετε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το εμβαδόν του ορθογωνίου.

Θέμα 91

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} - \alpha x + \beta$

B1. Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

B2. Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ τότε :

i) Να δείξετε ότι $\alpha = 1$ και $\beta = 3$

ii) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

iii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iv) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu(f(x)-2)}{f^2(x)-4}$

v) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow 0} \left[(f(x)-4)\eta\mu \frac{1}{f(x)-4} \right]$

Θέμα 92

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = -x^2 - x$

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x) \geq x+1 \geq g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ2. Να δείξετε ότι η ευθεία $y = x+1$ είναι κοινή εφαπτομένη των C_f και C_g

και να κάνετε ένα πρόχειρο σχήμα με την ευθεία και τις C_f και C_g .

Γ3. Να δείξετε ότι $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ4. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε

$$(f'(x_0) - 1)(g(x_0) - x_0 - 1) + (f(x_0) - x_0 - 1)(g'(x_0) - 1) = 0$$

Γ5. Θεωρούμε τα σημεία $A(x, f(x))$ και $B(x, g(x))$ με $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη όταν η τετμημένη τους

πάρει κάποια τιμή $x_0 \in (-1, 0)$.

Θέμα 93

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [4, 6] \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$x^2 + f^2(x) = 8x - 12 \text{ για κάθε } x \in [4, 6]$$

$$f^2(x_0) + 2f(x_0) < 0 \text{ για κάποιο } x_0 \in (4, 6)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι :

i) Η f έχει ακριβώς μια ρίζα, το 6.

ii) $f(x) = -\sqrt{-x^2 + 8x - 12}$ για κάθε $x \in [4, 6]$

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) + \sqrt{3}}{x - 5}$ και να βρείτε την εξίσωση

της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(5, f(5))$.

Δ3. Να βρείτε συνάρτηση g για την οποία ισχύει $g'(x) = 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

η οποία έχει εφαπτομένη την ευθεία του προηγούμενου ερωτήματος.

Δ4. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και με δεδομένο ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη

να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $(-\sqrt{3}, f^{-1}(-\sqrt{3}))$

Δ5. Έστω $A(x-1, 0)$ και $M(x, f(x))$ με $x \in [4, 6]$

Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της απόστασης των σημείων A και M .

Θέμα 94

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και για οποιαδήποτε x_1, x_2 με $0 < x_1 < x_2$ ισχύει

$$(x_2 - x_1)(f'(x_2) - f'(x_1)) < 0. \text{ Επίσης δίνεται ότι } \lim_{h \rightarrow 2} \frac{f(2h-3)+1}{2h-4} = 0$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(1) = -1$ και $f'(1) = 0$.

Δ2. Να δείξετε ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα καθώς και ότι $f(x) \leq -1$ για κάθε $x > 0$.

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)+1}$

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση $f\left(\frac{1}{x^2+2}\right) < f\left(\frac{1}{e^x+1}\right)$

Δ5. Αν $x^2 f''(x) + 1 = 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, να βρείτε τον τύπο της f .

Θέμα 95

Δίνεται $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως αύξουσα και $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής και γνησίως φθίνουσα

με $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $g(0) = \frac{5}{2}$, $g(1) = \frac{3}{2}$.

B1. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

B2. Αν f, g παραγωγίσιμες στο $(0, 1)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0, 1)$

τέτοιο ώστε $f'(\xi) - g'(\xi) = \frac{g(\xi) - f(\xi)}{\xi - 1}$

B3. Αν $f(x) \neq 1$ για κάθε $x \in (0, 1]$ και $f'(x) \cdot (2f(x) - 2) = 1$ για κάθε $x \in (0, 1]$,

να αποδείξετε ότι $f(x) = \sqrt{x} + 1$ για κάθε $x \in [0, 1]$.

B4. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και να βρείτε την f^{-1} .

B5. Αν η g είναι πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού και η εφαπτομένη της C_g στο $A\left(\frac{1}{4}, g\left(\frac{1}{4}\right)\right)$

είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -\frac{3}{2}x + 21$, να βρείτε την g .

Θέμα 96

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x}$ και η ευθεία $y = \frac{3}{2}x + 40$

που εφάπτεται της C_f στο $A(40, f(40))$

Γ1. Να δείξετε ότι $\alpha = 2$ και $\beta = 800$

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

Γ3. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \mu$

Γ4. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $g(x) = 20 \ln x - x + 100 - 20 \ln 20$

ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

και να δείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ένα ακριβώς κοινό σημείο.

Γ5. Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της περιμέτρου ενός ορθογωνίου που έχει εμβαδόν 400 m^2 ;

Θέμα 97

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^x}$.

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , την ευθεία (ε) και τον άξονα $y'y$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδό $E(\alpha)$ του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=1$ και $x=\alpha$ με $\alpha > 1$.

στ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$.

Θέμα 98

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύει :

$$f(1)=e \quad , \quad f'(x)>0 \quad \text{και} \quad x f'(x) = (1+2x^2) f(x) \quad \text{για κάθε} \quad x \in \mathbb{R} .$$

α) Να δείξετε ότι $f(0)=0$ και να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο .

β) Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=xe^{x^2}$

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=\alpha$ και $x=0$ με $\alpha < 0$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} E(\alpha)$.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,5)$ τέτοιο ώστε : $f'(\xi)=e^{25}$.

στ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα .

Θέμα 99

Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f με $f(0)=0$.

$$\text{Για κάθε } x \neq 0 \text{ ισχύει } f'(x) = \frac{f(x)}{x} + \frac{2x^2}{x^2+1} \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 0 .$$

α) Να δείξετε ότι $f(x) = x \ln(x^2+1)$.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = -\sqrt{e-1}$.

Θέμα 100

Δίνεται η $f(x) = 2 - 2e^x$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Εξετάστε αν έχει ασύμπτωτες η γραφική παράσταση της f .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x=1$.

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_0^1 \frac{x^2}{2} (2 - f(x)) dx$

Θέμα 101

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$.

Για την f είναι γνωστό ότι : $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f(1)=0$

και $\int_0^1 x^3 f'(x) dx = -12$. Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $g(x) = x^2 f(x)$.

α) Να δείξετε ότι $f'(1) = 0$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $2\xi f(\xi) + \xi^2 f'(\xi) = 0$.

γ) Να δείξετε ότι : $\int_0^1 g(x) dx = 4$

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα : $\int_1^{\sqrt{2}} x g(x^2 - 1) dx$

ε) Δίνεται η συνάρτηση h με $h(x) = -g(x) - 1$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται : από την γραφική παράσταση της h , τον άξονα x' , και τις ευθείες $x=0$, $x=1$.

Θέμα 102

Δίνεται συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$.

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' , και τις ευθείες $x=1$, $x=e$.

δ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=1$, $x=1$, $x=e$.

ε) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\alpha)$ του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' , και τις ευθείες $x=1$, $x=\alpha$ με $\alpha > 1$.

Να υπολογίσετε επίσης το όριο : $\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} E(\alpha)$. Τι εκφράζει το όριο αυτό;

στ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\beta)$ του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' , και τις ευθείες $x=\beta$, $x=1$ με $0 < \beta < 1$.

Να υπολογίσετε επίσης το όριο : $\lim_{\beta \rightarrow 0^+} E(\beta)$. Τι εκφράζει το όριο αυτό;

Θέμα 103

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\int_0^1 e^{1-x} f(x) dx = f(x) + e^x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

- α) Να δείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = -e^x + \frac{e}{e-2}$.
- β) Δείξτε ότι υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- γ) Δείξτε ότι η λύση της παραπάνω εξίσωσης είναι θετικός αριθμός.
- δ) Αν x_0 η λύση της παραπάνω εξίσωσης, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (0, x_0)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = -\xi f'(\xi)$.
- ε) Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

Θέμα 104

Δίνονται οι $f(x) = \frac{1+\ln x}{e^x}$ και $g(x) = \frac{\ln x}{e^x}$.

- A) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- B) Βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .
- Γ) Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τις γραφικές παραστάσεις των f , g και τις ευθείες $x=1$, $x=2$.
- Δ) Δείξτε ότι για κάθε $\alpha \in \left(0, \frac{1}{e}\right)$ ισχύει $\int_{\alpha}^{\frac{1}{e}} f(x) dx < 0$.
- E) Δείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\pi, 2\pi)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) \sin \xi = -f'(\xi) \eta \mu \xi$.

Θέμα 105

Δίνεται f συνεχής στο $[0,1]$ με $0 < f(1) < \frac{2}{e^2}$.

Αν $\int_0^1 e^{2x} f(x) dx = 2$ και $\int_0^1 e^{2x} f'(x) dx = 0$, να δείξετε

ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Θέμα 106

Έστω $f(x) = \frac{4005+x}{x^2-4x+3}$, $g(x) = (x-3)f(x)$, $h(x) = \frac{g(x)}{[g(x)-2004]^2}$

Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

A) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ B) $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$ Γ) $\lim_{x \rightarrow 3} h(x)$

Δ) $\lim_{x \rightarrow 3} \ln[h(x)]$ E) $\lim_{x \rightarrow 3} \ln\left[\frac{1}{h(x)}\right]$

Θέμα 107

Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα όρια :

$$\text{A) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 + 1} - \mu x) \quad \text{B) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu^2 - \mu)x^4 - \mu x^3 + x + 2004}{(\mu - 1)x^3 + x + 1975}$$

Θέμα 108

Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Έστω επιπλέον ότι για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει $2004 + (7 - x^8)f(x) \leq 1975 + f(x)$.

A) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$.

B) Αν $f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) > 0$ να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

Γ) Αν $f(\alpha) = \frac{2004}{49}$ και $f(\beta) = \frac{2004}{29}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{2004}{39}$.

Θέμα 109

Έστω συναρτήσεις f και g με $f''(x) = g''(x) + 6x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν $f(1) - g(1) = 3$, $f'(0) - g'(0) = 1$ και οι αριθμοί $x_1 = -1$ και $x_2 = 2004$ είναι ρίζες της g , να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-1, 2004)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

Θέμα 110

Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που ορίζει η παραβολή $x = y^2$ και η ευθεία $x = 1$.

Θέμα 111

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής σ' όλο το $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι
$$\int_{1980}^{2010} f(x-5) dx = \int_{1975}^{2005} f(x) dx$$

β) Να δείξετε ότι
$$\int_{1980}^{2010} (x-5)^{30} dx = \frac{2005^{31} - 1975^{31}}{31}$$

Θέμα 112

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\sqrt{x-1}$.

- α) Δείξτε ότι για κάθε $x \in [1, 5]$ ισχύει $f(x) \in [0, 10]$.
 β) Υπολογίστε το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τη γραφική παράσταση της f , τον άξονα x' και τις ευθείες $x=1$, $x=5$.

Θέμα 113

Έστω η $f(x) = x \ln x$.

- α) Να δείξετε ότι η f στρέφει τα κοίλα άνω στο διάστημα $(0, +\infty)$.
 β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(1, f(1))$.
 γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , την εφαπτομένη της στο $(1, f(1))$ και την ευθεία $x = e$.

Θέμα 114

Έστω $f(x) = x^3 e^x$. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον x' και τις ευθείες $x = -1$ και $x = 0$.

Θέμα 115

Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \frac{6\sqrt{x}-18}{x-9}, & x > 9 \\ \alpha x + \beta, & 1 \leq x \leq 9 \\ \frac{2}{x}, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (5 μονάδες)
 β) Να βρείτε τα α , β ώστε να υπάρχουν τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$ (20 μονάδες)

Θέμα 116

Δίνονται οι αριθμοί A, E, K, P :

$$A = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\eta\mu(x-\alpha)}{1 - \frac{x}{\alpha}} \quad E = \lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{\alpha(x-\alpha)(x+2\alpha)}{x^2 - \alpha x}$$

$$K = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\alpha x - 4\alpha}{8 - 2x} \quad P = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\alpha^2 \cdot \sqrt{x+1} - 2\alpha^2}{\alpha x - 3\alpha}$$

Αν ισχύει η ισότητα $A + E + K + A + P + A = 21$, να υπολογίσετε το α . (25 μονάδες)

Θέμα 117

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = 2x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 . (10 μονάδες)

β) Να βρείτε το $f(2)$. (5 μονάδες)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(4 - f(x^2 + x)) - 2 = 0$. (10 μονάδες)

Θέμα 118

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 2}$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία . (5 μονάδες)

β) Λύστε την ανίσωση $3 \cdot f(f(x^{21}) - f(4 - 3x)) < 1$ (10 μονάδες)

γ) Βρείτε την f^{-1} . (10 μονάδες)

Θέμα 119 Α

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 6 \cdot \ln x$ και η ευθεία (ε): $y = 4x - 3$.

α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας (ε). (20 μ)

β) Είναι η ευθεία (ε) εφαπτομένη της C_f ; (10 μ)

Θέμα 119 Β

Λύστε την εξίσωση $x \ln x = 2x - e$ (20 μ)

Θέμα 120

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$, $x \in [-2, 2]$

Να δείξετε ότι η f έχει 4 θέσεις τοπικών ακροτάτων. (20 μ)

Θέμα 121

Έστω $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x f'(x) \ln x + f(x) = 2x^2$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και $f(e) = e^2$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{\ln x}$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. (10 μ)

β) Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2e$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. (10 μ)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = -ex^2 + 2ex + e$.

Να δείξετε ότι οι C_f και C_g δεν έχουν κοινό σημείο. (10 μ)

100+21 = 121 ασκήσεις για επανάληψη

Εύχομαι επιτυχία στις εξετάσεις !!!

Νίκος Καστόρας

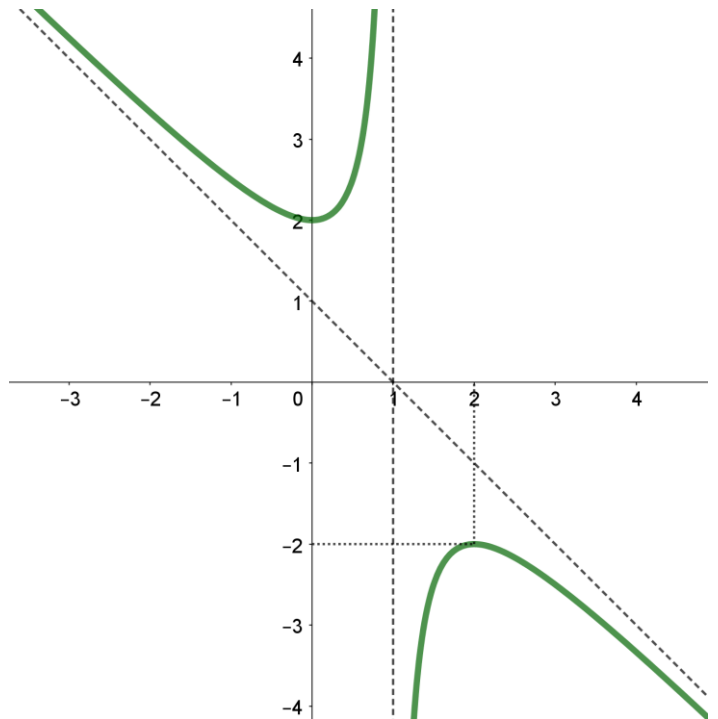
Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{-x^2 + \alpha x + \beta}{x-1}$

Η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(2,-2)$ όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

- Να βρείτε τα α και β .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Επαληθεύστε τα αποτελέσματά σας με το διπλανό σχήμα



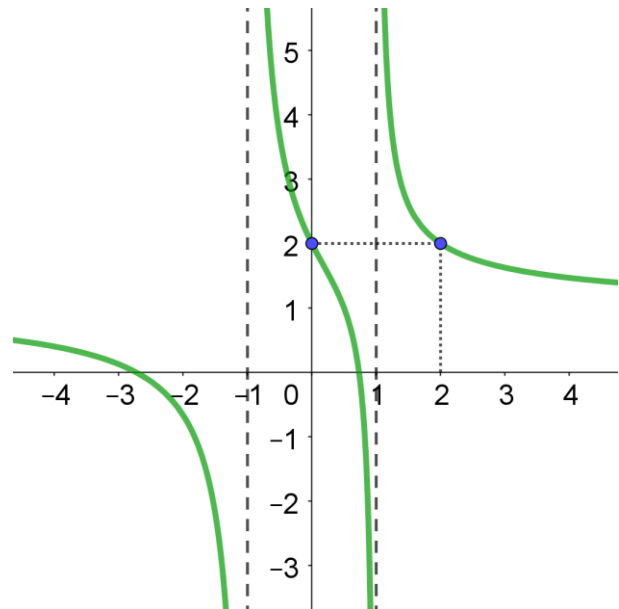
Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 - 1}$

Η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(2,2)$ όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

- Να βρείτε τα α και β .
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
- Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
- Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

Επαληθεύστε τα αποτελέσματά σας με το διπλανό σχήμα



Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{-x^2+2x-2}{x-1}$

- α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.
- β) Μελετήστε την f ως προς τα ακρότατα.
- γ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.
- δ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f .
- ε) Σχεδιάστε μια πρόχειρη γραφική παράσταση που να φαίνονται τα παραπάνω.

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 3x + 1 + \ln x$

- α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.
- β) Μελετήστε την f ως προς τα ακρότατα.
- γ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.
- δ) Βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{-x^2+2x-2}{x-1}$

- α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.
- β) Μελετήστε την f ως προς τα ακρότατα.
- γ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.
- δ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f .
- ε) Σχεδιάστε μια πρόχειρη γραφική παράσταση που να φαίνονται τα παραπάνω.

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 3x + 1 + \ln x$

- α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.
- β) Μελετήστε την f ως προς τα ακρότατα.
- γ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.
- δ) Βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

Θέμα 1 (40 μ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - 3)^2 - 1$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(4, f(4))$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -4x$.

Θέμα 2 (40 μ)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x - 3) \ln x - 1$ και $g(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta$

α) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = -2x + 1$ εφάπτεται στην C_f .

β) Να βρείτε τα α και β ώστε η ευθεία $y = -2x + 1$ να εφάπτεται της C_g στο $A(-1, g(-1))$.

Θέμα 3 (20 μ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha e^x}{x + \beta}$

Να βρείτε τα α και β ώστε η ευθεία $y = -2x - 1$ να εφάπτεται της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$

ΤΕΣΤ 1

Θέμα Α

A1

Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

(8 μονάδες)

A2

- i. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;
- ii. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
- iii. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα A και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

(12 μονάδες)

A3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλα σας τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή τη λέξη **Λάθος** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$, τότε κατ'ανάγκη $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$.

β) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sin x}{x} = 0$

γ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ «κοντά» στο $x_0 \in \mathbb{R}$.

δ) Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε η f παίρνει μέγιστο και ελάχιστο στο $[a, \beta]$.

ε) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο διάστημα $[a, \beta]$ και έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (a, β) ισχύει $f(a) \cdot f(\beta) < 0$.

(5 μονάδες)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2\ln(\sqrt{x-1}+1) + 3$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1-1”.

iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x) = 2$.

v. Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^{(e-1)^2+1} \frac{f(x)}{4\sqrt{x-1}} dx$

(5 x 5 = 25 μονάδες)

ΤΕΣΤ 2

Θέμα Α

A1

i. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$;

ii. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano

iii. Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

(12 μονάδες)

A2

ΣΩΣΤΟ ή ΛΑΘΟΣ

1. Αν f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και υπάρχει $x_0 \in (a, \beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = 0$, τότε

$$f(a) \cdot f(\beta) < 0$$

2. Αν f συνεχής στο Δ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο Δ .

3. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης είναι διάστημα.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ και $f(x) < 0$ «κοντά» στο x_0 , τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$.

ε) Για οποιοδήποτε συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$, είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(5 μονάδες)

A3

Να αποδείξετε ότι η αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

(8 μονάδες)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^{2011} + 2x - 5, x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα τη $x = 1$.
- iii. Να βρείτε το πρόσημο της f .
- iv. Υπολογίστε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα $x'x$ και τον άξονα $y'y$.
- v. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε
$$f'(x_0)\eta\mu x_0 + f(x_0)\sigma\upsilon\nu x_0 = 0$$

(5 x 5 = 25 μονάδες)

ΤΕΣΤ 3

Θέμα Α

A1

Να αποδείξετε την παρακάτω πρόταση :

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν

- f συνεχής στο Δ και
- $f'(x) = 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ , τότε η f είναι σταθερή στο Δ .

(9 μονάδες)

A2

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \alpha^x, \alpha > 0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει:

$$f'(x) = \alpha^x \cdot \ln \alpha.$$

(7 μονάδες)

A3

Πότε η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

(4 μονάδες)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.

β) Αν η f είναι συνεχής στο $[a, \beta]$ με $f(a) < 0$ και υπάρχει $\xi \in (a, \beta)$ ώστε $f(\xi) = 0$, τότε κατ'ανάγκη $f(\beta) > 0$.

γ. Μια συνάρτηση f είναι «1-1», αν και μόνο αν κάθε οριζόντια ευθεία (παράλληλη στον $x'x$) τέμνει τη γραφική παράστασή της σε ένα τουλάχιστον σημείο.

δ. Αν η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα, τότε υποχρεωτικά $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ε) Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_a^\beta f(x)dx + \int_\beta^a f(x)dx = 0$$

(5 μονάδες)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + k \cdot x - 1$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

- i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 5$, να βρείτε την τιμή του k .
- ii. Αν $k = 2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$.
- iii. Αν $k = 2$ να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.
- iv. Αν $k = 2$ να δείξετε ότι υπάρχει αρνητικός αριθμός x_0 για τον οποίο ισχύει $f(x_0) = -2019$.
- v. Αν $k = 2$ να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f στο $A(0, f(0))$ και στη συνέχεια να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από την C_f , την (ε) και την ευθεία $x = 1$.

(5 x 5 = 25 μονάδες)

Θέμα Α

Α1

Έστω f μια συνάρτηση ορισμένη σε ένα διάστημα Δ . Αν F είναι μια παράγουσα της f στο Δ , τότε να αποδείξετε ότι:

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$ είναι παράγουσες της f στο Δ και
- κάθε άλλη παράγουσα G της f στο Δ παίρνει τη μορφή $G(x) = F(x) + c, c \in \mathbb{R}$

(μονάδες 8)

Α2

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ .

Αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να δείξετε ότι $f'(x_0) = 0$.

(μονάδες 8)

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν μια συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα Δ , τότε η εφαπτομένη της C_f σε κάθε σημείο $x_0 \in \Delta$ είναι «κάτω» από τη C_f εκτός από το κοινό τους σημείο.

β. Αν η f είναι συνεχής σε διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$ τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x) dx.$$

γ. Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$, τότε $f(x) > 0$ «κοντά» στο x_0 .

δ) Μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, \beta]$ δεν έχει ασύμπτωτες.

ε. Αν f', g' είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα $[a, \beta]$, τότε:

$$\int_a^{\beta} f(x) g'(x) dx = \left[f(x) g(x) \right]_a^{\beta} - \int_a^{\beta} f'(x) g(x) dx.$$

(μονάδες 5)

Θεωρούμε τον παρακάτω ισχυρισμό:

- «Αν f συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ για την οποία ισχύει ότι $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = 0$ τότε κατά ανάγκη θα είναι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ».

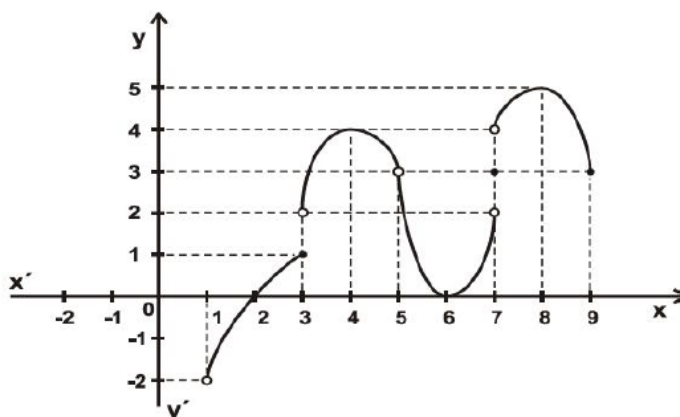
1) Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

2) Γράψτε παράδειγμα σχετικό με την απάντησή σας στο ερώτημα (1).

(μονάδες 4)

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



B1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 2)

B2. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

- α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$
 δ) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)

B3. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

- α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ β) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 9)

B4. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 3)

B5. Να βρείτε τα σημεία x_0 του πεδίου ορισμού της f για τα οποία ισχύει $f'(x_0) = 0$.

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 4)