

Θέμα 1

α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας **Σωστό ή Λάθος**.

1) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση $g(x) = 2^{-x} - f(3+x)$ είναι 1-1.

2) Αν η f είναι 1-1 τότε είναι γνησίως μονότονη.

4 μονάδες

β) Για κάθε μια από τις παραπάνω προτάσεις : αν είναι σωστή να την αποδείξετε, ενώ αν είναι λάθος να βρείτε μια συνάρτηση “αντιπαράδειγμα”.

6 μονάδες

Θέμα 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-x+5} - \sqrt{x-4}$ και $g(x) = (x+2)^2 + 3$.

α) Να εξετάσετε αν η g είναι 1-1.

5 μονάδες

β) Να μελετήσετε την g ως προς τα ακρότατα.

10 μονάδες

γ) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.

10 μονάδες

δ) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

15 μονάδες

Θέμα 3

A) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-2x+1} - x^3 + 2$.

Να λύσετε την ανίσωση $f(x^{21} + 5x) < f(2x - 4)$.

15 μονάδες

B) Δίνεται $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(g \circ g)(x) + g^3(x) = 2x + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται.

10 μονάδες

Γ) Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = \begin{cases} 2e^x + 3, & x < 1 \\ \sqrt{x}, & x \geq 1 \end{cases}$

i) Να μελετήσετε την h ως προς τη μονοτονία.

10 μονάδες

ii) Ένας συμμαθητής σας ισχυρίζεται ότι η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Συμφωνείτε ή διαφωνείτε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

5 μονάδες

Θέμα 4

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(0) = 0$.

2 μονάδες

β) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

2 μονάδες

γ) Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0,

να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

6 μονάδες

Θέμα 1 (50 μ)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 2}$ και $g(x) = \sqrt{1 - 2x}$

- α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.
- β) Να βρείτε την f^{-1} .
- γ) Να βρείτε την $g \circ f$.
- δ) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.
- ε) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να σχεδιάσετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση για την συνάρτηση g .

Θέμα 2 (40 μ)

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{-x+5} - \sqrt{x-4}$ και $g(x) = (x+2)^2 + 3$.

- α) Εξετάστε αν η g είναι 1-1.
- β) Μελετήστε την g ως προς τα ακρότατα.
- γ) Να βρείτε την $f \circ g$.
- δ) Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

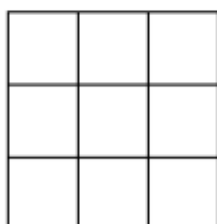
Θέμα 3 (10 μ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-2x+1} - x^3 + 2$.

Να λύσετε την ανίσωση $f(x^{21} + 5x) < f(2x - 4)$.

Θέμα (5 μ bonus)

4) Να τοποθετήσετε μέσα στα 9 τετράγωνα τους αριθμούς 1,2,3,4,5,6,7,8,9 ώστε οριζόντια, κάθετα και διαγώνια να έχουν άθροισμα 15.



2^ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

- A1.** Πότε δυο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες; (4 μ)
- A2.** Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1; (4 μ)
- A3.** Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης; (3 μ)
- A4.** Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών της f ; (4 μ)
- A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις γράφοντας **Σωστό ή Λάθος**.
- α) Για κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 .
- β) Η συνάρτηση $f(x) = |x+2|$ είναι 1-1.
- γ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε και η συνάρτηση $g(x) = e^x - f(2-x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- δ) Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση f έχει σημείο τομής με τον άξονα $x'x$.
- ε) Αν f 1-1 τότε f γνησίως μονότονη. (10 μ)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2\ln x + 1$, $x > 0$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. (5 μ)
- B2.** Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} . (5 μ)
- B3.** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 1 - \ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$. (5 μ)
- B4.** Δίνεται συνάρτηση $h(x) = e^{1-x} + f(x)$. Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται. (5 μ)
- B5.** Να λύσετε την εξίσωση $h^{-1}(e^{x-5} + x - 4) = 1$ (5 μ)

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. (5 μ)

Γ2. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx' και για ποιες είναι πάνω από τον xx' . (5 μ)

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$ (5 μ)

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f)(\ln x) = 8$ (5 μ)

Γ5. Δίνεται συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ g)(x) = x^3 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται. (5 μ)

Θέμα Δ

Δ1. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (5 μ)

Δ2. Αν f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,
να δείξετε ότι η $h = f - g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (5 μ)

Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = x + 3$ και $g(x) = e^{-2x+1} - e + 3$.

Δ3. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

Δ4. Να βρείτε την g^{-1} . (5 μ)

Δ5. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - g(x) = 0$. (5 μ)

Καλή επιτυχία !!!

ΤΕΣΤ 1

Θέμα Α

- A1. Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται γνησίως αύξουσα στο διάστημα Δ ; (8 μ)
- A2. Πότε μια συνάρτηση f ονομάζεται 1-1 ; (7 μ)
- A3. Σωστό ή Λάθος ;
- α) Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι και γνησίως μονότονη .
- β) Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε έχει το πολύ μια ρίζα .
- γ) Αν η f έχει δυο ρίζες τότε είναι 1-1 .
- δ) Αν $f(2) = f(5)$ τότε η f είναι 1-1 .
- ε) Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ ένα σημείο τομής με τον άξονα $x'x$. (10 μ)

Θέμα Β

Δίνεται η $f(x) = e^x + x - 1$

- B1. Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία . (10 μ)
- B2. Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$. (5 μ)
- B3. Να λύσετε την ανίσωση $e^x + x < e + 1$. (5 μ)
- B4. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x + x + 1) > 1 + e^2$. (5 μ)

Θέμα Γ

Γ1. Έστω $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = \sqrt{-x}$

Βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$. (10 μ)

Γ2. Έστω $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ και $g(x) = \frac{2x-1}{x^3 + 3x - 4}$

Να βρείτε τη συνάρτηση $f + g$. (15 μ)

Θέμα Δ

Δ1. Δίνεται η $f(x) = \frac{2e^x - 1}{e^x + 1}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . (5 μ)
- β) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 . (5 μ)
- γ) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον $x'x$. (5 μ)
- δ) Να βρείτε την αντίστροφη της f . (5 μ)
- Δ2. Έστω g γνησίως φθίνουσα συνάρτηση με $g(3) = 3$ και $h(x) = x$.
- Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών παραστάσεων των g και h . (5 μ)

① $f(x) = \ln(x-2)$ $g(x) = \sqrt{-x}$
 Να βρείτε : α) $g \circ f$ β) $f \circ f$

② Να λύσετε την εξίσωση $\ln x = \frac{1}{x} - 1$

③ Έστω $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια γν. μονότονη συνάρτηση και η C_g διέρχεται από τα $A(1, -2)$, $B(2, -3)$.
 Δίνεται επίσης η $f(x) = \ln x - g(x)$, $x > 0$

- α) Να δ. ότι η g είναι γν. φθίνουσα
 β) Να δ. ότι η f είναι γν. αύξουσα
 γ) Να λύσετε την ανίσωση $2 \ln x < 2 + g(x^2)$

④ Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ γν. αύξουσα με $f(e^x - x) + f(1 - x) = e^x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να λύσετε :
 α) την εξίσωση $f(x) = 0$ β) την ανίσωση $f(x^2 - 1) < 0$

⑤ Αν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ παρουσιάζει ελάχιστο μόνο στο 1 το 5 και ισχύει $f(x) + f(\ln b) = 10$, να βρείτε τα α, β .

⑥ Να ελέγξετε αν είναι 1-1 οι συνάρτησεις :

α) $f(x) = \ln \frac{e^x}{1 - e^x}$

β) $f(x) = (e^x - 1) \ln(x + 5)$

7) Έστω $f(x) = e^{-x} - x - 1$

- α) Να δ. ότι η f είναι 1-1
 β) Να λύσετε την εξίσωση $e^{-x} = x + 1$
 γ) Αν $e^{-\lambda} - e^{-\mu} = \lambda - \mu$ να δ. ότι $\lambda = \mu$
 δ) Να λύσετε την εξίσωση $e^{-2x+1} - e^{-x} = x - 1$

8) Δίνεται η $f(x) = 2 + \sqrt{e^x - 1}$

- α) Να δ. ότι η f είναι 1-1
 β) Να βρείτε την f^{-1}

9) Δίνεται η $f(x) = e^{1-x} - 3x + 2$

- α) Να δ. ότι η f αντιστρέφεται
 β) Αν θεωρήσουμε ότι $f(D_f) = \mathbb{R}$ να λύσετε :
 β1) $f^{-1}(x) = 0$ β2) $f^{-1}(\ln x) < 1$
 β3) $f^{-1}(x) = x + 1$ β4) $f^{-1}(x) \leq x + 1$

10) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(f(x)) = 2x + 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να δ. ότι :

- α) η f αντιστρέφεται και $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$
 β) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}f(x) + 2$, $x \in \mathbb{R}$

Θέμα 1

A) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

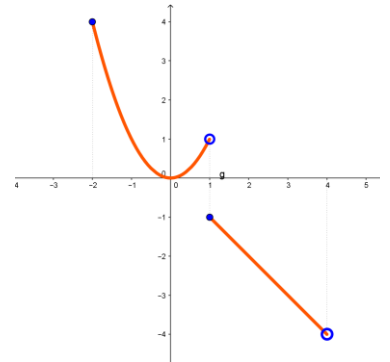
A1) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ; (10 μ)

A2) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ; (10 μ)

A3) Πόσες είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = \frac{3}{2}$; (10 μ)

B) Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 3} \quad \text{και} \quad g(x) = (x+1)^2 - x^2 - x - 1 \quad (20 \mu)$$

**Θέμα 2**

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = f(x) - g(x)$. (10 μ)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f$. (40 μ)

Όρια στο x_0

1) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x}-x}{2x-16}$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-2x}{x^2+x-6}$

3) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x^3+x-10}$

4) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{9-x^2}$

5) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+3} + \sqrt{x+2} - 5}{x^2+3x-10}$

6) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-1| + |x^2-5| - 2}{2x-4}$

7) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x-2|}{x^2-4}$

8) Έστω ότι $xf(x) \leq x^3 - 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αν γνωρίζετε ότι το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ υπάρχει, να το υπολογίσετε.

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{x+4}-2}$

10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x}$

11) Αν $2\sqrt{x+2} \leq f(x) \leq x+3$, $x \geq -2$, να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)-2}{x+1}$

γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2f^2(x)-8}{x^2+3x+2}$

12) $\lim_{x \rightarrow -2} \left[(x+2) \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{1}{\sqrt{x+2}} \right]$

13) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{n\mu x^{2026}}{x} \cdot n\mu \frac{1}{x} \right)$

14) $f(x) = \begin{cases} (\alpha^2 + \beta^2)x^3 + 13, & x \leq 1 \\ -4\alpha x^2 + 6\beta x, & x > 1 \end{cases}$

Αν το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ υπάρχει, να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

3^ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

A1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A; (Μονάδες 2)

β) i. Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη; (Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του (i), πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f; (Μονάδες 3)

Μονάδες 6

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 2

A3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Αν f και g είναι δυο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε οι $g \circ f$ και $f \circ g$ δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

2) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.

3) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

4) Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.

5) Ισχύει $|\eta \mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

6) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει ότι $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.

7) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B, αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

Μονάδες 14

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ και $h(x) = \ln x$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f με $f = g \circ h$.

Μονάδες 6

B2. Αν $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1} = f$ (όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f).

Μονάδες 8

B3. Υπολογίστε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \eta \mu(3x - 3) \cdot f(x)$

Μονάδες 5

B4. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) + e^{2-x} - 4 = 0$

Μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x \in [-2, 1] \\ (\beta + 1)x + 4\alpha, & x \in (1, 2] \end{cases}$

Γ1. Αν $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$,

να υπολογίσετε τα α, β .

Μονάδες 6

Αν $\alpha = -1$ και $\beta = 2$ τότε :

Γ2. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + x}{\sqrt{-x} - 1}$

Μονάδες 5

Γ3. Εξετάστε αν η f είναι 1-1.

Μονάδες 3

Γ4. Αν $|x^2 g(x) - \eta \mu^2 x| \leq 2x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot g(x) - \eta \mu 4x}{x + \eta \mu x}$

Μονάδες 8

Γ5. Να δείξετε ότι $f(x) > g(x)$ κοντά στο 0.

Μονάδες 3

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$(f(x))^3 + e^{f(x)} - 1 = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε την αντίστροφη της f .

Μονάδες 5

Δ3. Αν $f^{-1}(x) = x^3 + e^x - 1$ και $g(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x - 1} + \alpha x + \beta, & x > 1 \\ 2\alpha x - \beta + f(0), & x \leq 1 \end{cases}$

τότε :

i) να βρείτε το πρόσημο της f^{-1} για τις διάφορες τιμές του x .

Μονάδες 5

ii) να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - e^x}{\eta \mu(x - 1)}$

Μονάδες 5

iii) να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε να ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{7}{2}$

Μονάδες 5

Θέμα 1

Υπολογίστε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9}$

β) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{6 - 2x}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{n\mu(4-x)}{2x-8}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x - 6}{2x^2 - 8}$

(40 μονάδες)

Θέμα 2Δίνεται συνάρτηση $f: (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$x^4 + n\mu 3x \leq x \cdot f(x) \leq x^2 + n\mu 3x \quad \text{για κάθε } x \in (0,1)$$

Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

(15 μονάδες)

Θέμα 3Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{4x+3}$ και $g(x) = \ln x^2$

α) Να βρείτε την $g \circ f$

(15 μονάδες)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - n\mu^2 x - 6}{x}$

(15 μονάδες)

Θέμα 4

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & , \quad x > 2 \\ \alpha x + \beta & , \quad 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x^2 - x}{x - 1} & , \quad x < 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τα α, β ώστε να υπάρχουν τα όρια :

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

(15 μονάδες)

Θέμα 1 (10 μονάδες)

Να αντιστοιχήσετε :

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+x-6}{x^2-2x}$	1) $+\infty$
β) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{5}{(x-2)^3}$	2) $-\infty$
γ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-4}{(x-2)^3}$	3) $\frac{5}{2}$
δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{4x^2 + 1})$	4) 2
ε) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2-x)(4-2x)}{(x-2)^2}$	5) δεν υπάρχει το όριο

Θέμα 2 (10 μονάδες)

Να αντιστοιχήσετε :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{3} n\mu \frac{3}{x}$	1) 3
β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot n\mu \frac{3}{x}$	2) $-\infty$
γ) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{n\mu(3-x)}{3x-9}$	3) $+\infty$
δ) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{3}} \frac{9x^2-1}{(3x-1)^3}$	4) 0
ε) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{3n\mu x+1}{n\mu x-1}$	5) $-\frac{1}{3}$

Θέμα 3 (50 μονάδες)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^2 - e^x}{e^x}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 .

β) Να βρείτε την f^{-1} .

γ) Αν $g(x) = \sqrt{-x}$, να βρείτε την $g \circ f$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{e^2 - e^{x^{21}}}{e^{x^{21}}} = \frac{e^2 - e^{2-x}}{e^{2-x}}$

ε) Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = e^2 - 1$

Θέμα 4 (30 μονάδες)

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $g(x) = f(1-x) - f(x^3 - 9)$ τότε :

α) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το διάστημα των τιμών του x , στο οποίο η C_g είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ) Να δείξετε ότι $g\left(\frac{3}{2}\right) \cdot g\left(\frac{5}{2}\right) < g(2)$

4^ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

1^ο Θέμα

A1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες ;

Μονάδες 4

A3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 4

A4. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται $1 - 1$;

Μονάδες 3

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 ,

$$\text{τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0

γ) Υπάρχουν συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει :

$$f(x) < g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

δ) Υπάρχει 1-1 συνάρτηση που δεν είναι γνησίως μονότονη.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{[f(x)]^2} = +\infty$

Μονάδες 10

2^ο Θέμα

Δίνονται οι συναρτήσεις $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

και $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

B1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \frac{g}{h}$ και $r = g \cdot h$.

Μονάδες 5

B2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2}{h(x)}$

Μονάδες 5

Για τα παρακάτω ερώτημα να θεωρήσετε ότι $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$ και $r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1$

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι $f^{-1} = f$ (μονάδες 5), όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f .

Μονάδες 7

B4. Να λύσετε την εξίσωση $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$.

Μονάδες 5

B5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} [\eta\mu(2x - 2) \cdot f(x)]$

Μονάδες 3

3^ο Θέμα

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = 2x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε το $f(2)$.

Μονάδες 3

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(4 - f(x^2 + x)) - 2 = 0$.

Μονάδες 3

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται ότι $f(x) = 2x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ4. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^3}$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{f(x)}$

Μονάδες 9

Γ5. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 1 - x^5$

Μονάδες 5

4^ο Θέμα

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Δ1. Να βρείτε :

i) το πεδίο ορισμού της f

Μονάδες 2

ii) το σύνολο τιμών της f

Μονάδες 2

Δ2. Να βρείτε :

i) το πλήθος των ριζών της f

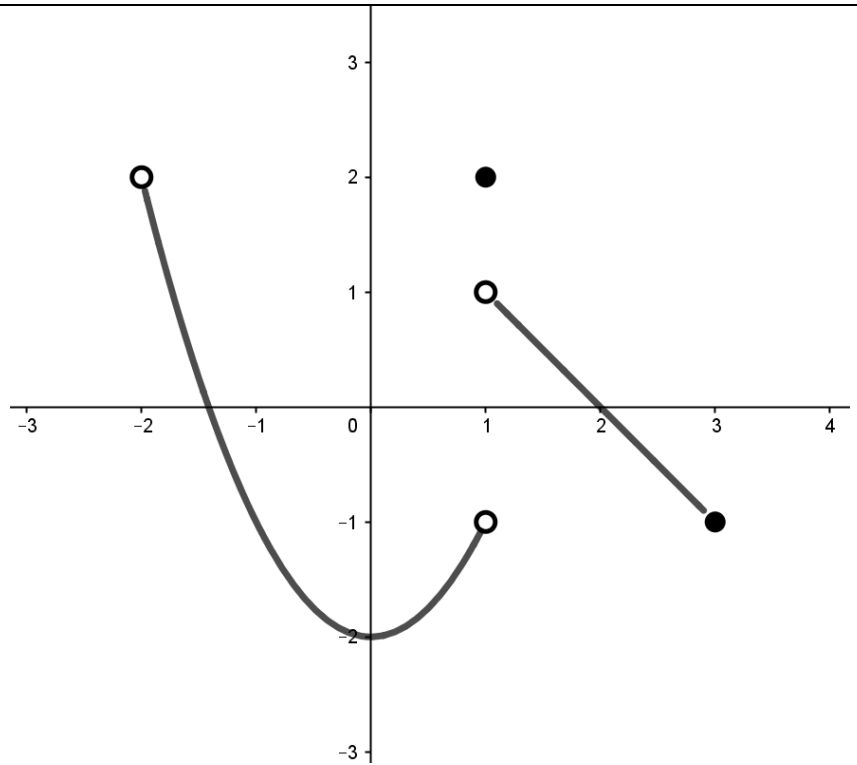
Μονάδες 2

ii) τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Μονάδες 4



Για τα επόμενα ερωτήματα δίνονται οι $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \in (-2, 1) \\ 2, & x = 1 \\ -x + 2, & x \in (1, 3] \end{cases}$

και $g(x) = (x - 1)^2 + 2$

Δ3. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$

Μονάδες 5

Δ5. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{g(x)}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n\mu x}{2 + f(x)}$

Μονάδες 6

Καλή επιτυχία !!!

Άσκηση 1

Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^3(x) + e^{f(x)} = e^{x+2} + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ρίζα.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - 1 + \ln x$

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x + x^{21}) = 0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $\ln(x^2 + x + 1) + x^2 < \ln(x + 2) + 1$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \varepsilon\varphi x$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να αποδείξετε ότι $e^{\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{3}} < \sqrt{3}$

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4 \cdot e^{x+3} + 2$

α) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να βρείτε την f^{-1}

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(f^{-1}(x) + x) = 4e^6 + 2$

Άσκηση 5

Να αποδείξετε ότι :

α) Αν f γνησίως αύξουσα τότε f^{-1} γνησίως αύξουσα.

β) Αν f γνησίως αύξουσα και M κοινό σημείο των C_f και $C_{f^{-1}}$ τότε το M ανήκει στην $y = x$

Άσκηση 6

Αν $f(x) = -x^3$ να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και f^{-1} έχουν κοινά σημεία τα οποία δεν ανήκουν στην ευθεία $y = x$

5° Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

1° Θέμα

- A1.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano. **Μονάδες 2**
- A2.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της ; **Μονάδες 2**
- A3.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$; **Μονάδες 2**
- A4.** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. **Μονάδες 9**
- A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α) Κάθε συνάρτηση που ορίζεται σε κλειστό διάστημα έχει μέγιστη τιμή.
- β) Αν η $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει ελάχιστη τιμή το $f(\alpha)$ τότε είναι γνησίως αύξουσα.
- γ) Αν η $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής τότε παρουσιάζει μέγιστο στο α .
- δ) Υπάρχει συνάρτηση που είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, δεν μηδενίζει και δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο.
- ε) Αν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν μηδενίζει και δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε δεν είναι συνεχής.

Μονάδες 10

2° Θέμα

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = e^x$$

- B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. **Μονάδες 4**
- B2.** Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$, $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι '1-1' και να βρείτε την αντίστροφή της. **Μονάδες 7**
- B3.** Αν $\phi(x) = (f \circ g)^{-1} = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, με $x > 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση ϕ ως προς τη μονotonία. **Μονάδες 5**
- B4.** Αν ϕ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να βρεθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1^+} \phi(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x)$ **Μονάδες 6**
- B5.** Αν ϕ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $\phi(x) = e^\alpha$ έχει ακριβώς μια ρίζα. **Μονάδες 3**

3^ο Θέμα

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο $[0,\pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε: $(g \circ f)(x) = |\sin x|$, για κάθε $x \in [0,\pi]$.

Γ1.

i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta\mu x|$. **Μονάδες 3**

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. **Μονάδες 3**

Γ2. Να βρείτε την συνάρτηση f . **Μονάδες 4**

Γ3. Δίνεται η συνάρτηση $h: (0,\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x)-x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ **Μονάδες 3**

Γ4. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $k(x) = (x-1) \cdot f(x) + g(x) - \frac{1}{4}$ έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$. **Μονάδες 8**

Γ5. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $m: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $m\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ για την οποία ισχύει :

$x^2 + m^2(x) = 1$. Να βρείτε τη συνάρτηση m . Ποια η σχέση της με την g ; **Μονάδες 4**

4^ο Θέμα

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και γνησίως αύξουσα με $f(0) = 1$ και $f(1) = 2 + \sqrt{5}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x + f(x) = e^{-x} + 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$. **Μονάδες 7**

Δ2. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+1} + \mu x)$ **Μονάδες 5**

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2+1} + 2x$

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . **Μονάδες 4**

Δ4. Δίνεται η $h(x) = -x^4$. Εξετάστε αν έχουν κοινά σημεία οι C_f και C_h . **Μονάδες 3**

Δ5. Για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το όριο :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\alpha x^2 + \beta x + 1}$ **Μονάδες 6**

Καλή επιτυχία !!!

Θέμα 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$.

- Γ1. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)
Γ2. Μελετήστε την f ως προς τα ακρότατα. (5 μ)
Γ3. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία. (4 μ)
Γ4. Μελετήστε την g ως προς τα ακρότατα. (3 μ)
Γ5. Να βρείτε τις $f \circ g$ και $g \circ f$. (8 μ)

Θέμα 2

Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

- Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. (5 μ)
Γ2. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx' και για ποιες είναι πάνω από τον xx' . (5 μ)
Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$ (5 μ)
Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f)(\ln x) = 8$ (5 μ)
Γ5. Δίνεται συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ g)(x) = x^3 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται. (5 μ)

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$

- Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. (5 μ)
Δ2. Να βρείτε την f^{-1} . (5 μ)
Δ3. Αν $g(x) = 1 + \frac{1}{e^x + 1}$ να δείξετε ότι $f = g$. (5 μ)
Δ4. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)
Δ5. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) - x^3 < \frac{3}{2}$ (5 μ)

1^ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά**Θέμα Α**

A1. Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ; (5μ)

A2. Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 (ολικό) μέγιστο; (5μ)

A3. Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται 1-1 ; (5μ)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας τη λέξη

Σωστό ή Λάθος .

1) Ο κύκλος είναι γραφική παράσταση συνάρτησης .

2) Η $f(x) = x^2 + 2$ είναι 1-1 .

3) Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = x$ είναι ίσες .

4) Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$,

τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

5) Η συνάρτηση $f(x) = \ln(-x)$ είναι γνησίως αύξουσα. (10 μ)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + \lambda$ και το $A(0,3)$ που είναι ένα σημείο της γραφικής της παράστασης .

B1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$. (3μ)

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα . (6μ)

B3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της . (6μ)

B4. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x - 21) < 3$ (6μ)

B5. Εξετάστε αν η ευθεία $y = 1$ τέμνει την C_f . (4μ)

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$.

- Γ1. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)
Γ2. Μελετήστε την f ως προς τα ακρότατα. (5 μ)
Γ3. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία. (4 μ)
Γ4. Μελετήστε την g ως προς τα ακρότατα. (3 μ)
Γ5. Να βρείτε τις $f \circ g$ και $g \circ f$. (8 μ)

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$

- Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. (5 μ)
Δ2. Να βρείτε την f^{-1} . (5 μ)
Δ3. Αν $g(x) = 1 + \frac{1}{e^x + 1}$ να δείξετε ότι $f = g$. (5 μ)
Δ4. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)
Δ5. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) - x^3 < \frac{3}{2}$ (5 μ)

Καλή επιτυχία !!!

2^ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

- A1.** Πότε δυο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες ; (4 μ)
- A2.** Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1 ; (4 μ)
- A3.** Τι ονομάζουμε γραφική παράσταση συνάρτησης ; (3 μ)
- A4.** Τι ονομάζουμε σύνολο τιμών της f ; (4 μ)
- A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις γράφοντας **Σωστό ή Λάθος** .
- α) Για κάθε συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, όταν υπάρχει το όριο της f καθώς το x τείνει στο $x_0 \in A$, τότε αυτό το όριο ισούται με την τιμή της f στο x_0 .
- β) Η συνάρτηση $f(x) = |x+2|$ είναι 1-1 .
- γ) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε και η συνάρτηση $g(x) = e^x - f(2-x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- δ) Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση f έχει σημείο τομής με τον άξονα $x'x$.
- ε) Αν f 1-1 τότε f γνησίως μονότονη . (10 μ)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2\ln x + 1$, $x > 0$.

- B1.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. (5 μ)
- B2.** Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} . (5 μ)
- B3.** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 1 - \ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$. (5 μ)
- B4.** Δίνεται συνάρτηση $h(x) = e^{1-x} + f(x)$. Να δείξετε ότι η h αντιστρέφεται . (5 μ)
- B5.** Να λύσετε την εξίσωση $h^{-1}(e^{x-5} + x - 4) = 1$ (5 μ)

Θέμα Γ

Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. (5 μ)

Γ2. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx' και για ποιες είναι πάνω από τον xx' . (5 μ)

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$ (5 μ)

Γ4. Να λύσετε την εξίσωση $(f \circ f)(\ln x) = 8$ (5 μ)

Γ5. Δίνεται συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ g)(x) = x^3 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η g αντιστρέφεται. (5 μ)

Θέμα Δ

Δ1. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (5 μ)

Δ2. Αν f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$,
να δείξετε ότι η $h = f - g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (5 μ)

Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = x + 3$ και $g(x) = e^{-2x+1} - e + 3$.

Δ3. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

Δ4. Να βρείτε την g^{-1} . (5 μ)

Δ5. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - g(x) = 0$. (5 μ)

Καλή επιτυχία !!!

3^ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

A1. Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$.

α) Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ; (Μονάδες 2)

β) i. Πότε μια συνάρτηση $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη; (Μονάδα 1)

ii. Αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του (i), πώς ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση της f ; (Μονάδες 3)

Μονάδες 6

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 2

A3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 3

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

1) Αν f και g είναι δυο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$, τότε οι $g \circ f$ και $f \circ g$ δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

2) Ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - 1}{x} = 1$.

3) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

4) Αν f, g είναι δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B αντίστοιχα, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\frac{f}{g}$ είναι το $A \cap B$.

5) Ισχύει $|\eta \mu x| < |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$.

6) Για οποιαδήποτε αντιστρέψιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A ισχύει ότι $f(f^{-1}(x)) = x$, για κάθε $x \in A$.

7) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A και B , αντίστοιχα, τότε η $g \circ f$ ορίζεται, αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

Μονάδες 14

Θέμα Β

Δίνονται οι συναρτήσεις $g, h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπους $g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$ και $h(x) = \ln x$.

B1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f με $f = g \circ h$.

Μονάδες 6

B2. Αν $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$, $x > 1$ να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι $f^{-1} = f$ (όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f).

Μονάδες 8

B3. Υπολογίστε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \eta \mu(3x - 3) \cdot f(x)$

Μονάδες 5

B4. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) + e^{2-x} - 4 = 0$

Μονάδες 6

Θέμα Γ

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta, & x \in [-2, 1] \\ (\beta + 1)x + 4\alpha, & x \in (1, 2] \end{cases}$

Γ1. Αν $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$,

να υπολογίσετε τα α, β .

Μονάδες 6

Αν $\alpha = -1$ και $\beta = 2$ τότε :

Γ2. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + x}{\sqrt{-x} - 1}$

Μονάδες 5

Γ3. Εξετάστε αν η f είναι 1-1.

Μονάδες 3

Γ4. Αν $|x^2 g(x) - \eta \mu^2 x| \leq 2x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot g(x) - \eta \mu 4x}{x + \eta \mu x}$

Μονάδες 8

Γ5. Να δείξετε ότι $f(x) > g(x)$ κοντά στο 0.

Μονάδες 3

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$(f(x))^3 + e^{f(x)} - 1 = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε την αντίστροφη της f .

Μονάδες 5

Δ3. Αν $f^{-1}(x) = x^3 + e^x - 1$ και $g(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x} - 1}{x - 1} + \alpha x + \beta, & x > 1 \\ 2\alpha x - \beta + f(0), & x \leq 1 \end{cases}$

τότε :

i) να βρείτε το πρόσημο της f^{-1} για τις διάφορες τιμές του x .

Μονάδες 5

ii) να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - e^x}{\eta \mu(x - 1)}$

Μονάδες 5

iii) να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε να ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{7}{2}$

Μονάδες 5

4^ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

1^ο Θέμα

A1. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ ολικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

A2. Πότε δύο συναρτήσεις f, g λέγονται ίσες ;

Μονάδες 4

A3. Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ ;

Μονάδες 4

A4. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται $1 - 1$;

Μονάδες 3

A5. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν οι συναρτήσεις f, g έχουν όριο στο x_0 και ισχύει $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0 ,

$$\text{τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ τότε $f(x) < g(x)$ κοντά στο x_0

γ) Υπάρχουν συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει :

$$f(x) < g(x) \text{ κοντά στο } x_0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

δ) Υπάρχει 1-1 συνάρτηση που δεν είναι γνησίως μονότονη.

ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{[f(x)]^2} = +\infty$

Μονάδες 10

2^ο Θέμα

Δίνονται οι συναρτήσεις $g: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$

και $h: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $h(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$

B1. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f = \frac{g}{h}$ και $r = g \cdot h$.

Μονάδες 5

B2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-2}{h(x)}$

Μονάδες 5

Για τα παρακάτω ερώτημα να θεωρήσετε ότι $f(x) = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$ και $r(x) = x - \frac{1}{x}, x \geq 1$

B3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι $f^{-1} = f$ (μονάδες 5), όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της f .

Μονάδες 7

B4. Να λύσετε την εξίσωση $(f^{-1}(f(x)))^2 = 1 + 4r(x)$.

Μονάδες 5

B5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} [\eta\mu(2x - 2) \cdot f(x)]$

Μονάδες 3

3^ο Θέμα

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = 2x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1.

Μονάδες 5

Γ2. Να βρείτε το $f(2)$.

Μονάδες 3

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(4 - f(x^2 + x)) - 2 = 0$.

Μονάδες 3

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται ότι $f(x) = 2x - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Γ4. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{(x-1)^3}$

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{f(x)}$

Μονάδες 9

Γ5. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 1 - x^5$

Μονάδες 5

4^ο Θέμα

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Δ1. Να βρείτε :

i) το πεδίο ορισμού της f

Μονάδες 2

ii) το σύνολο τιμών της f

Μονάδες 2

Δ2. Να βρείτε :

i) το πλήθος των ριζών της f

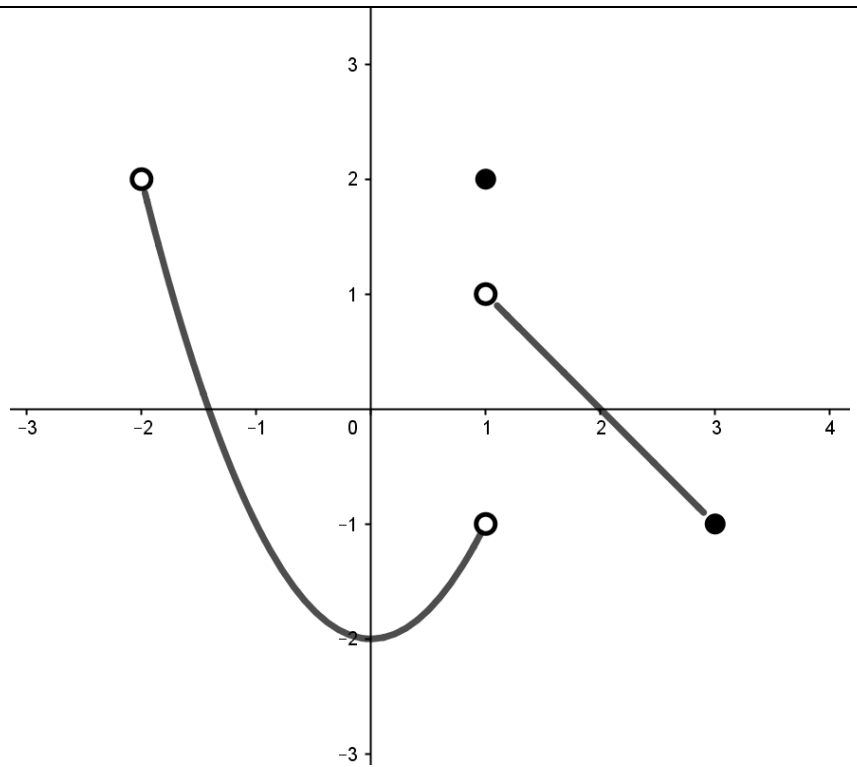
Μονάδες 2

ii) τα όρια:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

Μονάδες 4



Για τα επόμενα ερωτήματα δίνονται οι $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2, & x \in (-2, 1) \\ 2, & x = 1 \\ -x + 2, & x \in (1, 3] \end{cases}$

και $g(x) = (x - 1)^2 + 2$

Δ3. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 4

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$

Μονάδες 5

Δ5. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{g(x)}$

iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{n\mu x}{2 + f(x)}$

Μονάδες 6

Καλή επιτυχία !!!

5° Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

1° Θέμα

- A1.** Να διατυπώσετε το Θεώρημα Bolzano. **Μονάδες 2**
- A2.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής στο x_0 του πεδίου ορισμού της ; **Μονάδες 2**
- A3.** Πότε μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$; **Μονάδες 2**
- A4.** Να διατυπώσετε και να αποδείξετε το Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών. **Μονάδες 9**
- A5.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση και δίπλα στο γράμμα τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.
- α) Κάθε συνάρτηση που ορίζεται σε κλειστό διάστημα έχει μέγιστη τιμή.
- β) Αν η $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ έχει ελάχιστη τιμή το $f(\alpha)$ τότε είναι γνησίως αύξουσα.
- γ) Αν η $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής τότε παρουσιάζει μέγιστο στο α .
- δ) Υπάρχει συνάρτηση που είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της, δεν μηδενίζει και δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο.
- ε) Αν η $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δεν μηδενίζει και δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο, τότε δεν είναι συνεχής.

Μονάδες 10

2° Θέμα

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } f(x) = \frac{x+2}{x-1} \text{ και}$$

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ με τύπο } g(x) = e^x$$

- B1.** Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$. **Μονάδες 4**
- B2.** Αν $(f \circ g)(x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$, $x > 0$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι '1-1' και να βρείτε την αντίστροφή της. **Μονάδες 7**
- B3.** Αν $\phi(x) = (f \circ g)^{-1} = \ln\left(\frac{x+2}{x-1}\right)$, με $x > 1$, να μελετήσετε τη συνάρτηση ϕ ως προς τη μονοτονία. **Μονάδες 5**
- B4.** Αν ϕ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να βρεθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 1^+} \phi(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x)$ **Μονάδες 6**
- B5.** Αν ϕ είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **B3**, να δείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $\phi(x) = e^\alpha$ έχει ακριβώς μια ρίζα. **Μονάδες 3**

3^ο Θέμα

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο $[0,\pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε: $(g \circ f)(x) = |\sin x|$, για κάθε $x \in [0,\pi]$.

Γ1.

i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta\mu x|$. **Μονάδες 3**

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. **Μονάδες 3**

Γ2. Να βρείτε την συνάρτηση f . **Μονάδες 4**

Γ3. Δίνεται η συνάρτηση $h: (0,\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x)-x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ **Μονάδες 3**

Γ4. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $k(x) = (x-1) \cdot f(x) + g(x) - \frac{1}{4}$ έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$. **Μονάδες 8**

Γ5. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $m: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $m\left(\frac{1}{2}\right) < 0$ για την οποία ισχύει :

$x^2 + m^2(x) = 1$. Να βρείτε τη συνάρτηση m . Ποια η σχέση της με την g ; **Μονάδες 4**

4^ο Θέμα

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, συνεχής και γνησίως αύξουσα με $f(0) = 1$ και $f(1) = 2 + \sqrt{5}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x + f(x) = e^{-x} + 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $(0,1)$. **Μονάδες 7**

Δ2. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2+1} + \mu x)$ **Μονάδες 5**

Για τα επόμενα ερωτήματα δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4x^2+1} + 2x$

Δ3. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . **Μονάδες 4**

Δ4. Δίνεται η $h(x) = -x^4$. Εξετάστε αν έχουν κοινά σημεία οι C_f και C_h . **Μονάδες 3**

Δ5. Για τις διάφορες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το όριο :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{\alpha x^2 + \beta x + 1}$ **Μονάδες 6**

Καλή επιτυχία !!!

ΤΕΣΤ

Θέμα 1

A) Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .

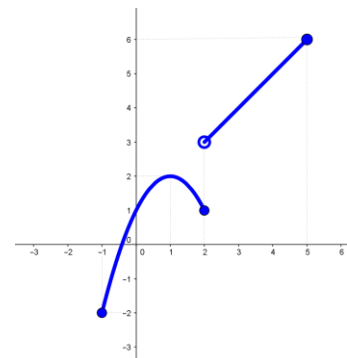
A1) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ; (5 μ)

A2) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ; (5 μ)

A3) Πόσες είναι οι λύσεις της εξίσωσης $f(x) = \frac{3}{2}$; (5 μ)

B) Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις :

$$f(x) = \frac{x^4 + 5x^2}{x^2 + 5} \quad \text{και} \quad g(x) = (x+1)^2 - 2x - 1 \quad (10 \mu)$$



Θέμα 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{x}{x+1}$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x) = f(x) - g(x)$. (5 μ)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f$. (20 μ)

Θέμα 3

Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{\sqrt{x+1} - 1}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x}} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{1 - x^2} \quad (40 \mu)$$

Θέμα 4

$$\text{Δίνεται η } f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta, & x \leq 1 \\ \beta x^2 - \alpha, & x > 1 \end{cases}$$

Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, να βρείτε τα α, β και στη συνέχεια

να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. (10 μ)

Θέματα

Θέμα 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(1-x)$ και $g(x) = e^{2-x}$.

B1. Να βρείτε τη συνάρτηση $f \circ g$ και να δείξετε ότι είναι 1-1. (9 Μ)

B2. Να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση της $f \circ g$. (7 Μ)

B3. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της $(f \circ g)^{-1}$ έχει σημείο τομής με τον $x'x$. (3 Μ)

B4. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{f(x)}}{\sqrt{3x+1} - 2}$ (3 Μ)

B5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x f^2(x)}$ (3 Μ)

Θέμα 2

B1. Έστω $f(x) = \ln(1-x)$ και $g(x) = \sqrt{x}$.

α) Βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g . (2 μονάδες)

β) Βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων $f \circ g$ και $g \circ f$. (4 μονάδες)

γ) Βρείτε τους τύπους των $f \circ g$ και $g \circ f$. (2 μονάδες)

B2. Έστω $f(x) = x^3 + x + 1$.

α) Δείξτε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (4 μονάδες)

β) Λύστε την ανίσωση : $f(2x^4 + x^2) > f(x^3 + 2x^2)$ (4 μονάδες)

B3. Έστω $f(x) = e^{2x+1} - 3$.

α) Δείξτε ότι η f αντιστρέφεται. (4 μονάδες)

β) Λύστε την εξίσωση : $f\left(\frac{1}{2}\eta\mu 2x\right) = f(1-\eta\mu^2 x)$ (5 μονάδες)

Θέμα 3

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$f(x) - f(y) = f\left(\frac{x}{y}\right) \quad \text{για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

Δίνεται επίσης ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα.

Γ1. Να υπολογίσετε το $f(1)$. (4 μονάδες)

Γ2. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. (7 μονάδες)

Γ3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x^2 - 2) + f(x) = f(5x - 6)$. (7 μονάδες)

Γ4. Αν $f(x) < 0$ για κάθε $x > 1$,
να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (7 μονάδες)

Θέμα 4

Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα σ' όλο το $\mathbb{R}$

και η συνάρτηση $h(x) = f(-2x + 1) - f(e^x)$.

α) Να δείξετε ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα. (7 μονάδες)

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(-2\ln x + 1) - f(x) = f(-1) - f(e)$. (7 μονάδες)

γ) Να δείξετε ότι $h(x) < 0$ για κάθε $x > 0$. (5 μονάδες)

δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και h
έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο. (6 μονάδες)

Θέμα 5

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$f(\ln x) = \frac{1}{x} - \ln x - 1 \quad \text{για κάθε } x > 0.$$

B1. Να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x} - x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (5 μονάδες)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (6 μονάδες)

B3. Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο. (9 μονάδες)

B4. Να λύσετε την εξίσωση $(x^2 + 1)e^{x^2} = 1$. (5 μονάδες)

Θέμα 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = \ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$. (6 μονάδες)

β) Να μελετήσετε την $f \circ g$ ως προς τη μονοτονία. (5 μονάδες)

γ) Να βρεθεί (στην περίπτωση που υπάρχει) η $(f \circ g)^{-1}$. (4 μονάδες)

δ) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της $(f \circ g)^{-1}$; (4 μονάδες)

ε) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - 2}{x^2 + x - 6}$ (6 μονάδες)

Θέμα 7

Δίνονται συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με

$$(f \circ f)(x) = x + f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

B1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. 6μ

B2. Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων. 5μ

B3. Αν $f(g(e^x) - 2x + 3) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να δείξετε ότι

η συνάρτηση g έχει τύπο $g(x) = 2 \ln x - 3$. 7μ

B4. Έστω συνάρτηση h γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ με $h(-1) = 0$.

Να λύσετε την εξίσωση : $(h \circ g)(x) = 0$ 7μ

Θέμα 8

Γ1. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2-x) + f(x+4) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα σ' όλο το $\mathbb{R}$ τότε :

α) να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$. 7μ

β) να λύσετε την ανίσωση $f(x^2 - 5) > 0$. 8μ

Γ2. Αν $f(x) = e^{3-x} - 1$ και $g(x) = \ln x$

να βρείτε τις $f \circ g$ και $g \circ f$. 10 μ

① $|x^2 f(x) - \eta \mu^3 x| \leq 6x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε : α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(x) - x^2 \eta \mu^3 x}{x^3 + 2x^2 \eta \mu x}$

② Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - 4}{\sqrt{f(x)} + 2} = 1$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

③ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + 3f(4-x)) = 84$

και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = l \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το l .

④ Να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2016}{x} - \frac{2017}{\sqrt{x}} \right)$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta \mu^3 x}$

⑤ $f(x) = \frac{\alpha x^2 + (\beta - 1)x + 4}{x^2 - 4x + 4}$ και το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός .

Να βρείτε τα α, β .

⑥ Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \eta \mu^2 x}{\sqrt{x+4} - 2} = -\infty$ να βρείτε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2017 + f(x)}{f(x)}$

$$(7) \quad f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall \epsilon \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x f(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1$$

Να βρείτε :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 f(x) - x^2 + 1}{x f(x) + 3}$$

$$(8) \quad f(x) = \ln(x - \eta \psi x)$$

α) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty}$

β) Να βρείτε τα όρια :

$$\beta_1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\beta_2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \psi x}{f(x)}$$

$$\beta_3) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \eta \psi \frac{1}{f(x)}$$

$$(9) \quad \text{Αν} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x + 2) = 0 \quad \text{να υπολογίσετε τα όρια :}$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 3x]$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x f(x) + x^2 + 1}{x f(x) - 3x^2 + 2}$$

$$(10) \quad f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \forall \epsilon \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \text{Να βρείτε :}$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|f^3(x) - f(x) - 2| + 3}{f^2(x) + |f(x) + 5|}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \eta \psi \frac{1}{f(x)} + \frac{f(x)}{\eta \psi \frac{1}{f(x)}} \right)$$

1. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{\sqrt{x+1} - 1} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x}} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{1 - x^2} \quad (80 \mu)$$

$$2. \text{ Δίνεται η } f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & , x \leq 1 \\ \beta x^2 - \alpha & , x > 1 \end{cases}$$

Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, να βρείτε τα α, β και στη συνέχεια να εξετάσετε αν

υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$. (20 μ)

① Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sin x$ και $g(x) = x-2$.
Να δείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν ακριβώς ένα κοινό
σημείο $M(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (0, 2)$.

② Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = x^{21} - 2x$
έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

③ Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^{21} - 6x^4 + 3 = 0$
έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

④ Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής και γν. φθίνουσα συνάρτηση.
Να δ. ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (2\alpha, 5\alpha)$, $\alpha > 0$
τέτοιο ώστε: $f(2\alpha) + f(5\alpha) = 2f(x_0)$

⑤ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{2x^{21}}{x^2-1} = \frac{e^x}{f(x)}$
έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(-1, 1)$.

⑥ Αν f συνεχής και γν. αύξουσα στο $[a, b]$
να δ. ότι υπάρχει μοναδικό $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{12f(a) + 9f(b)}{21}$$

⑦ Αν f συνεχής στο $[a, b]$ να δ. ότι υπάρχει
τουλάχιστον ένα $\xi \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$f(\xi) = \frac{10f(a) + 5f(b) + 6f(\frac{a+b}{2})}{21}$$

8) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x + 2e^x - 42$

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\ln x + e^x = 21$

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $(f(x)-2016)(f(x)-2017)=0$ έχει ακριβώς δύο ρίζες.

9) Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(21)=6$, για την οποία ισχύει $(f(x)-6)(f(x)-7)=0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε την f .

10) Αν $x f(x) + 2 = f(x) + \sqrt{x^2 + 3}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$, να βρείτε τον νόμο της f .

11) Δίνεται συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $x + \ln x \leq x f(x) \leq 2x^2 + x + \ln x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε το $f(0)$.

12) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{x+1} + \alpha x - 2, & x \leq -1 \\ 2x^2 - \beta, & -1 < x < 0 \\ \ln x - 7 \ln x + 2 \ln(x+1), & x \geq 0 \end{cases}$

Να βρείτε τα α, β ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

13) $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1 + f(0)$

α) Να βρείτε το $f(0)$

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + f^2(x)}{x + \ln x}$

Θέμα Α

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη

ΣΩΣΤΟ ή **ΛΑΘΟΣ**.

1) Αν $f(\alpha)f(\beta) > 0$ και f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε : $f(x_0) = 0$.

2) Όταν μια συνάρτηση είναι 1-1 στο A τότε είναι γνησίως μονότονη στο A .

3) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu 2x}{x} + \frac{\eta\mu 3x}{x} \right) = 3$

4) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

5) Για κάθε συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 0$ (10 μ)

Θέμα Β

B1. Να υπολογίσετε τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} \right)$ (10 μ)

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{9x^2 - x + 1})$ (10 μ)

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-3} = 3-x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2,3)$. (15 μ)

Θέμα Γ

Γ1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x-2) = 4 - 3e^x$ έχει ακριβώς μία λύση. (15 μ)

Γ2. Αν $10x + 11\eta\mu x \leq x f(x) \leq 3x^4 + 10x + 11\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να βρείτε το $f(0)$. (15 μ)

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^3(x) + 3f(x) = 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. (15 μ)

Δ2. Να λύσετε την εξίσωση : $f(1+f(x)) = 1$. (5 μ)

Δ3. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα. (5 μ)

Θέμα 1

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $xf'(x) \leq \eta\mu x + x^2 - 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.

Θέμα 2

Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x + 2 = 3\sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.

Θέμα 3

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x - x + 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(0, \pi)$.

Θέμα 4

Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ώστε $f(0) < 1$ και $f(1) > 3$, τότε η εξίσωση $f(x) = e^x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0, 1)$.

Θέμα 5

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \ln x + 3$. Ναδειχθεί ότι γραφικές παραστάσεις των f , g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(1, e)$.

Θέμα 6

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 3$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει : $f^2(x) = x^2 + 9$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Θέμα 7

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2$.

- i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση: $3x2^x + 2^x < 1$

Θέμα 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 5x - 2021$.

- α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.
- β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + f(3x) = f(2x) + f(4x)$.

Παράδειγμα 13: Για την συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x}{x} & , x < 0 \\ 1 - x^2 & , x \geq 0 \end{cases}$

- α. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $\left[-\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}\right]$.
- β. Στην συνέχεια να βρείτε τα σημεία που η C_f τέμνει τον άξονα x' στο $\left[-\frac{\pi}{2}, \sqrt{2}\right]$.

Παράδειγμα 18: Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0,1]$ με

$2f(0) + f(1) = 0$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[0,1]$.

Παράδειγμα 19: Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[0, \pi]$ και ισχύει

$$0 < f(x) < 2 \text{ για κάθε } x \in [0, \pi] .$$

Να δείξετε ότι η εξίσωση $f^2(x) + x = 3f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, \pi)$.

Παράδειγμα 20: Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : (-2, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, αν ισχύει

$f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (-2, 2)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(1)x^3 + 3e^x) = +\infty$. Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης f .

Παράδειγμα 21: Να βρείτε τον τύπο της συνεχούς συνάρτησης f

στο σύνολο $[-2, 2]$, για την οποία ισχύει $f^2(x) = 4 - x^2$ για κάθε $x \in [-2, 2]$.

Παράδειγμα 22: Να βρεθεί το πρόσημο της συνάρτησης

$$f(x) = 1 - 2\eta\mu^2 x, x \in [-\pi, \pi].$$

Παράδειγμα 24: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f^2(\alpha) + f(\beta)(f(\beta) - 2) = -1$, ναδειχθεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{\pi}{4}$.

Παράδειγμα 26: Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}$.

α. Αν ισχύει ότι $\sqrt{f(\pi) - 1} + |f(e) - 2| = 0$, ναδειχθεί ότι η συνάρτηση f δεν είναι σταθερή.

β. Ναδειχθεί ότι υπάρχει $x_1 \in [0, 4]$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = \frac{3f(2) + f(3)}{4}$.

γ. Αν επιπλέον ισχύει ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [0, 4]$, ναδειχθεί ότι υπάρχει $x_2 \in [0, 4]$ τέτοιο, ώστε $f(x_2) = \sqrt{f(0)f(4)}$.

Παράδειγμα 27: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x - 2$, $x > 0$

α. Ναδειχθεί ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

β. Ναβρεθεί το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

γ. Ναλυθεί η εξίσωση $f(x) = e - 1$.

Παράδειγμα 29: Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = -2x^5 - 2kx^3 + 2k^5, \quad x \in \mathbb{R} \text{ και } k > 0.$$

α) Ναεξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

β) Ναβρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Νααποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, k)$.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f(x) + 2k^5}{\eta \mu^3 x} = \lambda^2, \lambda \in \mathbb{R}$, ναβρείτε τη καμπύλη στην οποία

βρίσκονται τα σημεία $M(k, \lambda)$.

Παράδειγμα 30: Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο

$$f(x) = 3 \ln 2x + e^{3x} + 4x - 2, x > 0.$$

- α. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f .
- β. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = e^{\frac{3}{2}}$.
- δ. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ για το οποίο ισχύει:
$$3 \ln 4\mu - 3 \ln(2\mu^2 + 2) - 4(\mu^2 + 1) = e^{3(\mu^2 + 1)} - e^{6\mu} - 8\mu$$

Παράδειγμα 31: Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - $4f(x) + 3f(x+1) = 2x^2 - 2013$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- α. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
 - β. Να βρείτε το $f(1)$.
 - γ. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x - 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

Παράδειγμα 32: Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) = x^2 + x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + f(x)}{x} = -\frac{1}{2}$.
- α. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.
 - β. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = -\sqrt{x^2 + x + 1}, x \in \mathbb{R}$.
 - γ. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - f(x))$.
 - δ. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x) = x - f(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\infty, 0)$.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να μελετηθεί ως προς την συνέχεια η παρακάτω συνάρτηση:

$$k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x-6} \ln(9x-27), & x > 3 \\ \frac{9}{2}, & x = 3 \\ \frac{x - \sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+6} - 3}, & -1 \leq x < 3 \end{cases}$$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$2x + x^2 \leq f(x) - 8 \leq x^4 + 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ τότε:}$$

α) να βρείτε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-8}{x}$.

β) Να ελέγξετε εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \begin{cases} \frac{-|x|\sqrt{|x|}}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 0, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$.

α) Να δείξετε ότι $g(x) = -\sqrt{x}$, όταν $x > 0$ ενώ $g(x) = \sqrt{-x}$, όταν $x < 0$.

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

γ) Εάν για την συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει:

$$|f(x) - 2025| \leq |g(x)|, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ τότε}$$

να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 6

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει

$$\frac{6x^4 + \ln x}{x^4 + x^6} \leq f(x) \leq 7 + \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^+.$$

α) Να βρεθεί η τιμή της f στο 0.

β) Εάν $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση με $g(x) = -xf(x-1) - 2x^2 - 7x + 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της g , τέμνει τον άξονα x' σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

ΑΣΚΗΣΗ 8

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{3+x}}{x-1} = \frac{3}{4}$ και $f(5)=10$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(1) = 2$.

β) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x-1}$.

γ) Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της f .

δ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1,5)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) - 6 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 12

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση, η οποία είναι γνησίως φθίνουσα.

Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$ και η συνάρτηση f έχει ρίζα στο διάστημα (α, β) .

Να αποδείξετε ότι:

α) η εξίσωση $\frac{f(x+\beta-a)}{x-a} = \frac{f(x+a-\beta)}{x-\beta}$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

β) η εξίσωση $f^2(x+\beta-a)(x-\beta)f(a) = f^2(x+a-\beta)(x-a)f(\beta)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (α, β) .

ΑΣΚΗΣΗ 16

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$x^2 f(x) - 3x^2 + x^4 + \eta \mu x^2 = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

β) Να υπολογίσετε (εάν υπάρχουν) τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Να αποδείξετε ότι η f μηδενίζεται τουλάχιστον δύο φορές.

ΑΣΚΗΣΗ 17

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$(x-1)f(x) + 5f(1-x) = 2x^2 + 5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f .

β) Να υπολογίσετε (εάν υπάρχουν) τα όρια $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \ln \frac{1}{x}.$$

ΑΣΚΗΣΗ 18

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της και το σύνολο τιμών της.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και να βρείτε τα όρια (εάν υπάρχουν)

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x).$$

ΑΣΚΗΣΗ 19

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(\ln(x+3))$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και τις ρίζες της f .

β) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και το πρόσημό της.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτησή της.

ε) Να βρείτε τα όρια (εάν υπάρχουν) :

$$\lim_{x \rightarrow e^{2025}-3} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f^{-1}(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x).$$

1^ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

A1. Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ; (5μ)

A2. Πότε μια συνάρτηση λέμε ότι παρουσιάζει στο x_0 (ολικό) μέγιστο; (5μ)

A3. Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται 1-1 ; (5μ)

A4. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις γράφοντας τη λέξη

Σωστό ή Λάθος .

1) Ο κύκλος είναι γραφική παράσταση συνάρτησης .

2) Η $f(x) = x^2 + 2$ είναι 1-1 .

3) Οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x^2}$ και $g(x) = x$ είναι ίσες .

4) Αν οι συναρτήσεις f , g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$,

τότε και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

5) Η συνάρτηση $f(x) = \ln(-x)$ είναι γνησίως αύξουσα. (10 μ)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + \lambda$ και το $A(0,3)$ που είναι ένα σημείο της γραφικής της παράστασης .

B1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$. (3μ)

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα . (6μ)

B3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της . (6μ)

B4. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x - 21) < 3$ (6μ)

B5. Εξετάστε αν η ευθεία $y = 1$ τέμνει την C_f . (4μ)

Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$.

- Γ1. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)
Γ2. Μελετήστε την f ως προς τα ακρότατα. (5 μ)
Γ3. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία. (4 μ)
Γ4. Μελετήστε την g ως προς τα ακρότατα. (3 μ)
Γ5. Να βρείτε τις $f \circ g$ και $g \circ f$. (8 μ)

Θέμα Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$

- Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. (5 μ)
Δ2. Να βρείτε την f^{-1} . (5 μ)
Δ3. Αν $g(x) = 1 + \frac{1}{e^x + 1}$ να δείξετε ότι $f = g$. (5 μ)
Δ4. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)
Δ5. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) - x^3 < \frac{3}{2}$ (5 μ)

Καλή επιτυχία !!!

Ασκήσεις

1) Αν $\alpha \in (1,2)$, να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε να ισχύει

$$(1 - \xi) \cdot (1 - \alpha) \cdot e^{\xi} = (\alpha - 2) \cdot \xi$$

2) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + e^{-x} - \frac{\eta \mu x}{x}$. Να αποδείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$.

3) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^5(x) + 2f^3(x) + f(x) = xe^x - 1$, $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

4) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - 2xf(x) = 5$, $x \in \mathbb{R}$ και

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(2) \cdot x^3 + x) = +\infty$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) - x < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 5}$, $x \in \mathbb{R}$

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + 2026 = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(-\infty, 0)$

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) + \frac{1}{2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, +\infty)$

ε) Αν $-2026 < \alpha < -\frac{1}{2}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \alpha$

5) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln x} - x + 2$, $x \in (0,1)$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(x+1) \cdot \ln x = 1$ δεν έχει ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Αν $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, να αποδείξετε ότι $(\eta \mu \alpha + 1) \cdot \ln(\eta \mu \alpha) \neq 1$

6) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{3-x} - 2 & , x \leq 3 \\ -4 - \frac{1}{x-3} & , x > 3 \end{cases}$

Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$

7) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{e+x} - \frac{1}{x}$ και $g(x) = \ln(-x) + 1$

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει κοινό σημείο των C_f και C_g με τετμημένη $x_0 \in (-e, -1)$.

β) Αν $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$, να αποδείξετε ότι $f(\sigma \nu \alpha) \neq g(\sigma \nu \alpha)$.

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα 1

Να χαρακτηρίσετε ως ΣΩΣΤΟ (Σ) ή ΛΑΘΟΣ (Λ) καθένα από τα παρακάτω :

- α) Υπάρχει συνεχής συνάρτηση που δεν μηδενίζει και δεν διατηρεί σταθερό πρόσημο.
- β) Η εικόνα ενός ανοικτού διαστήματος μιας συνεχούς συνάρτησης είναι ανοικτό διάστημα.
- γ) Αν για την $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^4} = 21$ τότε είναι συνεχής στο x_0 .
- δ) Αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x))$ τότε υπάρχουν τα $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- ε) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{n\mu(f(x))}{(f(x))^{21}} = +\infty$

Μονάδες 10

Θέμα 2

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: [-2,8] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(-2) = 4$ και $f(0) = 0$.

- α) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 1$ έχει τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με την C_f . Μονάδες 10
- β) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 0} \left[f(x) \cdot n\mu \left(\frac{1}{x} + 2 \right) \right]$ Μονάδες 10
- γ) Αν $f(x) = 4 - \sqrt{25 - (x-3)^2}$, να βρείτε το πρόσημο της f για τις διάφορες τιμές του $x \in [-2,8]$. Μονάδες 10

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x-1} - x^3 + 4$

- α) Να δείξετε ότι η C_f έχει ακριβώς δυο κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$. Μονάδες 10
- β) Να δείξετε ότι οι τετμημένες των δυο σημείων του α) ανήκουν στο διάστημα $(-1,2)$. Μονάδες 5
- γ) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x) \cdot n\mu(\sqrt{x} - 1)]$ Μονάδες 10

Θέμα 4

α) Για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το όριο :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 25} + ax)$$

Μονάδες 10

β) Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + \beta n\mu x}{x} = 3$, να υπολογίσετε το $a \in \mathbb{R}$. Μονάδες 7

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{ax + \beta n\mu x}{x} & , x > 0 \\ \sqrt{9x^2 + x + 25} + ax & , x \leq 0 \end{cases}$.

Αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε :

- i) να υπολογίσετε τους αριθμούς α και β Μονάδες 10
- ii) να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, +\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 4$ Μονάδες 8

Θέμα 1

- α) Διατυπώστε το θεώρημα του Bolzano . (10 μονάδες)
- β) Δείξτε ότι η εξίσωση $2x + \sin x = 2$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(0, \pi)$. (10 μονάδες)

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 1} - 2x & , \quad x > 1 \\ \frac{\alpha x^3 + 2\sqrt{2}}{x^2 + 1} & , \quad x \leq 1 \end{cases}$$

- α) Για τις διάφορες τιμές του α υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (10 μονάδες)
- β) Υπολογίστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (10 μονάδες)
- γ) Να βρείτε για ποια τιμή του α είναι η f συνεχής στο 1 . (10 μονάδες)

Θέμα 3

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g για τις οποίες ισχύει $\frac{f(0)}{2} < g(0)$ και $\frac{f(2)}{2} > g(2) - 4$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα και η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$.

- α) Να δείξετε ότι η $h(x) = f(x) + x^3 - 2g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, 2]$. (10 μονάδες)
- β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) + \xi^3 = 2 \cdot g(\xi)$. (10 μονάδες)

Θέμα 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} e^x - \frac{1}{x-1} + \alpha & , \quad x \leq 0 \\ -3x + 5 & , \quad x > 0 \end{cases}$$

- α) Να βρείτε το α . (10 μονάδες)
- β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . (10 μονάδες)
- γ) Για τις διάφορες τιμές του k να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης $f(x) = k$. (10 μονάδες)

ΤΕΣΤ στα Μαθηματικά Προσανατολισμού Γ' Λυκείου

Θέμα Α

A1. Πότε δυο συναρτήσεις λέγονται ίσες ; (5 μονάδες)

A2. Διατυπώστε το κριτήριο παρεμβολής . (5 μονάδες)

A3. Διατυπώστε το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής . (5 μονάδες)

A4. Εξετάστε αν είναι Σωστές ή Λανθασμένες οι παρακάτω προτάσεις :

α) Κάθε αντιστρέψιμη συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη .

β) Κάθε συνάρτηση f με $f(\alpha)f(\beta) > 0$ δεν έχει ρίζα στο (α, β) .

γ) Κάθε συνάρτηση f με $f(\alpha)f(\beta) < 0$ έχει ρίζα στο (α, β) .

δ) Κάθε συνάρτηση έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή .

ε) Για κάθε συνάρτηση f με $f(\alpha) = f(\beta)$ ισχύει $\alpha = \beta$. (10 μονάδες)

Θέμα Β

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

α) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

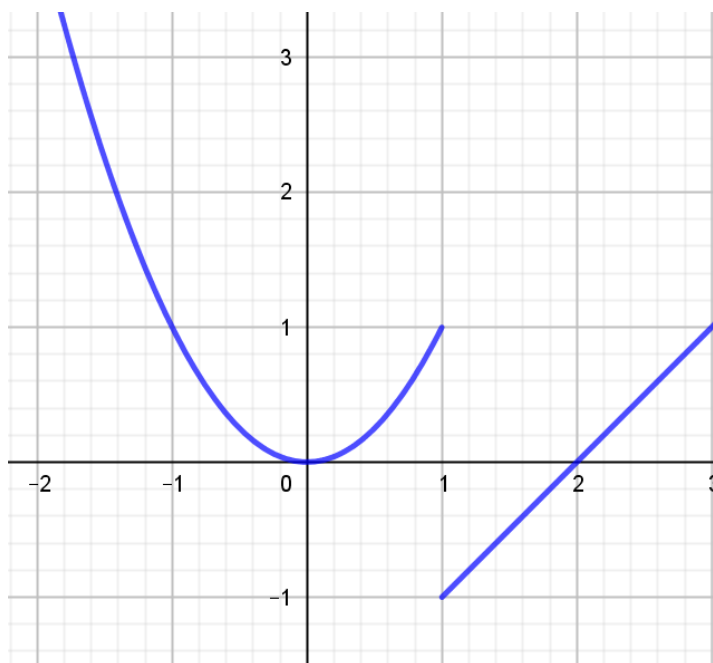
β) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(f(x)-1)^2}$

δ) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$

ε) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(f(x) \cdot \eta\mu \frac{1}{x-2} \right)$

(5 x 5 = 25 μονάδες)



Θέμα Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{(e^x-2)} - 1$ και $g(x) = x^2 + \ln(x^2 - 1)$.

Γ1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των f, g .

Γ2. Είναι οι f, g αντιστρέψιμες; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Γ3. Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

Γ4. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

Γ5. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f .

(5x5 = 25 μονάδες)

Θέμα Δ

Δ1. Με ένα σύρμα μήκους 6 μέτρων δημιουργούμε ορθογώνιο. Αν η μια πλευρά του ορθογωνίου έχει μήκος x , να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ως συνάρτηση μεταβλητής x . (5 μονάδες)

Δ2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x - x^2$.

α) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x^2 - 9}$. (5 μονάδες)

β) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x) - 1}{(x - 3)^2}$. (5 μονάδες)

γ) Να υπολογίσετε (αν υπάρχει) το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x) - 2}$. (5 μονάδες)

δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - e^{x-1}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. (5 μονάδες)

Καλή επιτυχία !!!

Θέμα 1

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{1 - \frac{x}{2-x}} + \sqrt{4 - |x-3|}$

ii. $f(x) = \sqrt{1 - \eta\mu x} + \sqrt{x}$

Θέμα 2

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{x^3 + 3x + 4}$

ii. $f(x) = 2^{\sqrt{|x|-x}}$

Θέμα 3

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \ln(-x^2 + 9)$

ii. $f(x) = (2 + \sigma\upsilon\nu x)^x$

Θέμα 4

Να εξετάσετε αν ο αριθμός 3 είναι τιμή των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1 \\ x^3-5, & x > 1 \end{cases}$

ii. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-1}, & x \geq 2 \\ x^2-6, & x < 2 \end{cases}$

Θέμα 5

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = x + 2$ και $g(x) = \sqrt{-x + 4}$.

- i. Εξετάστε αν η C_g τέμνει τους άξονες.
- ii. Εξετάστε αν η C_g και η C_f έχουν κοινά σημεία.

Θέμα 6

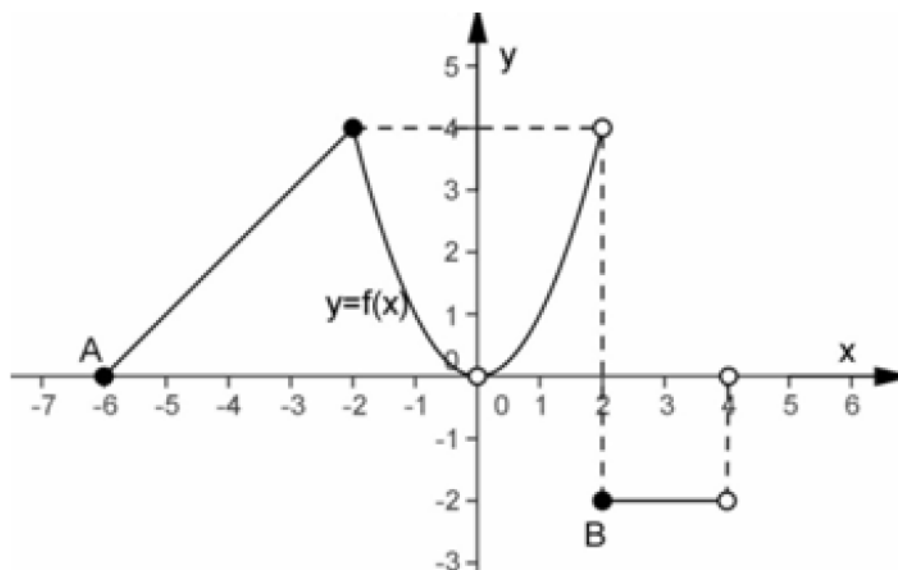
Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$, όταν $f(x) = x^3 - 4x$.

Θέμα 7

Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την γραφική παράσταση της g , όταν $f(x) = e^{2x}$ και $g(x) = e^x + 2$.

Θέμα 8

Δίνεται η συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση είναι η παρακάτω.

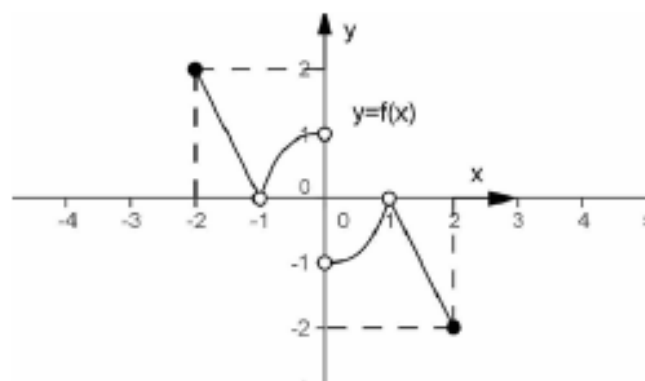


- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να εξετάσετε αν το 0 είναι τιμή της f .
- iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
- iv. Να βρείτε το $f(2)$.
- v. Να επιλύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.
- vi. Να επιλύσετε τις ανισώσεις $f(x) > 0$ και $f(x) < 0$.

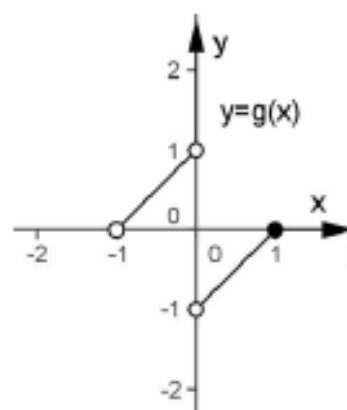
Θέμα 9

Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g , φ , h .

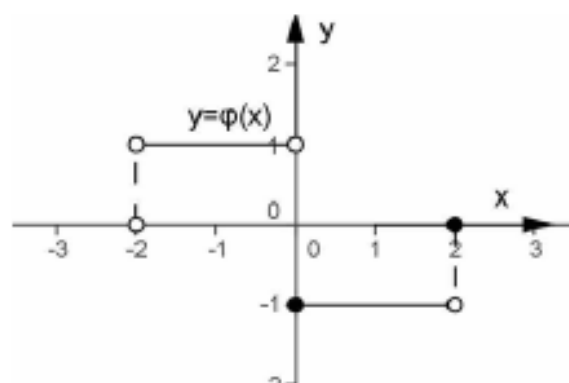
i.



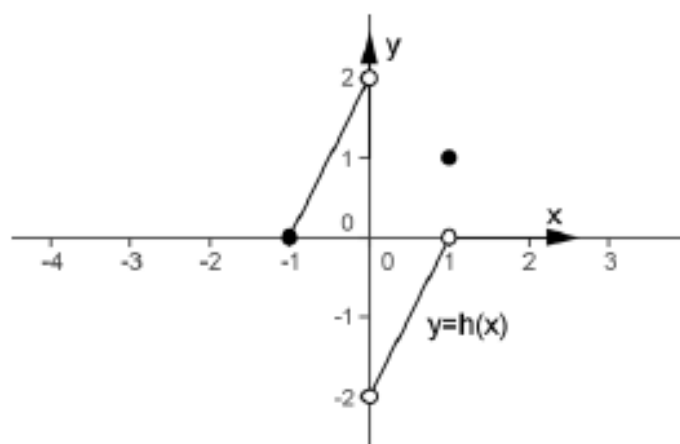
ii.



iii.



iv.



Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις f , g , φ , h είναι περιττές.

Θέμα 10

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \ln|x|$.

Να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

- i. $y = f(x)$
- ii. $y = |f(x)|$
- iii. $y = f(x-1)$
- iv. $y = f(x+1)$
- v. $y = f(x) + 1$
- vi. $y = f(x) - 1$

Θέμα 11

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο.

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

Να παρασταθούν γραφικά οι παρακάτω συναρτήσεις:

- i. $y = f(x)$
- ii. $y = -f(x)$
- iii. $y = f(-x)$
- iv. $y = -f(-x)$
- v. $y = |f(x)|$
- vi. $y = \frac{1}{2}(f(x) - |f(x)|)$

Θέμα 12

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln|x| - \ln|x-1|$ και $g(x) = \ln \frac{x}{x-1}$.

Να εξετάσετε αν $f = g$. Στην περίπτωση που είναι $f \neq g$, να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$.

Θέμα 13

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ και $g(x) = \sqrt{1-2x}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

$$f+g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g}$$

Θέμα 14

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους $f(x) = \sqrt{4-x^2}$, $g(x) = x+1$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

Θέμα 15

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$). Αν $(B\Gamma)=4$ και $(AB)=x$, να εκφράσετε την προβολή της κάθετης πλευράς $A\Gamma$ πάνω στην υποτείνουσα ως συνάρτηση του x .

Θέμα 16

Να βρεθεί η συνάρτηση f ώστε:

$$f(2x-1) = x^3, \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Θέμα 17

Το κόστος x μονάδων ενός προϊόντος είναι $K(x) = -4 - 2x^2$.

Αν η τιμή πώλησης μιας μονάδας του προϊόντος είναι $\Pi(x) = -x - 5$ τότε:

- Να εκφράσετε το κέρδος P ως συνάρτηση του x .
- Να βρείτε πότε η επιχείρηση θα έχει κέρδος και πότε ζημιά.

Θέμα 18

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x$ και $g(x) = \frac{x}{1-x}$. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

Θέμα 19

Αν $f(x) = x^2 + 5$ και $g(x) = \sqrt{x-9}$ να βρείτε τη συνάρτηση $g \circ f$.

Θέμα 20

Αν $f(x) = \ln(x-3)$ και $g(x) = \sqrt{x}$ να βρεθούν οι συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$.

Θέμα 21

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x+1$ και $g(x) = ax+2$. Για ποια τιμή του $a \in \mathbb{R}$ ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

Θέμα 22

Να προσδιοριστεί συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε:

- i. $f(x-1) = x^2 - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii. $f(3x) = x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 23

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.
Να δείξετε ότι:

- i. Η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}$ είναι άρτια.
- ii. Η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ είναι περιττή.
- iii. Κάθε συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$ γράφεται σαν άθροισμα μιας άρτιας και μιας περιττής συνάρτησης.

Θέμα 24

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ώστε $f(x) = \ln x$, $x > 0$ και $g(x) = \frac{1}{x}$, $x > 0$.

- i. Να βρεθεί συνάρτηση t ώστε $tof = g$.
- ii. Να βρεθεί συνάρτηση φ ώστε $fo\varphi = g$.

Θέμα 25

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού και ο τύπος της συνάρτησης h με $h(x) = f(\ln x - 1) + f(2-x)$.

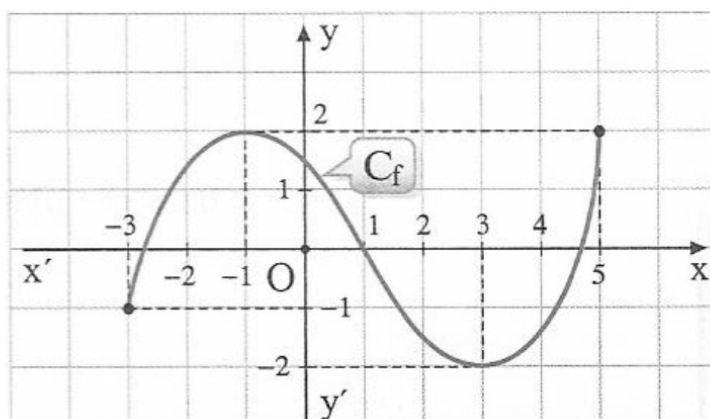
Θέμα 26

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το σύνολο $A=[1,2]$. Να δείξετε ότι ορίζονται οι παρακάτω συναρτήσεις και να βρεθεί το πεδίο ορισμού των:

- i. $h(x) = f(\sqrt{x} - 1)$
- ii. $\varphi(x) = f(x^3 - 6)$

Θέμα 27

Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Θέμα 28

Έστω δυο συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση $g(x) = f(-2x+3)$.

Θέμα 29

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως αύξουσα. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2x + 3f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Θέμα 30

Δίνεται περιττή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι είναι γνησίως αύξουσα και στο $(-\infty, 0)$.

Θέμα 31

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{10-x} = 3 + \ln x$.

Θέμα 32

Να λυθούν οι εξισώσεις:

- i. $x^3 = 1 - \ln x$ ii. $e^x + x = 1$ iii. $\ln x = \frac{1}{x} - 1$ iv. $2\sqrt{x-1} = 1 + \frac{8}{x^3}$
v. $x + \ln x = 1$ vi. $x^2 + \ln x - 1 = 0$ vii. $1 - e^x = x + \eta\mu x$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Θέμα 33

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{8}{x^3} - 3\sqrt{x-1}$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την εξίσωση $8 + 2x^3 = 3x^3\sqrt{x-1}$.

Θέμα 34

Να λυθεί η ανίσωση : $x^3 + x < 2 - \ln x$.

Θέμα 35

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 3x$, αφού βρείτε τη μονοτονία της, να λύσετε την ανίσωση $f(2x^2 - x + 3) < f(3x + x^2)$

Θέμα 36

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 2x^{2011} + 5x - 7, x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .

Θέμα 37

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x - 1$

- Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.
- Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f .
- Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων : $g(x) = \ln f(x)$ και $h(x) = \frac{1}{f(x)}$.
- Να δείξετε ότι $xf'(x) < 0$ για κάθε $x \neq 0$.
- Να δείξετε ότι : $f(x) + f(x+5) > f(x+3) + f(x+7)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 38

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \ln x - \frac{1}{x} + x$

- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- Να δείξετε ότι αν $x > e$, τότε $\ln x - \frac{1}{x} + x > 1 - \frac{1}{e} + e$
- Να δείξετε ότι αν $x > 1$, τότε $x \ln x + x^2 > 1$
- Να δείξετε ότι αν $\alpha, \beta > 0$ και $\alpha < \beta$, τότε $\ln \frac{\alpha}{\beta} < \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} + \beta - \alpha$

Θέμα 39

Να λυθούν οι ανισώσεις :

- $9 - x^3 < e^{x-2}$
- $e^{x-1} + x < 2$
- $1 + \ln x < \frac{1}{x}$

Θέμα 40

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

- i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
- ii. Να λύσετε την ανίσωση : $\frac{1}{x^2+5} - \frac{1}{2x^2+1} < \ln \frac{x^2+5}{2x^2+1}$

Θέμα 41

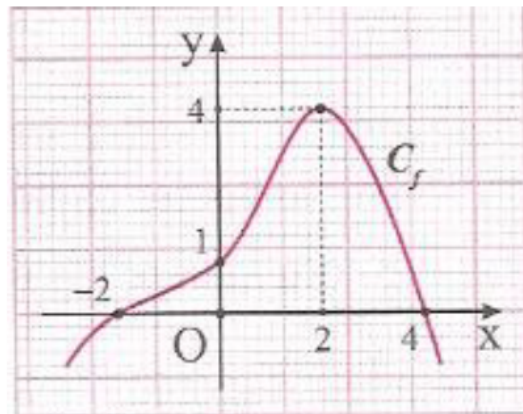
Δίνεται η συνάρτηση : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + e^{f(x)} + x - 1 = 0$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 42

Δίνεται η συνάρτηση : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) - x + 2016 = 0$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 43

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ του παρακάτω σχήματος.



- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της.
- ii. Να βρείτε τα ακρότατα.
- iii. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας.
- iv. Να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq 0$.
- v. Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- vi. Να βρείτε την τιμή $f(0)$.
- vii. Να δείξετε ότι : $f(x) \leq 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- viii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) = 4$ και την ανίσωση : $f(x) < 4$.
- ix. Να λύσετε την εξίσωση : $4 + (x - 2)^2 = f(x)$
- x. Να λύσετε την εξίσωση : $f(\alpha) + f(e^\beta) = 8$.

Θέμα 44

Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και ποιες όχι :

- i. $f(x) = 1 + \ln \sqrt{1 + e^{x-1}}$
- ii. $f(x) = 2x^2 + 3$
- iii. $f(x) = 1 - 4x - 3e^{2x-1}$

Θέμα 45

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2f(x) = 3e^{2-x} - 5$ (1) για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι είναι «1-1».

Θέμα 46

Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι «1-1» και ποιες όχι

- i. $f(x) = 3e^{2x-3} + 2$
- ii. $f(x) = 1 + 3e^{1+\sqrt{1-x}}$
- iii. $f(x) = e^{x-1} + 2x - 5$
- iv. $f(x) = 3\ln(x-2) + 3x + 3$
- v. $f(x) = 3x^2 + 2$
- vi. $f(x) = x^2 - 5x + 6$
- vii. $f(x) = |x - 2|$

Θέμα 47

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + 2f(x) = 4x^3 - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι είναι «1-1».

Θέμα 48

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση : $(f \circ f)(x^2 - 2x) = (f \circ f)(3x - 6)$.

Θέμα 49

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha}{x} - \sqrt{x}$, με $\alpha \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $f(1) + f(4) = 12$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξετε ότι $\alpha = 12$.
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $\frac{12}{|2x-1|+1} - \frac{12}{|x+4|+1} = \sqrt{|2x-1|+1} - \sqrt{|x+4|+1}$.

Θέμα 50

Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα, να λυθεί η εξίσωση : $(f \circ f)(x^2 + 4x) = (f \circ f)(x + 4)$.

Θέμα 51

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(f(x)) = 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι «1-1».
- ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(2x^3 + x) - f(4 - x) = 0$.

Θέμα 52

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) - f(x) = 2x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδειχθεί ότι η f είναι «1-1».
- ii. Να βρείτε την τιμή $f(2)$
- iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(4 - f(x^2 + x)) - 2 = 0$.

Θέμα 53

Μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα : $f(3 - x) + f(x + 5) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και είναι γνησίως φθίνουσα .

- i. Να λυθεί η ανίσωση : $f(x^2 + 2x - 4) < 0$.
- ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(x) = 0$.

Θέμα 54

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

- i. $e^x = 1 - x^7$
- ii. $\ln(x - 1) = 2 - x$

Θέμα 55

Να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση $f(x) = 2e^{3x-2} + 1$ είναι 1-1 και να βρεθεί η αντίστροφή της.

Θέμα 56

Να βρεθεί το σύνολο τιμών και η αντίστροφη καθεμιάς των παρακάτω συναρτήσεων. Στο ίδιο σύστημα αξόνων να σχεδιάσετε την C_f και $C_{f^{-1}}$.

- i. $f(x) = 2x + 4$
- ii. $f(x) = \ln(x - 2) + 1$

Θέμα 57

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 2, & x \leq 1 \\ 3 - 2x, & x > 1 \end{cases}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.
- iii. Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$.

Θέμα 58

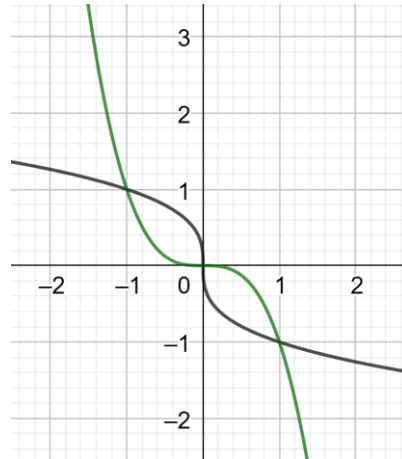
Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + 3f(x) + x - 2 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι η f είναι "1-1"
- Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$

Θέμα 59

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3$.

- Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.
- Να βρείτε την f^{-1}
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$.



Σημείωση

Έχουν κοινά σημεία που δεν ανήκουν στην ευθεία $y = x$.

Θέμα 60

Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$ (αν υπάρχουν) ανήκουν στην ευθεία $y = x$.

Θέμα 61

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^5 + x + 3$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε τα σημεία τομής των C_f και $C_{f^{-1}}$.
- Να λύσετε την ανίσωση : $f^{-1}(f(x^2 - 3) - 4) > 0$

Θέμα 62

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - 2x + 14$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

- Να αποδειχθεί ότι η f αντιστρέφεται.
- Να βρείτε τα σημεία τομής της $C_{f^{-1}}$ με την ευθεία $y = x$

Θέμα 63

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί τη σχέση : $2f^3(x) + f(x) = x + 16$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να δείξετε ότι η f είναι "1-1"
- Να βρείτε την αντίστροφη $f^{-1}(x)$
- Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$

Θέμα 64

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2\ln(\sqrt{x-1} + 1) + 3$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1-1”.
- iii. Να ορίσετε την f^{-1} .
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x) = 2$.

Θέμα 65

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^{2011} + 2x - 5, x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα τη $x = 1$.
- iii. Να βρείτε το πρόσημο της f .

Θέμα 66

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -2x^3 - 3x - 1$

- i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 2$
- iv. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$

Θέμα 67

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- iii. Να ορίσετε την f^{-1} .
- iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2$.

Θέμα 68

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια

- i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 3x - 5}{x - 1}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 9}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^3 + 1}$

Θέμα 69

Να υπολογιστούν τα παρακάτω όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 - 81}{\sqrt{x} - 3}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x - 3}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x - 5}$

Θέμα 70

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} ax^3 - x + a - 1, & x \geq 2 \\ (a+1)x - 1, & x < 2 \end{cases}$ όπου a πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το a ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Θέμα 71

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \alpha x + \beta, & x \leq 1 \\ 3x + 1, & 1 < x < 2 \\ x^2 - \beta x + \alpha - 2, & x \geq 2 \end{cases}$ όπου α, β πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τα α, β ώστε να υπάρχουν συγχρόνως τα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Θέμα 72

Να υπολογιστούν τα όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2|x-1| - 3|x-5| + 2}{\sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{|x-4|}{\sqrt{|x-4|} + 1 - 1}$

Θέμα 73

Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)f(x) - x^2 + 1}{1 - \sqrt{x}} = 10$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Θέμα 74

Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - x^2}{x^2 - 5x + 6} = 5$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2x}{x - 2}$.

Θέμα 75

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^2 + \beta}{x - 1} = 4$

Θέμα 76

Αν $2 - |x - 1| \leq f(x) - 2x \leq x^2 - 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Θέμα 77

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $x - x^2 \leq f(x) \leq x$. Να βρεθούν τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$.

Θέμα 78

Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση για την οποία ισχύει : $f^3(x) + f(x) + 1 = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

Θέμα 79

Αν για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $xf(x) - 2f(x) \leq x^2 - 5x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Θέμα 80

Να υπολογιστούν τα όρια :

- i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^2 - x}$
- ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x - 2\eta \mu x}{x^2 + x}$
- iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^2 - x}$
- iv. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \phi x}{x}$

Θέμα 81

Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 2$, να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(5x) - \eta\mu x}{6x - \eta\mu 3x}$

Θέμα 82

Να υπολογίσετε τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x \eta\mu \frac{1}{x} \right)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \left((x^3 + 2x) \sigma\upsilon\nu \frac{3}{x^2} \right)$

Θέμα 83

Να βρείτε (αν υπάρχει) το $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+2}{16-x^2}$

Θέμα 84

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, όταν:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{f(x)} = +\infty$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{4x+3} = -\infty$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(3x+4)] = +\infty$

Θέμα 85

Δίνεται η 1-1 συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) + f(x) = 3x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = 3$$

i. Να βρείτε το $f^{-1}(1)$.

ii. Να βρείτε το $f(3)$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 3$

iv. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + x}{f(f(x)) + f(x) - 2}$

Θέμα 86

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 f(x)}{\sqrt{x+4}-2} = -3$ να βρείτε τα

όρια: i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^3(x) - 5f(x) + 3}{f^3(x) + 2f^2(x) - 7}$

Θέμα 87

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $(x^2 - 4x + 4)f(x) \leq x - 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Θέμα 88

Να βρεθούν τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x)$
ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 2} - 3x)$

Θέμα 89

Η συνάρτηση f είναι ορισμένη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει :

$1 + \sqrt{x^2 + 2x + 3} \geq f(x) + x \geq \sqrt{x^2 + 4x + 6}$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Θέμα 90

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \sqrt{9x^2 + 1}$, να βρεθούν τα παρακάτω όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
ii. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$
iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 3x)$

Θέμα 91

Να βρεθεί το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^2 + 8x} + \sqrt{4x^2 - 1} - 6x)$

Θέμα 92

Αν $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x + 4} + ax + \beta$, να βρεθούν οι α, β ώστε $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 11$

Θέμα 93

Να βρεθούν τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \eta\mu x}{x + 2} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x + \eta\mu^2 x - 2\sigma\upsilon\nu x}{3x + \sigma\upsilon\nu x} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \sigma\upsilon\nu x + x^2 \eta\mu x + 2}{x^4 + \eta\mu^4 x + x}$$

Θέμα 94

Να βρεθούν τα όρια :

$$\begin{aligned} \text{i. } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{x^2} \\ \text{ii. } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma\upsilon\nu x}{x^3} \\ \text{iii. } & \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^3 \eta\mu \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

Θέμα 95

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $3x^5 - 2x^2 \leq (x^5 + 2x + 1)f(x) \leq 3x^5 + 3x^2 + 5$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τα όρια :

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Θέμα 96

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) + 2x - 3}{x + 5} = 7$. Να

βρείτε τα όρια : i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

Θέμα 97

Να μελετήσετε ως προς τη συνέχεια τη συνάρτηση : $f(x) = \begin{cases} \ln x + 2x^2 - 3, & x > 1 \\ \sqrt{x} \\ 2x - 3, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

Θέμα 98

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^x + \sigma\upsilon\nu x & , \quad x < 0 \\ 2 & , \quad x = 0 \\ x^2 - \eta\mu x + 5 & , \quad x > 0 \end{cases}$.

- Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.
- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

Θέμα 99

Για ποια τιμή του α η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2\alpha, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu x}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$ είναι συνεχής;

Θέμα 100

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1}, & x < 1 \\ \beta + 1, & x = 1 \\ \alpha x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε την τιμή των α, β ώστε η f να

είναι συνεχής.

Θέμα 101

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(x-2)f(x) = x^2 - 5x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή $f(2)$. Στη συνέχεια να βρείτε τον τύπο της $f(x)$.

Θέμα 102

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(x-2)f(x) \leq \eta\mu(x-2) + x^2 - 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(2)$.

Θέμα 103

Αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ να βρεθεί η τιμή $f(1)$ όταν

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x) - \eta\mu(x-1)}{\sqrt{x} - 1} = 4.$$

Θέμα 104

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f^3(x) + f(x) + 1 = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

Θέμα 105

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(x-2)f(x) = \sqrt{x+7} - 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την τιμή $f(2)$.

Θέμα 106

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(x) = \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x+2}$, για κάθε $x \neq -2$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$.

- Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε τον τύπο της f .

Θέμα 107

Έστω συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $xf'(x) \leq \eta\mu x + x^2 - 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.

Θέμα 108

Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x + 2 = 3\sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, \pi)$.

Θέμα 109

Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \eta\mu x - x + 1$ τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $(0, \pi)$.

Θέμα 110

Να δείξετε ότι αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, ώστε $f(0) < 1$ και $f(1) > 3$, τότε η εξίσωση $f(x) = e^x$ έχει τουλάχιστον μια λύση στο $(0, 1)$.

Θέμα 111

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \ln x + 3$. Να δειχθεί ότι γραφικές παραστάσεις των f , g έχουν τουλάχιστον ένα κοινό σημείο με τετμημένη που ανήκει στο διάστημα $(1, e)$.

Θέμα 112

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $0 < f(x) < 1$. Να δειχθεί ότι η εξίσωση $f^2(x) - 2f(x) + 2x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Θέμα 113

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) + \beta f^2(x) + \gamma f(x) = x^3 - 2x^2 + 6x - 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, όπου $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $\beta^2 < 3\gamma$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Θέμα 114

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 2x^2 = 1$ έχει τουλάχιστον δυο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

Θέμα 115

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (x - 2)e^x - (x + 2)$ έχει :

- i. μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, 3)$
- ii. δυο τουλάχιστον ρίζες αντίθετες.

Θέμα 116

Μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και συνεχής σε ένα διάστημα $[-3,3]$ και για κάθε $x \in [-3,3]$ ισχύει $|f(x)| \leq 3$. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x) = x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $[-3,3]$.

Θέμα 117

Έστω f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) + f(\beta) = 0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\alpha, \beta]$.

Θέμα 118

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g που είναι συνεχείς στο $[\alpha, \beta]$. Αν $f(\alpha) > g(\alpha)$ και $f(\beta) < g(\beta)$, να αποδειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = g(\xi)$.

Θέμα 119

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = 2 - x$ έχει μοναδική ρίζα στο $(0,1)$

Θέμα 120

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 \ln x + x - 2$. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο, του οποίου η τετμημένη ανήκει στο $(1, e)$.

Θέμα 121

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 - 2x$ και $g(x) = 15 - 5x$. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f, g τέμνονται σε ένα μόνο σημείο του οποίου η τετμημένη ανήκει στο διάστημα $(2,3)$.

Θέμα 122

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 5x^3 - x + 10$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 50$.

Θέμα 123

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$ να δείξετε ότι :

i. Η ευθεία $y=3$, τέμνει τη C_f , σε ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$

ii. Υπάρχει μοναδικό $x_1 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε : $f(x_1) = \frac{f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{2}{5}\right) + f\left(\frac{3}{5}\right) + f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$

Θέμα 124

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [1,4] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in [1,4]$ τέτοιο, ώστε : $f(x_0) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(4)}{6}$.

Θέμα 125

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(0) = 3$, η οποία είναι συνεχής και ισχύει : $f^2(x) = x^2 + 9$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Θέμα 126

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής. Οι αριθμοί 1 και 3 είναι διαδοχικές ρίζες της f και $f(2) < 0$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3^-} e^{\frac{1}{f(x)}}$.

Θέμα 127

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + x^2 + e^x$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Θέμα 128

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1} - \sqrt{5-x}$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
- iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Θέμα 129

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x-1) + e^{x-2} = 1$ έχει μια μόνο ρίζα. Στη συνέχεια να βρεθεί η ρίζα αυτή.

Θέμα 130

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση η οποία είναι γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το διάστημα $\Delta = (-\infty, 0)$, να βρείτε το όριο : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xf(x) - x^2}{x-1}$.

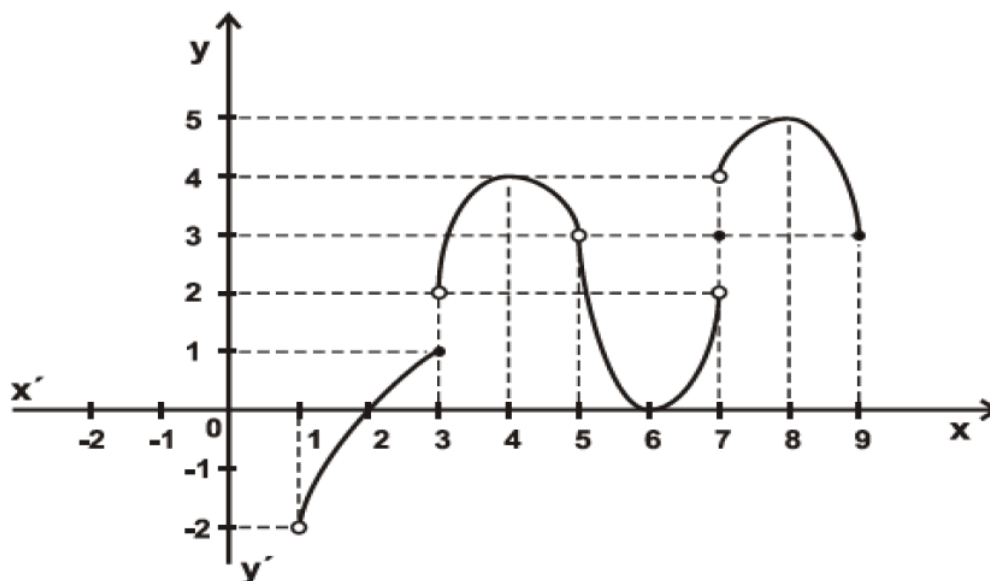
Θέμα 131

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + \ln x + x - 1$.

- i. Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
- ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μια μόνο ρίζα.
- iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = e$
- iv. Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει : $e^{\lambda^2+1} - e^{2\lambda} = \ln(2\lambda) - \ln(\lambda^2 + 1) - \lambda^2 + 2\lambda - 1$.

Θέμα 132

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .



- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .
- ii. Να βρείτε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια :
 α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ γ) $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$ δ) $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$ ε) $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$
 Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- iii. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια
 α) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{f(x)}$ β) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 8} f(f(x))$
 Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- iv. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Θέμα 133

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2$.

- i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση: $3x2^x + 2^x < 1$

Θέμα 134

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,0)$ και $B(2,3)$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να βρείτε το πρόσημο της f .
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x + 1) = 3$.
- iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x + 5) \leq 0$.

Θέμα 135

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \ln \frac{x+2}{2-x}$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.
- ii. Να βρείτε συνάρτηση h για την οποία να ισχύει: $(h \circ g)(x) = x$.
- iii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

Θέμα 136

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 5$.

- i. Να βρείτε το $f(5)$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.
- iv. Να λύσετε την εξίσωση: $f(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1) = 2$.

Θέμα 137

i. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 4}{x} = 2$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xg(x) + 2 \leq 2\sin x - \eta\mu x + x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f^2(x) + \eta\mu^2(2x)}{\varepsilon\varphi^2 x + x^2 g(x)}$

Θέμα 138

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x} + \eta\mu(x-1)}{x^2 - 1} = 2$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνάει από το σημείο $M(1,1)$

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3f(x) - 2| - 1}{x^2 - 1}$

Θέμα 139

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια.

iv. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Θέμα 140

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\alpha) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2\alpha$ με $0 < \alpha < \beta$. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha, \beta]$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.

2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(x_0) = \alpha + \beta$.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x$, έχει ακριβώς μια λύση στο (α, β) .

Θέμα 141

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^4 + 1 \leq 4f(x) \leq x^4 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4}$.

ii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4\eta\mu 3x}{2x^2 + 3\eta\mu x}$.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) - \xi = 0$.

Θέμα 142

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3.$$

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

Θέμα 143

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

Θέμα 144

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = 2 - x$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- ii. Να ορισθεί η συνάρτηση $f \circ g$.
- iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- iv. Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $f \circ f \circ g$.

Θέμα 145

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa \eta \mu x}{x - x^2}, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases}$

- i. Να βρείτε τα κ, λ .
- ii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2 \ln(8x + 1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Θέμα 146

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{4(x^3 - 2x^2)}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \\ \frac{\kappa x + 1}{2(x^2 - 4)}, & x \in (2, +\infty) \end{cases} \quad \text{και η } g: \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x \cdot g(x) + 2x}{3x} = 5 \quad \text{και} \quad g(x+3) = g(x) + f(x) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

- i. Το κ αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
- ii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- iii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.
- iv. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$.

Θέμα 147

Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: [1, 5]$ της οποίας η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία $A(1, 8)$ και $B(5, 12)$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{29}{3}$
- iii. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 5)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9}$$

Θέμα 148

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3 \ln 2x + e^{3x} + 4x - 2$.

- i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f .
- ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = e^{\frac{3}{2}}$
- iv. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ για το οποίο ισχύει:

$$3 \ln 4\mu - 3 \ln(2\mu^2 + 2) - 4(\mu^2 + 1) = e^{3(\mu^2 + 1)} - e^{6\mu} - 8\mu$$

Θέμα 149

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $4f(x) + 3f(x+1) = 2x^2 - 2013$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- ii. Να βρείτε το $f(1)$.
- iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x - 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 1)$.

Θέμα 150

Θεωρούμε τη συνεχή και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $4\eta\mu(x-2) \leq (x-2)f(x) \leq x^2 - 4$, για κάθε $x \in (0, 2)$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x} = 5$.

1. Να βρείτε τους αριθμούς $f(0)$ και $f(2)$.
2. Αν $g(x) = 4 - e^x - f(x)$, $x \in (0, 2)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $t(x) = \ln(-f(x) + 4)$, $x \in (0, 2)$ τέμνει την $y = x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 2)$.

Θέμα 151

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2, -1)$.
- $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 5)$.

γ)
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = -\infty$$

Θέμα 152

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 9} \leq 3 + xf(x) \leq x^8 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3} + 3 \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να βρείτε:}$$

i. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{2x}$.

ii. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} x^7 \eta \mu \frac{2}{x}$.

iii. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

iv. Το $f(0)$.

Θέμα 153

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = -2x^5 - 2kx^3 + 2k^5$, $x \in \mathbb{R}$ και $k > 0$.

α) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, k)$.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f(x) + 2k^5}{\eta\mu^3 x} = \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη καμπύλη στην οποία βρίσκονται τα σημεία $M(k, \lambda)$.

Θέμα 154

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) = \alpha^{2x} + 2\alpha^x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν $f(0) = -2$ να βρείτε τον τύπο της f .

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$, $\alpha < 2$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$, $\alpha > 3$.

Θέμα 155

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $f^2(x) + 4\eta\mu^2 x = x^2 - 3x + 4f(x)\eta\mu x + 10$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2\eta\mu x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν $f(0) = \sqrt{10}$.

iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sigma\upsilon\nu x - 1 - \sqrt{10}}{x}$.

Θέμα 156

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = 2x^4 + 3\ln x + 1.$$

- i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα.
- iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda > 0$ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda}$$

Θέμα 157

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.
3. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:
 - a. Η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
 - b. Ισχύει: $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Θέμα 158

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3, 3]$ για την οποία ισχύει $3x^2 + 4f^2(x) = 27$ για κάθε $x \in [-3, 3]$.

- i. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3, 3)$.
- iii. Να βρεθεί ο τύπος της f .

- iv. Αν επιπλέον $f(1) = \sqrt{6}$ να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

Θέμα 159

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Αν $1 < f(x) < e$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

2. Αν $f(0) > 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x + x \ln \frac{1}{x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

3. Αν $f(k) + f(2k) = 4k$, $k > 0$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{f(x) - k}{x - 2k} = \frac{f(x) - 2k}{x - k}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(k, 2k)$.

4. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g: [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [1,3]$ έτσι ώστε $g(\xi) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3)}{6} - \frac{7}{3}$.

Θέμα 160

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- $f(e^{f(x)}) = \ln x + 2$, για κάθε $x > 0$ και
- $(f \circ f)(e^{f(x)}) = \ln(\ln x + 1)^2$ για κάθε $x > \frac{1}{e}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2 \ln(x-1)$, $x > 1$.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f \circ f)(x) = f(e^{-x} + 2)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1+e, 1+e^{\frac{3}{2}})$.

Θέμα 161

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $\kappa \eta \mu^2 x = x^2 f(x) + \sqrt{1 + \eta \mu^2 x} - \lambda$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1) και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

i. Να βρείτε τα κ και λ

ii. Αν $\kappa = 1$ και $\lambda = 1$ να βρείτε την f .

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x}$.

Θέμα 162

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x - 4}{2^x}$

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

Θέμα 163

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 5x - 2021$.

- α) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία.
- β) Να λυθεί η εξίσωση $f(x) + f(3x) = f(2x) + f(4x)$.

Θέμα 164

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x) \geq f(1) + f(2)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι 1-1

Θέμα 165

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} -2x - 2, & x \leq -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1-x^3} \right)$

Θέμα 166

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} e^{-x+1} - x - 2, & x \leq 1 \\ \ln x + x - 3, & x > 1 \end{cases}$

- i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f έχει ακριβώς δυο ρίζες.
- iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\frac{f(\alpha)+2}{x-1} + \frac{f(\beta)+2}{x-2} = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(1,2)$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{1\}$.
- iv. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \lambda$, για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

Θέμα 167

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + 1}{x^2 - 1}, & x < -1 \\ \ln(x + \beta), & x \geq -1 \end{cases}$$

να έχει όριο πραγματικό αριθμό στο $x_0 = -1$.

Θέμα 168

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να βρείτε τα όρια της f στα άκρα του D_f .
- γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f .
- δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f αφού πρώτα αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

Θέμα 169

Αν $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Θέμα 170

Να δείξετε ότι:

- α) η εξίσωση $(x + 1) 2^{x+1} = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 0)$
- β) η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.

Θέμα 171

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

Θέμα 172

Θεωρούμε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0, \quad \kappa, \lambda, \mu \neq 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

β) Αν οι δύο ρίζες είναι οι ρ_1, ρ_2 , να δείξετε ότι: $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$.

Θέμα 173

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} + \lambda$ και το $A(0,3)$ που είναι ένα σημείο της γραφικής της παράστασης.

B1. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$. (3μ)

B2. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (6μ)

B3. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της. (6μ)

B4. Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x - 21) < 3$ (6μ)

B5. Εξετάστε αν η ευθεία $y = 1$ τέμνει την C_f . (4μ)

Θέμα 174

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 2$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$.

Γ1. Μελετήστε την f ως προς τη μονotonία. (5μ)

Γ2. Δείξτε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο 0.

Ποια είναι η ελάχιστη τιμή της f ; (5μ)

Γ3. Να μελετήσετε την g ως προς τη μονotonία. (4μ)

Γ4. Έχει η g ελάχιστη τιμή; Ποια; (3μ)

Γ5. Να βρείτε τις $f \circ g$ και $g \circ f$. (8μ)

Θέμα 175

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x + 2}{e^x + 1}$

Δ1. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1. (6 μ)

Δ2. Να βρείτε την f^{-1} . (6 μ)

Δ3. Αν $g(x) = 1 + \frac{1}{e^x + 1}$ να δείξετε ότι $f = g$. (4 μ)

Δ4. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (6 μ)

Δ5. Να αποδείξετε ότι $\frac{e^{\sqrt{2019}} + 2}{e^{\sqrt{2019}} + 1} > \frac{e^{\sqrt{2020}} + 2}{e^{\sqrt{2020}} + 1}$. (3 μ)

Θέμα 176

Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

B1. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της f ; (3 μ)

B2. Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ; (4 μ)

B3. Υπολογίστε τα όρια:

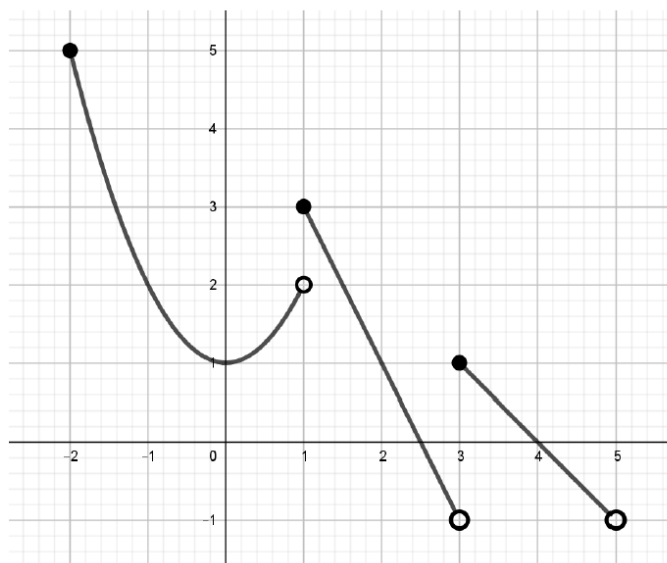
i) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ (3 μ)

ii) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (3 μ)

B4. Υπολογίστε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ (3 μ)

ii) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ (3 μ)



B5. Ποιες είναι οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) > 1$; (6 μ)

Θέμα 177

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x + \sqrt{e^x} + x^2$$

A. Να μελετήσετε τη μονοτονία της.

B. Να λύσετε την ανίσωση:

$$x^2 + \ln x + \sqrt{e^x} - 1 < \sqrt{e}.$$

Θέμα 178

- Δ1.** Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(f(x)) = x + 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (5 μ)
- Δ2.** Αν f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η $h = f - g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (5 μ)
- Δ3.** Δίνονται οι συναρτήσεις : $f(x) = x + 3$ και $g(x) = e^{-2x+1} - e + 3$.
- α) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία. (5 μ)
- β) Να βρείτε την g^{-1} . (5 μ)
- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - g(x) = 0$. (5 μ)

Θέμα 179

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta & , x \in [-2, 1] \\ (\beta + 1)x + 4\alpha & , x \in (1, 2] \end{cases}$

- B1.** Αν $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1$, να υπολογίσετε τα α, β . (9 μ)
- B2.** Αν $\alpha = -1$ και $\beta = 2$ τότε :
- i) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f . (5 μ)
- ii) Ποιο είναι το σύνολο τιμών της f ; (3 μ)
- iii) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + x}{\sqrt{-x} - 1}$ (8 μ)

Θέμα 180

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$$

- A.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- B.** Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- Γ.** Να ορίσετε την f^{-1}

Θέμα 181

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$(f(x))^3 + e^{f(x)} - 1 = x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (5 μ)

Δ2. Να βρείτε την αντίστροφη της f . (5 μ)

$$\text{Δ3. Αν } f^{-1}(x) = x^3 + e^x - 1 \quad \text{και} \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x}-1}{x-1} + \alpha x + \beta & , \quad x > 1 \\ 2\alpha x - \beta + f(0) & , \quad x \leq 1 \end{cases}$$

τότε :

i) να βρείτε το πρόσημο της f^{-1} για τις διάφορες τιμές του x . (5 μ)

ii) να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^{-1}(x) - e^x}{\eta\mu(x-1)}$ (5 μ)

iii) να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε να ισχύει : $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{7}{2}$ (5 μ)

Θέμα 182

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x^2-2x} & , \quad x > 2 \\ \alpha x + \beta & , \quad 1 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 3 & , \quad x < 1 \end{cases}$$

B1. Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$

B2. Να υπολογίσετε τα α, β ώστε να υπάρχουν τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

B3. Για κάθε $x \in (2, +\infty)$ να δείξετε ότι : $f(x) = 1 + \frac{2}{x}$

B4. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(2, +\infty)$.

B5. Αν $\alpha = 4$ και $\beta = -6$ να βρείτε τα σημεία τομής της C_f

με τους άξονες συντεταγμένων.

Θέμα 183

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 2$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

Γ2. Να βρείτε το διάστημα στο οποίο η γραφική παράσταση της f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$. (5 μ)

Γ3. Να λύσετε την ανίσωση : $x^{12} + x^4 < 16^3 + 16$ (5 μ)

Γ4. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\eta\mu(x-1)}$ (5 μ)

Γ5. Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(f(x)) \cdot (x-1)}{(f(x))^2}$ (5 μ)

Θέμα 184

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

f γνησίως φθίνουσα στο $[0, \sqrt{5}]$, f γνησίως αύξουσα στο $[\sqrt{5}, +\infty)$

$f(1) = f(3) = 0$ και f άρτια.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο. (10 μ)

Δ2. Αν $f(x) = (x^2 - 1)(x^2 - 9)$ τότε :

i) να δείξετε ότι η f δεν αντιστρέφεται. (5 μ)

ii) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \eta\mu\left(\frac{1}{x-3}\right)$ (5 μ)

iii) να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{\sqrt{x+1} - 2}$ (5 μ)

Θέμα 185

Δίνεται η συνάρτηση f με:

$$f(x) = -2x^3 - 3x - 1$$

A. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f .

B. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Γ. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f^{-1}(x) = 2.$$

Θέμα 186

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{-x^2 + x + 1}{1-x}$, $x \in (1, +\infty)$

Δ1. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. (5 μ)

Δ2. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (5 μ)

Δ3. Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^+} [(\sqrt{x} - 1)f(x)]$ (5 μ)

Δ4. Να δείξετε ότι $f(x) = x + \frac{1}{1-x}$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$. (5 μ)

Δ5. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (5 μ)

Θέμα 187

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\mu^2 - 4)x^3 + (\mu - 2)x + 1}{x + 1}$, $x \in (-1, +\infty)$.

Γ1. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε

το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (10 μ)

Γ2. Αν $\mu = 2$ τότε :

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (5 μ)

ii) Να λύσετε την εξίσωση : $f(x) + e^{-x} - 2 = 0$ (5 μ)

iii) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ (5 μ)

Θέμα 188

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x, x \in \mathbb{R}$$

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$3^x + 4^x = 5^x.$$

Θέμα 189

Δ1. Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2f(x)}{f(x) + 5x + 1}$ (5 μ)

Δ2. Αν $f(x) = 2x + 4$ τότε :

i) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{f(x)}{2}} - \sqrt{2f(x)} \right)$ (5 μ)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^{x+2}) - f(-x-1) < 0$ (5 μ)

iii) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{(x+2)^3}$ (5 μ)

iv) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)}{\sqrt{x+3} - 1}$ (5 μ)

Θέμα 190

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & , \quad x \in (-\infty, 2) \\ \frac{x^2 - 16}{x-4} & , \quad x \in [2, 4) \\ \sqrt{x^2 + x + 1} & , \quad x \in [4, +\infty) \end{cases}$

B1. Να υπολογίσετε τα: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (6 μ)

B2. Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια. (5 μ)

B3. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 21x)$ (4 μ)

B4. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \lambda x)$ (5 μ)

B5. Για τις διάφορες τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ να υπολογίσετε το

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\mu x^2 + x + 1)f(x)]$ (5 μ)

Θέμα 191

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{16\sqrt{x} - 16\alpha}{x^2 - 4x} & , x > 4 \\ \alpha x + \beta & , x \leq 4 \end{cases}$

Γ1. Να υπολογίσετε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. (9 μ)

Γ2. Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -7$ τότε να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

i) $\lim_{x \rightarrow \frac{7}{2}} \frac{f(x)}{\left(x - \frac{7}{2}\right)^3}$ (4 μ)

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{\sqrt{x} - 1}$ (4 μ)

iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[f(x) \eta \mu \left(\frac{1}{f(x)} \right) \right]$ (4 μ)

iv) $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \eta \mu \left(\frac{1}{f(x)} \right) \right]$ (4 μ)

Θέμα 192

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x+1} - e$

Δ1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (5 μ)

Δ2. Να βρείτε την αντίστροφη της f . (5 μ)

Δ3. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 + f(x) = 0$ (5 μ)

Δ4. Να λύσετε την ανίσωση $x^3 - x^6 < f(x^2) - f(x)$ (5 μ)

Δ5. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{(e^{2x} - 1)x^2}$ (5 μ)

Θέμα 193

Δ1. Έστω $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής με $f(21) < 21$ και $(f(x) - x)^2 = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της f . (6 μ)

Δ2. Έστω $f(x) = x - \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, \sqrt{3})$

τέτοιο ώστε $2f(x_0) - \sqrt{3} + 3 = 0$. (6 μ)

β) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (4 μ)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$. (3 μ)

δ) Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + f(x)}{x}$ (6 μ)

Θέμα 194

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = x + \frac{1}{x}, \quad x \geq 1$$

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(f(x)) = \frac{5}{2}.$$

1. ΘΕΜΑ 2 – 29830

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{9-x^2}$ και $g(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τις συναρτήσεις:

i. $f \cdot g$

(Μονάδες 7)

ii. $\frac{f}{g}$

(Μονάδες 8)

2. ΘΕΜΑ 2 – 29831

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση $g(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης g είναι το διάστημα $(-1, 1)$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g$.

(Μονάδες 8)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $(f \circ g)(x) = -\frac{1}{x}$, να αποδείξετε ότι $f(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

(Μονάδες 10)

3. ΘΕΜΑ 2 – 35168

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g και h ώστε :

$$f(x) = \ln(1 + e^x), \quad g(x) = 2\ln x \quad \text{και} \quad h(x) = \ln(1 + x^2).$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .

(Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$.

(Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις $f \circ g$ και h είναι ίσες.

(Μονάδες 8)

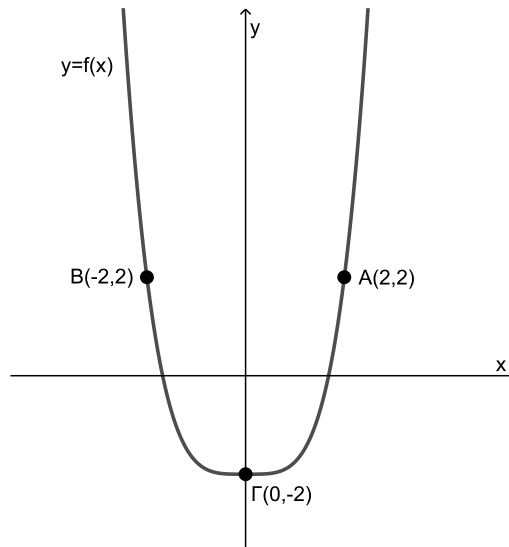
4. ΘΕΜΑ 2 – 28304

Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, διέρχεται από τα σημεία $A(2, 2)$, $B(-2, 2)$ και $\Gamma(0, -2)$. Έστω επίσης η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = |x|$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$, $f(-2)$ και $f(0)$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές $(g \circ f)(2)$, $(g \circ f)(-2)$ και $(g \circ f)(0)$. (Μονάδες 8)

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f φαίνεται παρακάτω. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g \circ f$. (Μονάδες 9)



5. ΘΕΜΑ 2 – 26637

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x}$ και $g(x) = \ln x$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f \cdot g$. (Μονάδες 9)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $\frac{f}{g}$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρεθούν οι τετμημένες των σημείων τομής των γραφικών παραστάσεων

των συναρτήσεων $f \cdot g$ και $\frac{f}{g}$, που ορίσατε στα ερωτήματα (α) και (β). (Μονάδες 7)

6. ΘΕΜΑ 2 – 29835

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = 2 - x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 5)

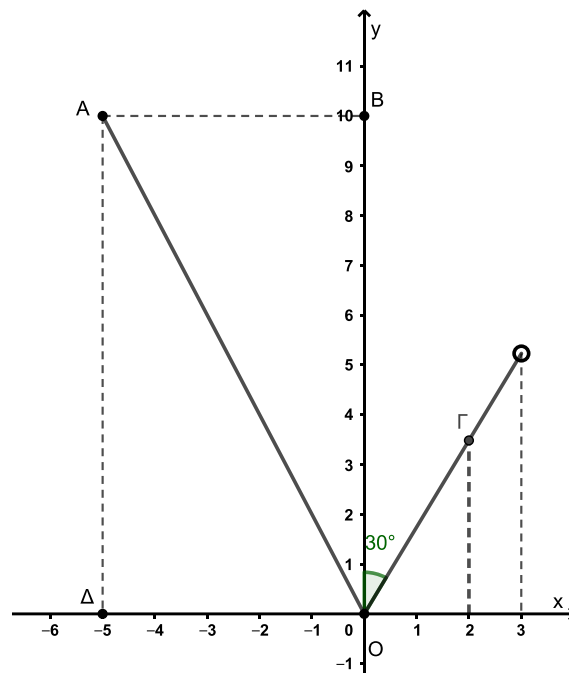
β) Να αποδείξετε ότι για $x \in (-\infty, 3]$ η $(f \circ g)(x) = \sqrt{3-x} - 1$. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $\varphi(x) = (f \circ g)(x)$ είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την αντίστροφή της.

(Μονάδες 10)

7. ΘΕΜΑ 2 – 26603

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

γ) Ποιες είναι οι συντεταγμένες του σημείου Γ ; (Μονάδες 5)

8. ΘΕΜΑ 2 – 27317

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $x \in [0, 2]$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία στο $[0, 2]$ (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το σύνολο τιμών της f είναι το $[0, 2]$. (Μονάδες 05)

ii. Ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f . (Μονάδες 03)

iii. Οι συναρτήσεις f και f^{-1} είναι ίσες. (Μονάδες 07)

9. ΘΕΜΑ 2 – 35171

Δίνονται οι συναρτήσεις g και h ώστε : $g(x) = 2\ln x$, $x > 0$ και $h(x) = \ln(1 + x^2)$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη (Μονάδες 5)

ii. $g^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}}$, με $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $h \circ g^{-1}$. (Μονάδες 10)

10. ΘΕΜΑ 2 - 35170

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g ώστε:

$$f(x) = \ln(1 + e^x) \text{ και } g(x) = 2\ln x.$$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 8)

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f + g$. (Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f + g$ ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 9)

11. ΘΕΜΑ 2 – 29926

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με $f(x) = \ln(x-2) + 5$ για κάθε $x > 2$ και $g(x) = 2x-1$ με $x \in \mathbb{R}$.

α)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι αντιστρέψιμη. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση g^{-1} . (Μονάδες 7)

β)

i. Να προσδιορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f \circ g^{-1}$. (Μονάδες 6)

12. ΘΕΜΑ 2 - 32695

Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$, σύνολο τιμών το $[-\frac{1}{2}, 1)$ και τύπο $f(x) = 1 - \frac{3}{\sqrt{x} + 2}$.

Δίνεται επίσης η συνάρτηση g με πεδίο ορισμού το $[-\frac{1}{2}, 1)$, σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$ και τύπο

$$g(x) = \left(\frac{1+2x}{1-x} \right)^2. \text{ Με δεδομένο ότι η συνάρτηση } f \text{ είναι 1-1,}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f .

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) < 0$ και $g(x) > 0$ για κάθε x που ανήκει στο $[0, 1)$.

(Μονάδες 06)

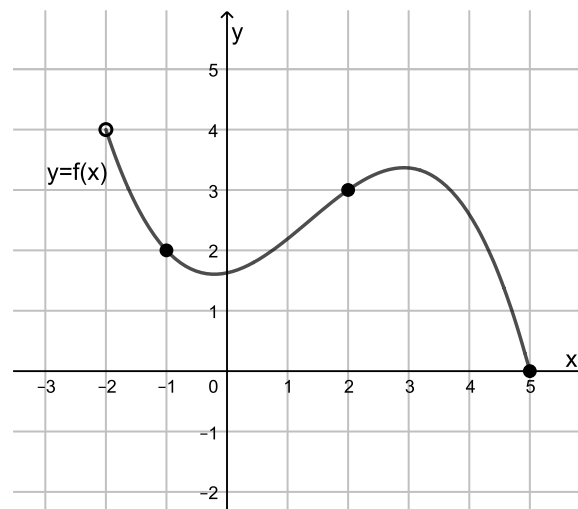
γ) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_f , C_g των συναρτήσεων f , g αντίστοιχα δεν έχουν κοινά σημεία.

(Μονάδες 07)

13. ΘΕΜΑ 2 - 28300

Έστω μια συνάρτηση f της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη γραφική παράσταση της f να βρείτε:

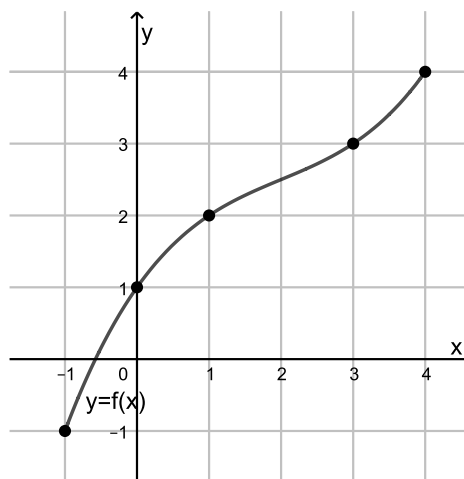
- α) το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f , (Μονάδες 6)
- β) τις τιμές $f(-1)$, $f(2)$ και $f(5)$, (Μονάδες 6)
- γ) το ολικό μέγιστο και το ολικό ελάχιστο της f , εφόσον υπάρχουν, (Μονάδες 7)
- δ) την τιμή της σύνθεσης $f \circ f$ στο -1 . (Μονάδες 6)



14. ΘΕΜΑ 2 – 28299

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A = [-1, 4]$ και με γραφική παράσταση C_f που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Μελετώντας τη C_f :

- α) να δικαιολογήσετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f , (Μονάδες 8)
- β) να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με την ευθεία $y = x$, (Μονάδες 8)
- γ) να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f^{-1} . (Μονάδες 9)



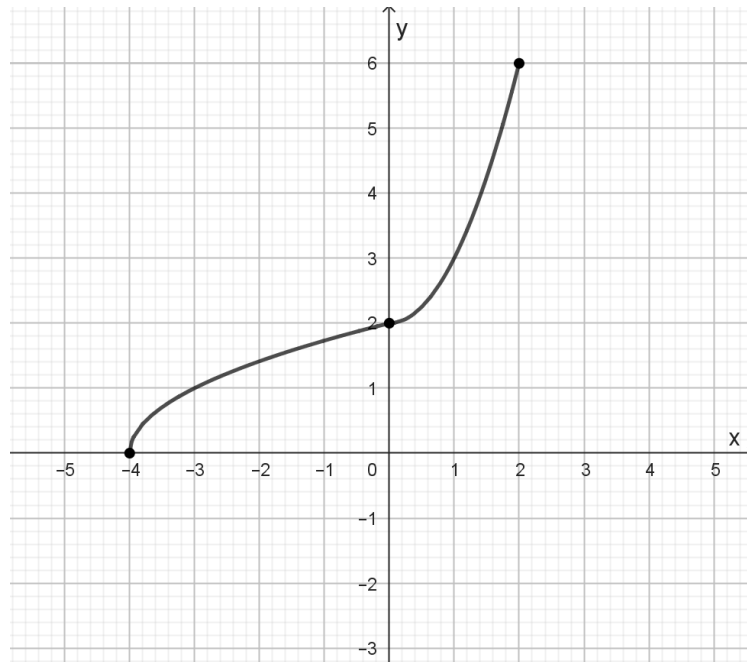
15. ΘΕΜΑ 2 - 27277

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της αντίστροφης μιας συνάρτησης f . Με τη βοήθεια του σχήματος να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f^{-1}(f(6))$. (Μονάδες 8)

γ) Στο σύστημα αξόνων που ακολουθεί να χαράξετε την γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 7)



16. ΘΕΜΑ 2 - 31528

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - e^{-x})$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

(Μονάδες 14)

β) Να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 11)

17. ΘΕΜΑ 2 - 26602

Δίνονται οι συναρτήσεις f και g , με $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ και $g(x) = x - 2$.

α) Να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

β) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f και h , με $h(x) = |g(x)|$. (Μονάδες 7)

γ) Με τη βοήθεια των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων ή με όποιο άλλο τρόπο θέλετε, να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τις συναρτήσεις f και h . (Μονάδες 10)

18. ΘΕΜΑ 2 - 24991

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = -2\ln x + 1$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

(Μονάδες 08)

β) Να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

(Μονάδες 09)

γ) Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = 1 - \ln x^2$. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g δεν είναι ίσες και στη συνέχεια να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f = g$.

(Μονάδες 08)

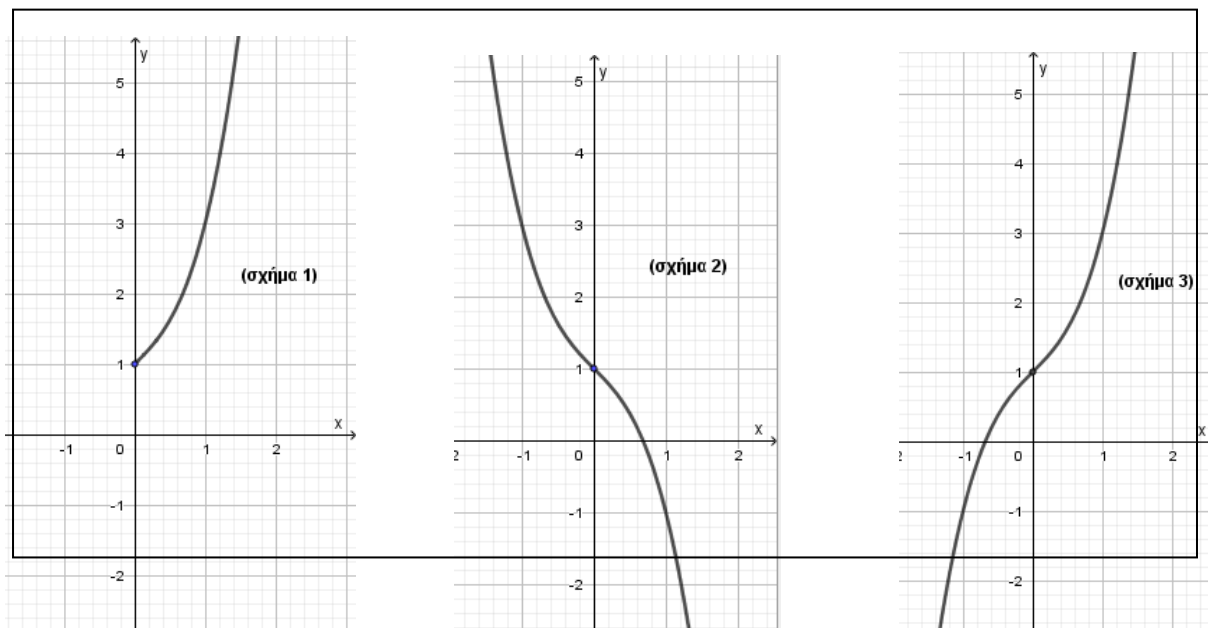
19. ΘΕΜΑ 2 - 23642

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x^3 + x + 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 07)

β) Ένα από τα παρακάτω σχήματα παριστάνει την γραφική παράσταση της συνάρτησης f . Να βρείτε ποιο είναι και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



(Μονάδες 07)

γ)

i. Να παραστήσετε γραφικά την συνάρτηση $|f|$.

(Μονάδες 06)

ii. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $|f|$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $|x^3 + x + 1| = 2023$.

(Μονάδες 05)

20. ΘΕΜΑ 2 - 23198

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x} - 1, x \geq 0$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 9)

Έστω $f^{-1}(x) = (x+1)^2, x \geq -1$

γ) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων τις γραφικές παραστάσεις των f, f^{-1} .

(Μονάδες 9)

21. ΘΕΜΑ 2 - 24569

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{1 - \sqrt{1 - x}}$.

α) Να αποδείξετε ότι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $D_f = [0,1]$.

(Μονάδες 05)

β)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι “1 – 1”.

(Μονάδες 10)

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(f(x)) = 0, x \in [0,1]$.

(Μονάδες 10)

22. ΘΕΜΑ 2 - 23216

Έστω συνάρτηση f γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,0)$ και $B(0,8)$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε για ποιες τιμές του x η C_f είναι κάτω από τον άξονα xx' και για ποιες είναι πάνω από τον xx' .

(Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(\ln x) > 0$

(Μονάδες 10)

23. ΘΕΜΑ 2 – 28477

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με $f(x) = e^{3x+2}, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = \ln x^2$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .

(Μονάδες 04)

β) Να βρείτε την συνάρτηση $g \circ f$.

(Μονάδες 08)

γ) Αν $g(f(x)) = 6x + 4, x \in \mathbb{R}$ τότε να υπολογίσετε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(g \circ f)(x) - \eta \mu^2 x - 4}{x}$$

(Μονάδες 13)

24. ΘΕΜΑ 2 – 24768

Θεωρούμε τις συναρτήσεις με τύπους $f(x) = x^2 - x + 1$ και $g(x) = \sqrt{4x - 3}$.

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) \geq \frac{3}{4}$. (Μονάδες 6)

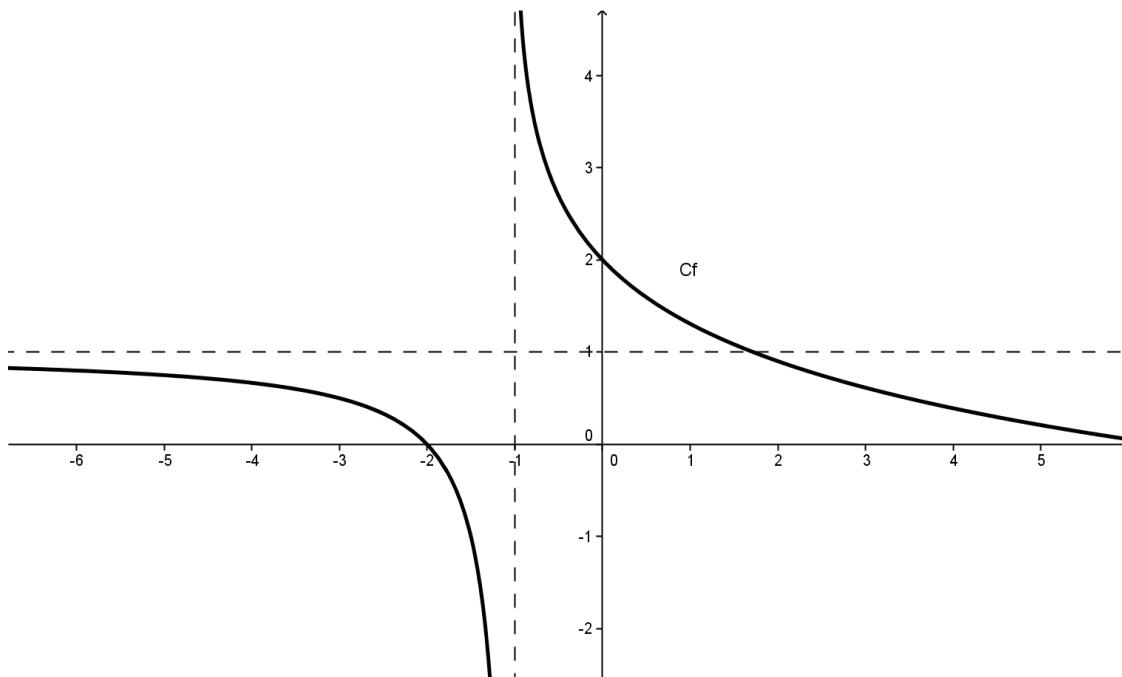
β) Να βρείτε τη συνάρτηση $h = g \circ f$. (Μονάδες 9)

γ) Αν $h(x) = |2x - 1|$ είναι η σύνθεση του ερωτήματος β), να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - 1}{\sqrt{x + 1} - 1}$ (Μονάδες 10)

25. ΘΕΜΑ 2 – 23314

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f , για την οποία γνωρίζουμε ότι είναι συνεχής και τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη -2

και τον άξονα $y'y$ σε ένα μόνο σημείο με τεταγμένη 2.



α) Από την γραφική παράσταση ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, να προσδιορίσετε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 6)

ii) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \ln(f(x))$ (Μονάδες 7)

και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

26. ΘΕΜΑ 2 – 23217

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln(x-1)$ και $g(x) = \frac{1}{x-1}$.

α) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα παρακάτω όρια αιτιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ (Μονάδες 7)

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε

i. το πεδίο ορισμού της $f \cdot g$ (Μονάδες 4)

ii. το $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) \cdot g(x))$. (Μονάδες 6)

27. ΘΕΜΑ 2 - 23196

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι αντιστρέφεται.

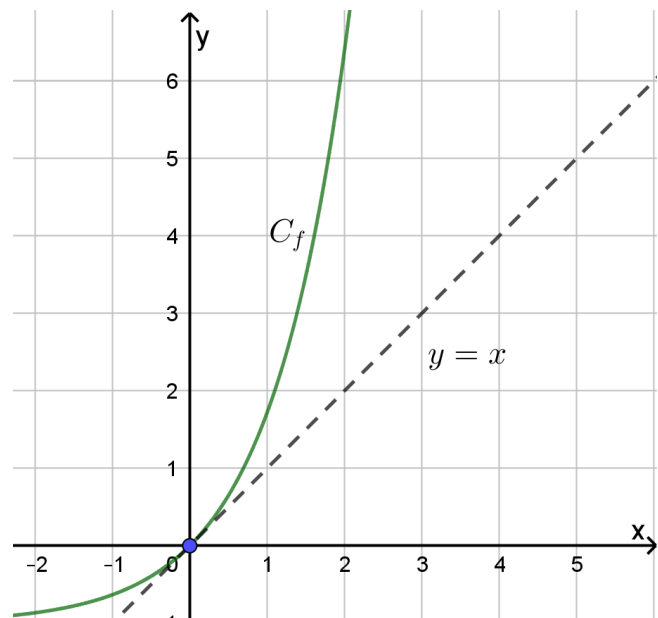
(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 9)

γ) Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f και της ευθείας $y=x$, η οποία εφάπτεται της C_f στο μοναδικό κοινό τους σημείο, την αρχή των αξόνων. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .

(Μονάδες 9)



28. ΘΕΜΑ 2 - 23641

Δίνεται η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) < f(x)$.

(Μονάδες 08)

β) Αν $\alpha^2 < \alpha$, τότε να αποδείξετε ότι

$\lim_{x \rightarrow +\infty} ([f(\alpha^2 - \alpha) - f(0)] x) = -\infty$ (Μονάδες 09)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(e^x - 1) = f(0)$.

(Μονάδες 08)

29. ΘΕΜΑ 2 - 34024

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^{2x}}$. Χωρίς να χρησιμοποιήσετε γραφική παράσταση:

α) Να βρείτε

i. Την μονοτονία της συνάρτησης f . (Μονάδες 8)

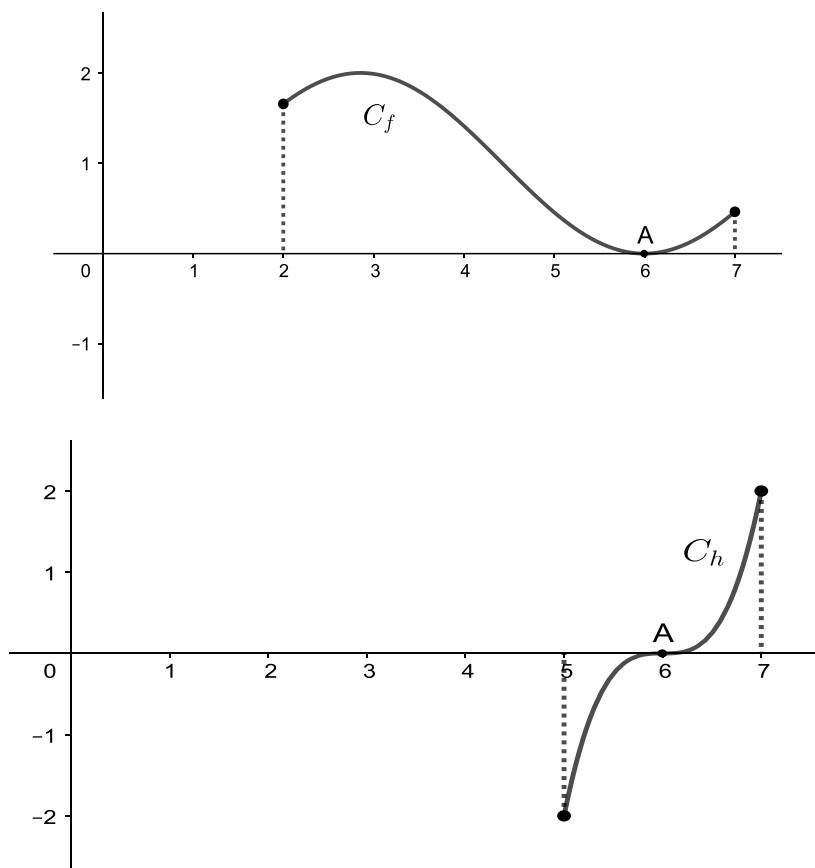
ii. Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f . (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 3$ έχει ένα μόνο κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της f .

(Μονάδες 8)

30. ΘΕΜΑ 2 – 36839

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 συνεχών συναρτήσεων των f και h , οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h .

(Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο πεδίο ορισμού τους. (Μονάδες 10)

ii. Παίρνουν την τιμή 0 σε ένα εσωτερικό σημείο του πεδίου ορισμού τους. (Μονάδες 09)

31. ΘΕΜΑ 4 – 29838

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία για κάθε $x \neq 0$ ισχύει:

$$xf(x) + \sigma \nu \nu x = 1 - x^2 \eta \mu \frac{1}{x}.$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \sigma \nu \nu x}{x} = 0$ (Μονάδες 4)

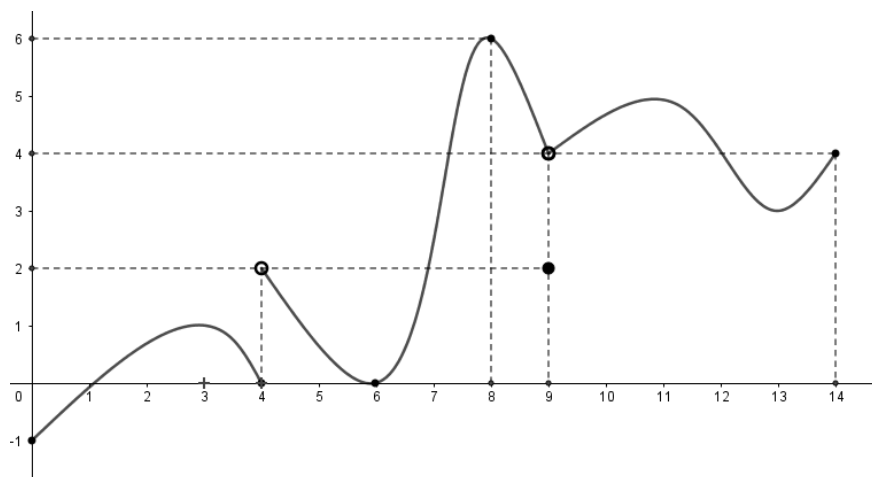
ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{\pi}, +\infty\right)$. (Μονάδες 7)

32. ΘΕΜΑ 2 – 27318

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο έξι και ο οριζόντιος άξονας εφάπτεται στη γραφική της παράσταση στο σημείο αυτό.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και να βρείτε τα παρακάτω όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

iii. $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$

iv. $\lim_{x \rightarrow 14} f(x)$

v. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{1}{f(x)}$

Για τα όρια που δεν υπάρχουν να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

γ) Να βρείτε τα σημεία στα οποία η f δεν είναι συνεχής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 07)

33. ΘΕΜΑ 2 – 29834

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{9x^2 + 16} - \frac{5}{2} \ln(8x + 1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι $f(0) > 0$ και $f(1) < 0$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

(Μονάδες 9)

34. ΘΕΜΑ 4 – 26640

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + x^3 + 2x$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 8)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να αποδείξετε ότι έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι επίσης γνησίως αύξουσα.

(Μονάδες 5)

δ) Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$.

(Μονάδες 5)

35. ΘΕΜΑ 2 – 31548

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $|f(x) - 2x| \leq (x-1)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι :

α) $f(1) = 2$.

(Μονάδες 10)

β) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

(Μονάδες 10)

γ) η f είναι συνεχής στο 1.

(Μονάδες 5)

36. ΘΕΜΑ 3 – 28684

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, τέτοια ώστε

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \kappa, \text{ με } \kappa \in \mathbb{R}.$$

Αν επιπλέον ισχύει ότι $xf(x) \leq \eta\mu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε

α) Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} = 2$

(Μονάδες 04)

β) Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε το $f(0)$.

(Μονάδες 04)

δ) Να ελέγξετε την αλήθεια του παρακάτω ισχυρισμού:

$$\left| f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \right| = -f(x) \cdot \frac{\varepsilon\varphi x}{x} \text{ κοντά στο } 0$$

Να δικαιολογήσετε τον ισχυρισμό σας.

(Μονάδες 08)

37. ΘΕΜΑ 2 – 25749

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $D_f = [0, 2) \cup (2, 3) \cup (3, 5]$, η οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ σε δύο μόνο σημεία, με συντεταγμένες $(0, 0)$ και $(4, 0)$. Επίσης, δίνεται ότι $f(1) = 1$.

Με βάση το παρακάτω σχήμα:

α) να βρείτε τα σημεία ασυνέχειας της f αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

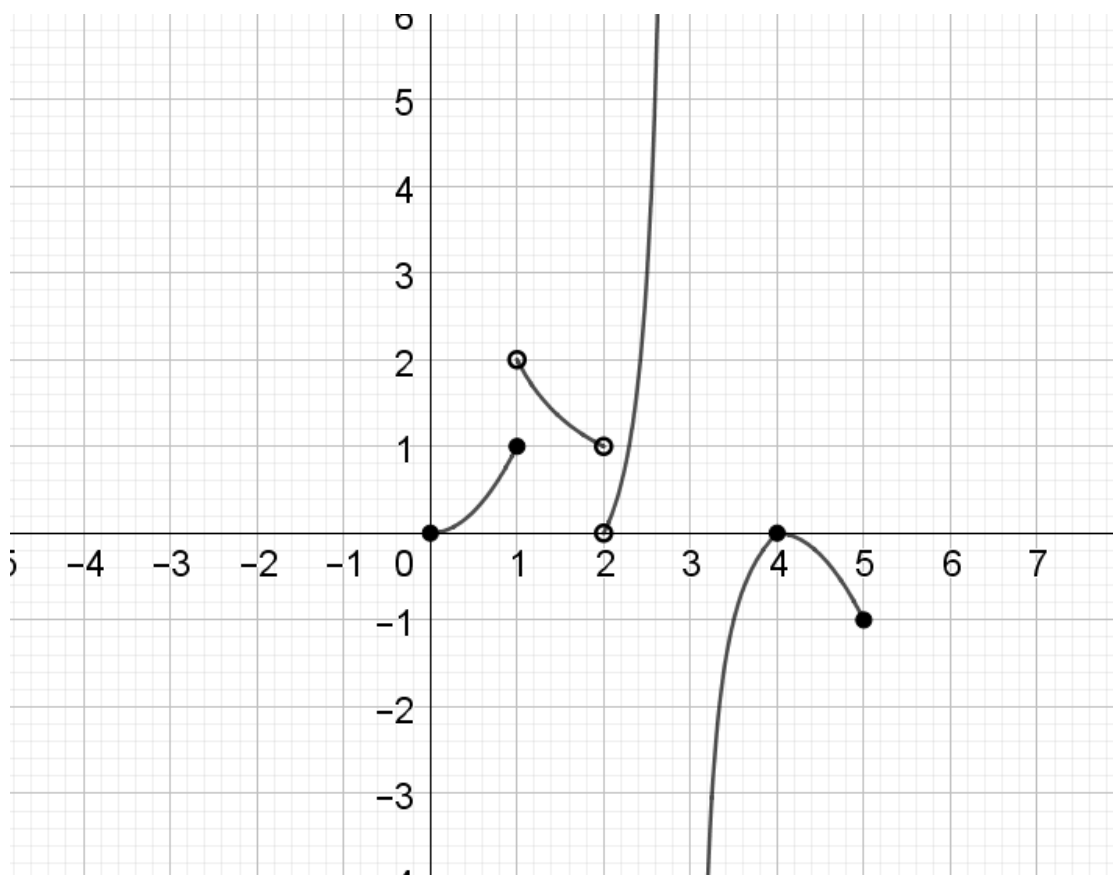
β) να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $[0, 1]$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) να βρείτε τα παρακάτω όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$

ii. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{f(x)}$

(Μονάδες 10)



38. ΘΕΜΑ 3 – 24761

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2023 - \frac{\eta\mu x}{x}, & x \neq 0 \\ \alpha, & x = 0 \end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 2022$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2022$. (Μονάδες 10)

39. ΘΕΜΑ 2 – 23209

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2 - 1$, $x \leq 1$.

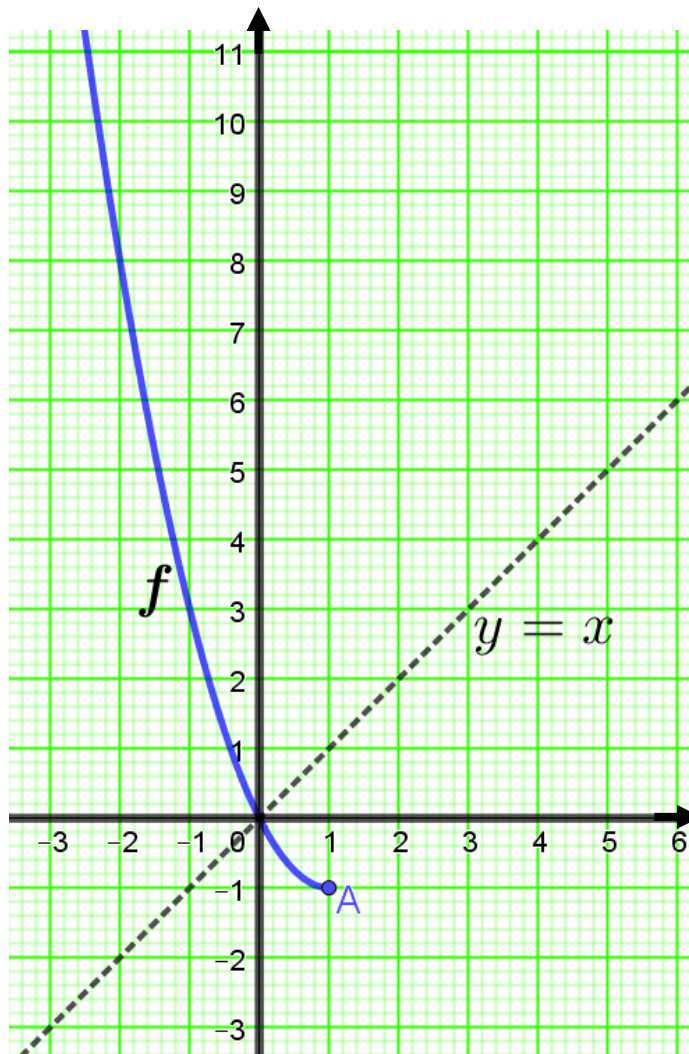
α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 1]$.

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει η συνάρτηση f^{-1} και να μεταφέρετε στην κόλλα σας ή στο φύλλο απαντήσεων το παρακάτω σχήμα με την γραφική παράσταση της f και το οποίο να συμπληρώσετε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1} .



(Μονάδες 8)

40. ΘΕΜΑ 2 – 24767

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

(Μονάδες 12)

41. ΘΕΜΑ 4 – 23106

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1-x^2}$, $x \in [-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f , ορισμένη στο $[0, \pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε: $(g \circ f)(x) = |\sin x|$, για κάθε $x \in [0, \pi]$.

α)

i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta \mu x|$. (Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. (Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f . (Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h: (0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x)-x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου

ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) \quad (\text{Μονάδες 07})$$

42. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 1]$.

Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x^2)$ β) $f(x-4)$ γ) $f(\ln x)$

43. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι περιττή. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[-\beta, -\alpha]$.

44. α) Για κάθε $\alpha > 0$, να δείξετε ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x}$ με $x > 0$.

45. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, $f \cdot g$.

γ) Χρησιμοποιώντας τις f, g να δικαιολογήσετε ότι $(g \circ f)(x) \neq g(x) \cdot f(x)$.

δ) Να εξετάσετε αν για τις παραπάνω συναρτήσεις f, g οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι ίσες.

46. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f .

47. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + 1}{x^2 - 1}, & x < -1 \\ \ln(x + \beta), & x \geq -1 \end{cases}$$

να έχει όριο πραγματικό αριθμό στο $x_0 = -1$.

48. Δίνεται η συνάρτηση f με $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \eta \mu \frac{\pi(x-1)}{2} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\pi}{2}. \text{ Να υπολογίσετε τα όρια:}$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \qquad \beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$$

49. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \text{ της } f(x) = \frac{x-2}{(x-1)(x+2)} \text{ στο } x_0 = -2$$

$$\beta) \text{ της } f(x) = \frac{x^3 + x^2}{|x+1|} \text{ στο } x_0 = -1$$

50. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να βρείτε τα όρια της f στα άκρα του D_f .
- γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f .
- δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f αφού πρώτα αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

51. Αν $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

52. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x-1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

- α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.
- β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 - 1.
- γ) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f^{-1} .
- δ) Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων f και f^{-1} .

53. Να δείξετε ότι:

- α) η εξίσωση $(x+1)2^{x+1} = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 0)$
- β) η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.

54. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

55. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x$ και $g(x) = \sin 2x$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(0, \frac{\pi}{4})$.

56. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$$

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 έτσι ώστε $f(x_0) = \frac{3}{2}$.

58. Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $[\alpha, \beta]$, τότε

α) να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$

τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$

β) να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό.

59. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln x_0 = 1.$$

60. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(x) = x^5 + x + 1$, $x \in [-1, 0]$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

61. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 2)x^3 + (\mu + 1)x + 1}{\mu x^2 + 1}, \text{ αν } \mu \in \mathbb{R}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \lambda x - \mu), \text{ αν } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x}{\alpha^x + 1}, \text{ αν } \alpha > 0$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x + 2^{x+1}}{\alpha^{x+1} + 2^x}, \text{ αν } \alpha > 0$$

62. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta \mu \frac{1}{x})$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \eta \mu \frac{1}{x})$$

63. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = \ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.

β) Να μελετήσετε την $f \circ g$ ως προς τη μονοτονία.

γ) Να βρεθεί (στην περίπτωση που υπάρχει) η $(f \circ g)^{-1}$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{f(x) - 2}{x^2 + x - 6}$

64. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων :

$$\alpha) f(x) = \frac{2x-6}{\sqrt{x^2-x-2}}$$

$$\beta) g(x) = \frac{\sqrt{x^2-4}}{x-6}$$

$$\gamma) h(x) = \frac{e^x}{(x^2-1)^2 + x^2 - 2x + 1}$$

65. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f \circ g$ όταν $f(x) = \sqrt{1-x}$ και $g(x) = -x^2 + 2x$

66. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2 + 1})$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{2004^2 x^2 + 1}}{x}$$

67. Να εξετάσετε αν υπάρχουν τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right)$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{1}{x-2} \left(\frac{2}{x^2-4} - \frac{1}{x-2} \right) \right]$$

68. Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\text{να υπολογίσετε το όριο : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda^2 - 4)x^5 + (\lambda - 2)x^3 + x + 1}{(\lambda + 2)x^3 + 2x^2 + 3x + 1}$$

69. Δίνεται η συνάρτηση :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{1-\sqrt{x}}, & 0 \leq x < 1 \\ \gamma, & x = 1 \\ ax + \beta, & x > 1 \end{cases}, \text{ με } a, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$$

Αν η C_f διέρχεται από το σημείο $A(2, -1)$ και η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να προσδιορίσετε τις τιμές των a , β και γ .

70. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 5x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

71. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει : $|x \cdot f(x) - \eta \mu x| \leq \eta \mu^2 x$. Να βρείτε το $f(0)$.

72. Δίνεται η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{2-x}}{2x^2+x-3}, & x \in (1, 2] \\ \beta + 5, & x = 1 \\ \frac{\alpha \eta \mu(8x-8)}{x-1}, & x < 1 \end{cases}$$

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

β) Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

73. Δίνονται $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ και $g(x) = \frac{1}{2}$ ορισμένες στο $[0, \sqrt{e-1}]$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g .

74. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{(x-3)^2} + 5, & x < 3 \\ -\frac{1}{(x-3)^2}, & x > 3 \end{cases}$$

75. Η συνάρτηση f ικανοποιεί τη σχέση $f(f(x)) + (f(x))^3 = 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) = f(4 - x)$.

76. α) Να μελετήσετε τη μονοτονία της $f(x) = \alpha^x - x$, $0 < \alpha < 1$

β) Αν $0 < \alpha < 1$, να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που ικανοποιούν τη σχέση :

$$\alpha^{\lambda^2-4} - \alpha^{\lambda-2} = (\lambda^2 - 4) - (\lambda - 2)$$

77. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης :
$$f(x) = \begin{cases} e^x + 3, & x \in (-\infty, 0] \\ -\ln x + 8, & x \in (0, e) \end{cases}$$

78. Δίνεται η $f(x)=x^3$ με πεδίο ορισμού το $[0,+\infty)$ και η συνάρτηση $g(x)=\ln(x^2-1)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της g .

β) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$

γ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-1}{f(x)-2x+1}$

79. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2e^{1-x}+3$.

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία .

β) Να βρεθεί η αντίστροφη της f στην περίπτωση που υπάρχει

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f(3x^2+1) < f(x^2+x+2)$

80. Έστω $f(x)=\ln(1-x)$ και $g(x)=\sqrt{x}$. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

81. Έστω $f(x)=x^3+x+1$. Να λύσετε την ανίσωση : $f(2x^4+x^2) > f(x^3+2x^2)$

82. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Δείξτε ότι αν η $f \circ g$ είναι «1-1» τότε και η g είναι «1-1».

Αποδείξτε ότι δεν ισχύει το αντίστροφο.

83. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\frac{2^x}{1+2^x}$.

Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση .

84. Έστω $f:[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(\alpha) \neq f(\beta)$.

Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ ώστε $f(\xi) = \frac{f(\alpha) + 2f(\beta)}{3}$

85. Αν για κάθε $x \in [-2, 2]$ η συνάρτηση f είναι συνεχής και ισχύει $3(x^2-1) + 4f^6(x) = 9$ να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2, 2)$.

86. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln(x^2-1)$ και $g(x)=e^x$.

Να βρείτε τις $f \circ g$ και $g \circ f$

87. Δίνεται συνάρτηση f γνησίως αύξουσα σ' όλο το $\mathbb{R}$

$$\text{και η συνάρτηση } h(x) = f(-2x+1) - f(e^x) .$$

α) Να δείξετε ότι η h είναι γνησίως φθίνουσα .

$$\beta) \text{ Να λύσετε την εξίσωση } f(-2\ln x + 1) - f(x) = f(-1) - f(e) .$$

γ) Να δείξετε ότι $h(x) < 0$ για κάθε $x > 0$.

δ) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των f και h έχουν το πολύ ένα κοινό σημείο .

88. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3 .$$

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

89. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 2x^{2011} + 5x - 7, x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .

90. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

91. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2 \ln(\sqrt{x-1} + 1) + 3$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι "1-1".

iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x) = 2$.

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2$$

92. Δίνεται η συνάρτηση f με

i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2025.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $3x2^x + 2^x < 1$

93. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, όταν:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{f(x)} = +\infty$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{4x + 3} = -\infty$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(3x + 4)] = +\infty$

94. Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbf{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2, -1)$.
- $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbf{R}$.

β) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 5)$.

γ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = -\infty$

95. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbf{R}$ με τύπο: $f(x) = 2x^4 + 3 \ln x + 1$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda > 0$ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda}$$

96. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{x^3 + 3x}{x^2 + 3}$ και $g(x) = (x+1)^2 - x^2 - x - 1$

97. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f - g$ και $g \circ f$.

98. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x^2 - 2x} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 4x}{\sqrt{x+1} - 1} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{\sqrt{x}} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x - 2}{1 - x^2}$$

99. Δίνεται η $f(x) = \begin{cases} \alpha x + \beta & , x \leq 1 \\ \beta x^2 - \alpha & , x > 1 \end{cases}$

Αν $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, να βρείτε τα α, β και στη συνέχεια

να εξετάσετε αν υπάρχει το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$.

100. Δίνονται συναρτήσεις f, g συνεχείς στο $\mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει

$$5f(2) < g(2) + 1 \text{ και } 10f(3) > g(3) + 1 .$$

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2, 3)$

$$\text{τέτοιο ώστε } f(\xi) = \frac{g(\xi) + 1}{\xi^2 + 1} .$$

101. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f με $D_f = (-\infty, 2)$ για την οποία ισχύει

$$[f(-1)]^3 f(0) < -f(-1)f(0) .$$

Για $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 \neq x_2$ ισχύει $(x_1 - x_2)(f(x_1) - f(x_2)) < 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (-1, 0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$.

γ) Να υπολογίσετε (αν υπάρχουν) τα όρια :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{x}{f(x)} - \frac{1}{[f(x)]^2} \right]$$

δ) Αν επιπλέον είναι γνωστό ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = -x + \frac{1}{x-2}$

να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

102. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$$xf(x) = 2x + 3\eta\mu x \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε το $f(0)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

103. Αν είναι $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x] = 5$ βρείτε τον $\mu \in \mathbb{R}$ αν $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\mu f(x) + 4x}{xf(x) - 2x^2 + 3x} = 1$

104. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $(f \circ f)(x) = -x^3 - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι :

α) Η f είναι «1-1» β) Η f δεν είναι γνησίως μονότονη

105. Έστω f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Έστω επιπλέον ότι για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει

$$2025 + (7 - x^8)f(x) \leq 1975 + f(x) .$$

α) Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $[\alpha, \beta]$.

β) Αν $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > 0$ να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$.

γ) Αν $f(\alpha) = \frac{2025}{49}$ και $f(\beta) = \frac{2025}{29}$ να αποδείξετε ότι υπάρχει

τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = \frac{2025}{39}$.

106. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη

ΣΩΣΤΟ ή **ΛΑΘΟΣ** .

1) Αν $f(\alpha)f(\beta) > 0$ και f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, τότε δεν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε : $f(x_0) = 0$.

2) Όταν μια συνάρτηση είναι 1-1 στο A τότε είναι γνησίως μονότονη στο A .

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\eta\mu 2x}{x} + \frac{\eta\mu 3x}{x} \right) = 3$$

4) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ τότε $f(x) > 0$ κοντά στο x_0 .

5) Για κάθε συνάρτηση f ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 f(x)) = 0$

107. Να υπολογίσετε τα όρια :

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x}{x-2} - \frac{3}{(x-2)^2} \right) \qquad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2x - \sqrt{9x^2 - x + 1} \right)$$

108. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^{x-3} = 3 - x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(2, 3)$.

109. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln(x-2) = 4 - 3e^x$ έχει ακριβώς μία λύση .

110. Αν $10x + 11\eta\mu x \leq x f(x) \leq 3x^4 + 10x + 11\eta\mu x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

και η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, να βρείτε το $f(0)$.

111. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^3(x) + 3f(x) = 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 .

β) Να λύσετε την εξίσωση : $f(1+f(x)) = 1$.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα .

112. Να εξετάσετε αν είναι ίσες οι συναρτήσεις : $f(x) = \frac{x^3+3x}{x^2+3}$ και $g(x) = (x+1)^2 - x^2 - x - 1$

113. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ και $g(x) = \sqrt{x-3}$.

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f - g$ και $g \circ f$.

114. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας την ένδειξη

ΣΩΣΤΟ ή **ΛΑΘΟΣ** .

α) Αν μια συνάρτηση είναι 1-1 τότε είναι και γνησίως μονότονη .

β) Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε έχει το πολύ μια ρίζα .

γ) Αν η f έχει δυο ρίζες τότε είναι 1-1 .

δ) Αν $f(2) = f(5)$ τότε η f είναι 1-1 .

ε) Μια γνησίως μονότονη συνάρτηση έχει το πολύ ένα σημείο τομής με τον άξονα $x'x$.

115. Δίνεται η $f(x) = e^x + x - 1$

α) Να εξετάσετε την f ως προς τη μονοτονία .

β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $e^x + x < e + 1$.

δ) Να λύσετε την ανίσωση $f(e^x + x + 1) > 1 + e^2$.

116. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και $g(x) = f(1-x) - f(x^3 - 9)$ τότε :

α) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία.

β) Να βρείτε το διάστημα των τιμών του x , στο οποίο η C_g είναι κάτω από τον άξονα $x'x$.

γ) Να δείξετε ότι $g\left(\frac{3}{2}\right) \cdot g\left(\frac{5}{2}\right) < g(2)$

1.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{x-1}{x^2-4} \qquad \beta) g(x) = \frac{2x+3}{x^2-3x+4}$$

2

Να βρείτε το πεδίο ορισμού

$$\alpha) f(x) = \sqrt[3]{3x-1} \qquad \beta) g(x) = \sqrt{x^2-4x+3}$$

3

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \ln(x^2-1) \qquad \beta) g(x) = \log(x^3-x^2-2x+2)$$

4

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{1}{x^2-9} + \ln(x^2-5x+4) \qquad \beta) g(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}} - \frac{1}{\ln(x^3-2x^2+x-2)}$$

5

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\textbf{A)} \ f(x) = \frac{1}{x^2 - 9} \quad \textbf{B)} \ g(x) = \ln(x^2 - 3x - 4)$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\textbf{A)} \ f(x) = \sqrt{5x - 15} \quad \textbf{B)} \ g(x) = \sqrt[5]{x^2 - 25}$$

Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\textbf{A)} \ f(x) = \frac{x+2}{3x-1} \quad \textbf{B)} \ g(x) = \frac{x-3}{x^2 - 4x + 3}$$

6

Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το πεδίο ορισμού των επόμενων συναρτήσεων να είναι το $\mathbb{R}$

$$\alpha) \ f(x) = \ln(\lambda x^2 + \lambda x + \lambda - 1) \quad \beta) \ g(x) = \sqrt{2x^2 + x + \lambda - 3}$$

7

Να βρείτε τα κοινά σημεία των συναρτήσεων:

$$\textbf{i)} \ f(x) = x^2 + 1 \text{ και } g(x) = 2x \quad \textbf{ii)} \ f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \text{ και } g(x) = -\frac{1}{2x + 2}$$

8

Δίνεται η $f(x) = x^3 + x - 10$

A) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης με τους άξονες.

B) Να βρείτε το διάστημα που η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$.

9.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2(x+2)$ και $g(x) = x+2$.

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από την C_g .

10. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x + a, & \text{αν } -6 \leq x < -1 \\ x^2 + \beta, & \text{αν } -1 < x < 7 \end{cases}$$

με $f(-2) = 5$ και $f(5) = 24$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τις τιμές του a και του β .

iii) $f(-1), f(f(-3))$

iv) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3$

(Συναρτησιακές σχέσεις)

11. Έστω μια συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f\left(\frac{x}{e}\right) \leq \ln x \leq f(x) - 1 \text{ για κάθε } x > 0$$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τις τιμές:

$$f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right), f\left(f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)$$

12. Έστω μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$2f(x) - f(1-x) = x^2 + 2x - 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης f

ii) Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g(x) = f(x-2)$.

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} \text{ και } g(x) = \sqrt{x-1}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$

2

Να προσδιορίσετε τη σύνθεση $f \circ g$ αν:

$$f(x) = e^x - 1 \text{ και } g(x) = \ln(x-1)$$

3

Να προσδιορίσετε τη σύνθεση $f \circ g$ και την $g \circ f$ αν:

$$f(x) = \sqrt{x-2} + 1 \text{ και } g(x) = x + 2$$

4

Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{1}{\ln(x-1)+1} \text{ και } g(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

A. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των f, g

B. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$ και $\frac{f}{g}$

Γ. Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$

1. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \ln x - 1 \text{ και } g(x) = \frac{1}{e^x - 1}$$

- α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- β) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.
- γ) Να βρείτε τα σημεία τομής των συναρτήσεων f και g (αν υπάρχουν).
- δ) Να βρείτε τα σημεία τομής των f και g με τους άξονες.

2. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} \text{ και } g(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 - x}$$

- α) Να εξετάσετε σε ποιο σύνολο οι συναρτήσεις f, g είναι ίσες.
- β) Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .
- γ) Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = x - 1 \text{ και } g(x) = \frac{1}{x - 1}$$

- α) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.
- β) Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f \circ g$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .
- γ) Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g \circ f$ βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g .
- δ) Να χαράξετε τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων $g \circ f, f$ και g .

4. Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x \cdot y) = f(x) + f(y), \text{ για κάθε } x, y > 0$$

Να αποδείξετε ότι:

$$\text{i) } f(1) = 0 \quad \text{ii) } f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right), x > 0 \quad \text{iii) } f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y), x, y > 0$$

Να εξετάσετε την μονοτονία των συναρτήσεων:

$$\text{i) } f(x) = 2 \log(3 - x) + 1$$

$$\text{ii) } g(x) = 3 \ln(\sqrt{x - 2} + 1) - 1$$

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 2x^5 + 3x^3 + x - 6$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $2x^5 + 3x^3 + x = 6$

iii) Να λύσετε την ανίσωση $2e^{5x} + 3e^{3x} + e^x < 6$

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = a^x + x, \quad a > 1$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$a^{\lambda^3-4} - a^{\lambda-2} < 2 + \lambda - \lambda^2$$

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = 12e^{3-x} - 3x$$

i) Να μελετήσετε την ως προς τη μονοτονία.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 3$

iii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$12(e^{3-x^2} - e^{3-x}) < 3x(x-1)$$

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

i) Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα και η g γνησίως αύξουσα, να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f \circ g$.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$(f \circ g)(x^2 - 4x) \geq (f \circ g)(x - 4)$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) + x - 2, \quad x > -1$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

ii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$\ln\left(\frac{x^4+2}{x^3+1}\right) > 2x^3 - x^4$$

7. Να λύσετε τις επόμενες ανισώσεις, αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι γνησίως αύξουσα:

i) $f(x^2 - 3x + 1) > f(4x + 1)$ ii) $f(2e^{3x} + 4) < f(e^{3x} + 5)$ iii) $f(\ln(x+1) + x^2) > f(x^2)$

1. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή των συναρτήσεων:

$$\textbf{i)} f(x) = 1 - |x + 3| \quad \textbf{ii)} } g(x) = \frac{1}{x^4 + 2}$$

2. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:

$$\textbf{i)} f(x) = |x - 5| + 3$$

3

Να βρείτε τη μέγιστη τιμή των συναρτήσεων:

$$\textbf{i)} f(x) = 2 - |x + 2| \quad \textbf{ii)} } f(x) = \frac{3}{x^2 + 1}$$

1. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού τους:

$$\textbf{i)} f(x) = 1 + e^{x-2} \quad \textbf{ii)} } g(x) = 2 - \ln\left(\frac{1}{x-1}\right)$$

2. Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις δεν είναι «1-1»

$$\textbf{i)} f(x) = 1 - |x + 3| \quad \textbf{ii)} } g(x) = \frac{3}{x^4 + 1}$$

3. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) = -x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι:

i) περιττή **ii)** «1-1»

4

Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις είναι «1-1» στο πεδίο ορισμού τους:

$$\textbf{i)} f(x) = 2 - e^{x-1} \quad \textbf{ii)} } g(x) = 1 - \ln\left(\frac{1}{x+2}\right)$$

Να αποδείξετε ότι οι επόμενες συναρτήσεις δεν είναι «1-1»

$$\textbf{i)} f(x) = 1 + |x - 5| \quad \textbf{ii)} } g(x) = \frac{3}{x^{10} + 1}$$

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

$$\text{i)} e^x = 1 - x^7 \quad \text{ii)} \ln(x-1) = 2 - x \quad \text{iii)} e^x + 2 = \sqrt{8 + \sqrt{1-x}}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2015} + x^{2017}$, $x \in \mathbb{R}$

i) Να βρείτε το $f(1)$

ii) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι «1-1»

iii) Να λύσετε την εξίσωση $x^{2015} + x^{2017} = 2$

3. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $(f \circ f)(x) + f^3(x) = 2x + 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Η f είναι «1-1»

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f(2x^3 + x) - f(4 - x) = 0$

4. Δίνεται η γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x^{2015}) - f(x^{2014}) - 2016$ δεν είναι «1-1».

ii) Να λύσετε στο $(1, +\infty)$ την ανίσωση:

$$(x^2 - 2014x) \cdot (g(x) + 2016) > 0$$

5. Να λύσετε τις εξισώσεις, αν γνωρίζετε ότι η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι «1-1»

$$\text{i)} f(x^2 - 3x + 1) = f(4x + 1) \quad \text{ii)} f(2e^{3x} + 4) = f(e^{3x} + 5) \quad \text{iii)} f(\ln(x+1) + x^2) = f(x^2)$$

2/A. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1" και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφή της

$$\begin{array}{llll} \text{i)} f(x) = 3x - 2 & \text{ii)} f(x) = x^2 + 1 & \text{iii)} f(x) = (x-1)(x-2) + 1 & \text{iv)} f(x) = \sqrt[3]{1-x} \\ \text{v)} f(x) = \ln(1-x) & \text{vi)} f(x) = e^{-x} + 1 & \text{vii)} f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} & \text{viii)} f(x) = |x-1| \end{array}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(ae^x + 1)$, $a \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της οποίας διέρχεται από το σημείο $A(2\ln 2, 2\ln 3)$.

i) Να βρείτε την τιμή του a .

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

iii) Να βρείτε την αντίστροφη της f .

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \ln x - \ln(x - 2)$$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1».

ii) Να βρείτε την αντίστροφη της f .

iii) Να βρείτε τα σημεία τομής της f^{-1} με την ευθεία $y = 3$.

4. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x-2}$ και $g(x) = \sqrt{x^2-4}$. Να βρεθεί η συνάρτηση $(g \circ f)^{-1}(x)$.

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + x^3 + x$, $x \in \mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

ii) Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(x) = x$

iii) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων της f και f^{-1}

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln x, x > 0$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii) Να λύσετε την ανίσωση $f^{-1}(x) > x$.

7. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^3(x) + 2f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii) Να βρείτε την αντίστροφή της (**προσέξτε το σημείο αυτό στη λύση**).

1. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι "1-1" και για καθεμία απ' αυτές να βρείτε την αντίστροφή της

i) $f(x) = -2x + 3$ ii) $f(x) = -2x + 3$ iii) $f(x) = (x-3)(x-5) - 7$ iv) $f(x) = \sqrt[3]{3-x}$

v) $f(x) = \ln(3+5x)$ vi) $f(x) = e^{-3x} - 5$ vii) $f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{e^{2x} - 1}$ viii) $f(x) = |3x + 1|$

2. Να βρείτε το σύνολο τιμών των επόμενων συναρτήσεων

i) $f(x) = \ln(x^3 - 1) + 2$ ii) $g(x) = e^{x^3 - 1} + 2$

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \ln x - 2, & \text{αν } 0 < x < 1 \\ \sqrt{x-1}, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της

3. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(2) = 10$ και $(f \circ f)(x) = 3x - 5$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

i) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη

ii) Να βρείτε το $f^{-1}(2)$

iii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f\left(f^{-1}(|x| - 2) - 5\right) = 2$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι:

- i) Η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της
- ii) Η εξίσωση $f^{-1}(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα
- 5. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 2f(x) = 12e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- i) Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- ii) Να βρείτε το σημείο τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $y'y$.
- iii) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1»
- iv) Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(|x| - 3) = e^{2\ln 2} + \ln \frac{1}{e^2}$$

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{a - e^x}{1 + e^x}$, $a \in \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $M\left(\ln 3, -\frac{1}{2}\right)$.

- i) Να βρείτε την τιμή του a
- ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι «1-1»
- iii) Να βρείτε την f^{-1}
- iv) Να αποδείξετε ότι η f είναι περιττή.

7. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x + 1$, $g(x) = \frac{e^x + 1}{e^x - 1}$

- i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1»
- ii) Να βρείτε την f^{-1}
- iii) Να βρείτε την $g \circ f^{-1}$

8

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 5^x + 3^x - 1$

i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται.

ii) Να λύσετε την εξίσωση :

$$5^{x^2-x} - 3^{x+1} = 5^{x+1} - 3^{x^2-x}$$

iii) Να λύσετε την ανίσωση:

$$5^{x^2+x+1} - 5^{x+3} > 3^{x+3} - 3^{x^2+x+1}$$

9

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f^3(x) + 3f(x) = 14e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

A. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.

Γ. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι «1-1».

Δ. Να λύσετε την εξίσωση $f(|x| - 5) = e^{2\ln 2} + \ln \frac{1}{e^2}$.

10

Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = x^{2015} + x^{2017} + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

A. Να αποδείξετε ότι η φ είναι «1-1».

B. Να λύσετε την ανίσωση $\varphi(\varphi(x)) < -1$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $\varphi(\varphi(x)) = -1$.

11

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη και η γραφική παράστασή της C_f διέρχεται από το σημείο $A(3, 2), B(5, 9)$.

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

B. Να λυθεί η εξίσωση $f(2 + f^{-1}(x^2 + x)) = 9$

Γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(f^{-1}(x^2 - 8x) - 2) < 2$

12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x$

A. Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

B. Να βρείτε το $f^{-1}(3)$

Γ. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(f(x^2 - 5) + 15) = 2$

13

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f^3(x) + 2f^2(x) + 3f(x) = 2x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

i) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

iii) Να βρείτε την αντίστροφη της f .

14

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(f(x)) = x, f(3) = 1, g(x) = e^{f(x)} + e^x$$

A. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι «1-1».

B. Να λύσετε την εξίσωση $(g \circ f)(x) = e^x + e$.

15

Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(1 + f(x)) = 2x - 6 + f(x) \quad (1), \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

A. Να αποδείξετε ότι:

i) Η f αντιστρέφεται.

ii) $f(3) = 2$

B. Να λύσετε την εξίσωση:

$$f(1 + f(x^2 + x + 1)) = f(1 + f(3))$$

1.

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[(x^2 + 1)^9 \cdot |x^3 - 1| \right]$$

2

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 6x}{x^2 - 4}$$

3

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2x}{x - 1}$$

4

Να βρεθεί, αν υπάρχει, το όριο στο $x_0 = 1$ της συνάρτησης:

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 4, & x < 1 \\ -\frac{1}{x}, & x \geq 1 \end{cases}.$$

5

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^3 \eta \mu \left(\frac{x^3 + 1}{x^{2011}} \right) \right)$$

6

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \varphi x}{x} \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x^2 + x}$$

7

Να βρείτε τα όρια (αν υπάρχουν)

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - x + 1| - 1}{x^2 - 1} \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x^2 - 1|}{x - 1}$$

8

Να βρείτε τα α και β ώστε:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 4}{x^2 - 1} = 2 \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1, \text{ όπου } f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 - \beta x + 2, & \text{αν } x \geq -1 \\ \alpha x + 3, & \text{αν } x < -1 \end{cases}$$

9

Να βρείτε το όριο:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 0} \eta \mu \left(x^2 + \frac{\pi}{4} \right) \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 3x}{x}$$

10

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{x^2 - 1}$$

11

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1} = 2$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ (αν υποθέσουμε ότι υπάρχει).

12

1. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$f(x + y) = f(x) + 2f(y) + xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

i) Να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$

ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

2. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y) - 2xy \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$$

$$\text{και } f(x) < 0, x \in \mathbb{R}$$

i) Να βρείτε τις τιμές $f(1), f(2)$

ii) Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

Επανάληψη

1. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 - x}$$

2. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x - 2} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+3} - 2}{\sqrt{x+8} - 3}$$

3

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^5 \sin \left(\frac{1}{x^{1000}} \right) \right) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \text{ όταν } |f(x) - x^5| \leq x, \text{ για κάθε } x \in (-1, 1)$$

4

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\varepsilon \varphi x} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{\eta \mu x} \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu 5x}{\sqrt{x+1} - 1} \quad \text{iv) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \upsilon \nu 4x - 1}{x^2 + x}$$

5

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-2| - |2x-1|}{x^2 - 1} \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{|2x+4| + |x^2 + 2x|}{x-4}$$

6

Να βρείτε τα α και β όταν:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + \alpha x^2 - \beta}{x^3 - 1} = 3 \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 + (a - \beta)x^3 + \alpha x^2 - 1}{x + 1} = -1$$

7

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{x^2 - 1} \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sigma\upsilon\nu(x+2) - 1}{x^3 + 2x^2}$$

8

α) Αν $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2f(x) - 5}{x^2 - 9} = \frac{1}{2}$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (αν υποθέσουμε ότι υπάρχει).

β) Αν $\lim_{x \rightarrow -1} \left[(x+1)f(x) - (\sqrt{x+2} - 1) \right] = 3$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ (αν υποθέσουμε ότι υπάρχει).

9

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x - 2}{\sqrt{x} - 1}$

10

Υπολογίστε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 2}{\sqrt{x} - x}$

11. Αν $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με:

$$f(x+y) = f(x) - f(y) - xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

Να βρείτε:

$$\text{i)} \text{ Το } f(1) \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$$

1. Να βρεθούν τα όρια :

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 6}{|x - 1|}$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x + 2}{(x - 2)^2}.$$

2. Να βρεθούν τα πλευρικά όρια της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$$

στο $x_0 = 2$ και στη συνέχεια να εξετασθεί, αν υπάρχει το όριο της $f(x)$ στο 2.

3

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, όταν :

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 1}{f(x)} = +\infty \quad \text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - 2}{x^2 + 2x} = -\infty$$

4

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 - x + 1}{x^4 + x^2}$$

$$\text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3x + 2}{|x^4 - 1|}$$

5. Έστω η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με:

$$f(x) \cdot f(y) = yf(x) + xf(y) - xy, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

i) τη συνάρτηση f

ii) Το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^3}$

6. Αν $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, τέτοιες ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{f(x)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{g(x)}{x+2} = -\infty$$

Να βρείτε (αν υπάρχει) το $\lim_{x \rightarrow 3} [f(x) + g(x)]$

7

Να βρείτε τα όρια για όλες τις τιμές των $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$:

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\lambda x^2 - x - 2}{x^2 - 1} \quad \text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\mu^2 x^3 - 2\mu x + 2}{x^2 - 2x + 4}$$

8

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1-2x}{-(x+1)^2} \quad \text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-2x^2}{-x^4 - x^2} \quad \text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{2x^2+1}{\left|\frac{1}{2}-x\right|}$$

9

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4+1}{x^2-1} \quad \text{ii)} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+1}{x^3} \quad \text{iii)} \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5}{x^2-x-2}$$

10

Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) \cdot \eta\mu 3x}{\sqrt{x+9}-3} = -\infty$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

1. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^3 - 2x^2 + x - 1) \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^4 + 2x^3 - x^2 - x + 1)$$

2. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^5 - 3x^4 + 5x^2 + x - 3}{x^2 + 4x + 7} \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + x - 7}{5x + 8}$$

3

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} + x) \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - x)$$

4

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x - 2} + x) \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x - 2} - x)$$

5

Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ , να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \mu x) \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6}$$

6

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i)} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x - 2^{x+2} - 1}{3^{x+1} - 5 \cdot 2^x + 3} \quad \text{ii)} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 \cdot e^{x+2} - 7 \cdot 2^x}{e^{x+3} - 2^{x+2}}$$

7

Να βρείτε το όριο:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|2 - x^2| + |x^2 - 3| + 3x}{x - 1}$$

Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$, να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x - 3f(x)}{f(x) + 3x + 2}$

Επανάληψη

1. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (4x^5 - 2x^3 + x^2 + 2)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^7 - 3x^4 + 3x^3 + 9)$

2. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7x^{10} - 7x^9 + 6x^2 - 3)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^{13} + 8x^8 + 9x^5 + 11)$

3. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5x^2 + x - 2} + 9x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{5x^2 + x - 2} - 9x)$

4. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 - x - 2} - 3x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{3x^2 + x - 2} - 3x)$

5. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ , να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 + 3x - 5} + \lambda x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\lambda - 2)x^5 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1}{(\lambda + 1)x^3 - 3x^2 + x + 3}$

6. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4^x - 3^{x+1} + 2}{4^{x+2} - 5 \cdot 3^x + 1}$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4 \cdot e^{x+1} - 6 \cdot 2^x}{e^x - 2^{x+1}}$

Να βρείτε τα όρια:

i) $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sigma \upsilon \nu x}{x + 5}$

ii) $B = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu x^{23}}{x^2 + 3x + 5}$,

iii) $\Gamma = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 - \eta \mu x}{x^2 + \sigma \upsilon \nu x}$

iv) $\Delta = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x \eta \mu 2x}{x^2 - x + \sigma \upsilon \nu 2x}$

8

Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^3 - 2| - |x^2 + 2x - 4|}{x^2 + 1} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^4 + 6| - |x^2 + 2x - 4|}{x^2 + 1}$$

9

Αν $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2f(x)}{f(x) + 5x + 1}$

10

Να βρείτε το όριο της συνάρτησης f στο $x_0 = 1$ (αν υπάρχει):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt{x} - 1}, & \text{αν } x > 1 \\ \frac{x^2 - x}{\eta\mu 3x}, & \text{αν } x < 1 \end{cases}$$

11

Να βρείτε τα α και β ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha x^3 - \beta x^2 + x - 1}{x^2 - x - 2} = -2$$

12. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση τέτοια ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 2 \quad (1), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 2x] = 3 \quad (2)$$

Να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}^*$ ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) + \lambda x - 1}{xf(x) - 2x^2 + 1} = 1$$

1

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}, & \text{αν } x > 1 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

2

Για ποια τιμή του a η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2a, & \text{αν } x \leq 0 \\ \frac{\eta\mu x}{x}, & \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

είναι συνεχής;

3

Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x^2-1} + 2ax, & \text{αν } x > 1 \\ ax^2 + x - 1, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές του $a \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

4

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $x^3 f(x) = x^5, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το $f(0)$.

5

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $x^2 f(x) = \eta\mu^2 2x, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε:

i) Τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$

ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

6

Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση:

$$(x-2)f(x) \geq x^2 - 3x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 2$. Να βρείτε την τιμή $f(2)$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}, & \text{αν } x \neq 1 \\ 2, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

2. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x^2 - 9}, & \text{αν } x \neq 3 \\ x^3 \eta\mu \frac{1}{x} + \frac{1}{8x}, & \text{αν } x = 3 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

3. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} 2\alpha x - \beta, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x - 1, & \text{αν } 1 < x \leq 2 \\ \beta x^2 - \alpha, & \text{αν } x > 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των α, β ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

4. Δίνεται η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x\sqrt{x^2+3} - \lambda}{x-1}, & \text{αν } x \neq 1 \\ \kappa, & \text{αν } x = 1 \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των κ, λ ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

5. Α. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_1 = 0$ και ισχύει :

$$x^3 f(x) \leq (\sqrt{x^2+4} - 2) \cdot \eta\mu 4x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

, να βρείτε την τιμή $f(0)$.

Β. Αν η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_1 = 0$ και ισχύει :

$$|xg(x) - \eta\mu x| \leq x^4 \eta\mu^2 \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^*$$

να βρείτε την τιμή $g(0)$.

6. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_1 = 0$ και ισχύει :

$$\sqrt{16 - x^5 \eta\mu \frac{1}{x^{11}}} \leq 4 + x^2 f(x) \leq \sqrt{16 + x^4} \text{ για κάθε } x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$$

να βρείτε την τιμή $f(0)$.

7. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 3$ και $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 2016$, να βρείτε το όριο

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = 2016$$

$$f^2(x) + g^2(x) + \sin^2 x \leq 2xf(x) + 2g(x)\sin x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς στο $x_0 = 0$

συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με:

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}$$

A. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

B. Αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = a \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη : Δείξε ότι $f(0) = 1$, $f(-x)f(x) = 1$ και σε κάθε ερώτημα δείξε πρώτα τη συνέχεια στο 0.

Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + x - e = 0$ έχει μία, τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$

2. Αν $\beta > 0$ και $a + \beta + 1 < 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + ax^2 + \beta = 0$ έχει δύο, τουλάχιστον, ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$

3. Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής ($\alpha, \beta > 0$) και $\alpha \leq f(x) \leq \beta$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \frac{\alpha\beta}{x_0}$.

4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{x^{2016} + 2016}{x-1} + \frac{x^{2015} + 2015}{x-2} = 0$$

Έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1, 2)$.

5. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 2x - 1 = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο $(0, 1)$.

6

Να δειχτεί ότι η εξίσωση $x + \sin x = 4$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(\pi, 2\pi)$.

7

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x^4 + 3x^2 + 2$ και $g(x) = 9x^3 - 3x + 1$ έχουν ένα, τουλάχιστον, κοινό σημείο $A(x_0, y_0)$ με $x_0 \in (-1, 1)$.

8

Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης:

$$f(x) = \eta \mu x - \sigma \nu \nu x, \quad x \in [0, 2\pi].$$

9

Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f(x)$ οι οποίες ικανοποιούν τη σχέση:

$$f^2(x) = e^{2x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

10

A) Αν γνωρίζουμε ότι $(f(x))^2 = x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

μπορούμε να βρούμε την συνάρτηση f ;

B) Αν $(f(x))^2 = x^4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f συνεχής στο $\mathbb{R}$ τότε

να βρείτε την f .

11

Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ με $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$

και $f(\alpha) \neq 0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε:

$$\frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\beta - \alpha}$$

Ασκήσεις

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 = x\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ έχει τουλάχιστον δύο ρίζες στο διάστημα $(-\pi, \pi)$
2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x = \frac{1}{2020}$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xe^x = 1$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$
4. Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ με $f(0) = 0$, $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ και $f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$f(x)\eta\mu^2 x + g(x)\sigma\upsilon\nu^2 x = x$$

Έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

5. Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις $f, g : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $\begin{matrix} f(\alpha) = g(\beta) = \alpha \\ g(\alpha) = f(\beta) = \beta \end{matrix}$.

Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$:

$$f(g(\xi)) + g(f(\xi)) = 2\xi$$

6. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\alpha) \neq 0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$\frac{f(\xi)}{\xi - \alpha} = \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{\beta - \alpha}$$

7. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xf(x) + 3\eta\mu x = x^2, x \in \mathbb{R}$$

A) Να βρείτε τη συνάρτηση f

B) Να βρείτε το όριο $K = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^{-x}$ έχει μία, τουλάχιστον, θετική λύση.

8. Δίνεται μία συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{h \rightarrow 0} f(x+h) = f(x)$

και $(f(x) + x^2)(f(x) - x^2) = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τη συνάρτηση f .

9

Δίνεται μία ορισμένη και συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 6]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0, 6]$ τέτοιο, ώστε:

$$2f(1) + 4f(3) + 5f(5) = 11f(x_0)$$

10

Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

$$\textbf{i)} \quad f(x) = \sqrt{2-x} - 1 \quad \textbf{ii)} \quad g(x) = x^4 + 3x + 1, x \in [1, 3]$$

11

Έστω μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και «1-1». Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη.

Ασκήσεις

1. Δίνεται μία ορισμένη και συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[1, 10]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 10]$ τέτοιο, ώστε:

$$3f(2) + 5f(6) + 4f(9) = 12f(\xi)$$

2. Αν $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ συνεχής, να αποδείξετε ότι υπάρχει, ένα τουλάχιστον, $\xi \in [0, 2]$ τέτοιο, ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(0)}{2} + \frac{f(1)}{3} + \frac{f(2)}{6}$$

3. Αν $f: [1, 4] \rightarrow \mathbb{R}^*$ συνεχής με $f(1) \cdot f(2) \cdot f(4) = 8$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi \in [1, 4]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) = \xi$.

4

Να βρείτε το σύνολο τιμών των συναρτήσεων:

$$\textbf{i)} \ f(x) = x^5 + 3x^3 + 1, x \in \mathbb{R} \quad \textbf{ii)} \ g(x) = \sin x - 2x, x \in [0, \pi]$$

5

Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης:

$$f(x) = \ln x + e^{x-2} - 2016$$

6 Αν $f(x) = 21 - (x-2)^6$ να εξετάσετε αν υπάρχει λύση της εξίσωσης

$$(f(x) - 22)(f(x) - 23) = 0$$

7. Αν $f : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε:

$$2\xi \ln \xi = 2 - 3\xi$$

8

Να βρείτε τα α και β ώστε:

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\alpha x^3 - \beta x^2 + x - 1}{x^2 - x - 2} = -2$$

9. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής και περιττή με $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με αντίστοιχες τεταγμένες 1 και -1.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ - ΟΡΙΟ - ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ
--

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

α) Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $f(\alpha) \neq f(\beta)$, να δείξετε ότι για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον αριθμός $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \eta$.

β) Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Τι ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A ;

Λύση

α) Έστω ότι $f(\alpha) < f(\beta)$ και $f(\alpha) < \eta < f(\beta)$. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \eta$, $x \in [\alpha, \beta]$ παρατηρούμε ότι:

Η g είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και $g(\alpha)g(\beta) < 0$, αφού $g(\alpha) = f(\alpha) - \eta < 0$ και $g(\beta) = f(\beta) - \eta > 0$. Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Bolzano, υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0) = f(x_0) - \eta = 0$ οπότε $f(x_0) = \eta$.

β) Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού το A μια διαδικασία (κανόνα) f , με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y . Το y ονομάζεται τιμή της f στο x και συμβολίζεται με $f(x)$.

Άσκηση 2

- i. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;
- ii. Πότε μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;
- iii. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα A και $x_0 \in A$. Πότε λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0 ;

Λύση

- i. Δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες όταν: έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού A και για κάθε $x \in A$ ισχύει $f(x) = g(x)$.
- ii. Μία συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) < f(x_2)$.
- iii. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού A . Λέμε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 \in A$, όταν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

Άσκηση 3

α) Πότε μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

β) Τι ονομάζουμε σύνθεση $g \circ f$ δύο συναρτήσεων f, g με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα; Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της $g \circ f$;

γ) Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Λύση

α) Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει: $f(x_1) > f(x_2)$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε ονομάζουμε σύνθεση της f με την g , και τη συμβολίζουμε με $g \circ f$, τη συνάρτηση με τύπο $g \circ f : A_1 \rightarrow \mathbb{R}$, όπου το πεδίο ορισμού A_1 της $g \circ f$ αποτελείται από όλα τα στοιχεία x του πεδίου ορισμού της f για τα οποία το $f(x)$ ανήκει στο πεδίο ορισμού της g .

Δηλαδή είναι το σύνολο $A_1 = \{x \in A \mid f(x) \in B\}$. Είναι φανερό ότι η $g \circ f$ ορίζεται αν $A_1 \neq \emptyset$, δηλαδή αν $f(A) \cap B \neq \emptyset$.

γ) Έστω οι συναρτήσεις f, g, h . Αν $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$ κοντά στο x_0 και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \ell$ τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Άσκηση 4

- i. Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$ το $f(x_0)$;
- ii. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano
- iii. Πότε μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση 1-1;

Λύση

- i. Μία συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A θα λέμε ότι:

παρουσιάζει στο x_0 ολικό ελάχιστο, το $f(x_0)$, όταν $f(x) \geq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$.

- ii. Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$.

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον, ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$ τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

- iii. Μια συνάρτηση $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ λέγεται συνάρτηση "1-1", όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή:

αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Άσκηση 5

- i. Να διατυπώσετε το θεώρημα της μέγιστης και της ελάχιστης τιμής.
- ii. Πότε μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Λύση

- i. Αν f είναι συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει στο $[\alpha, \beta]$ μια μέγιστη τιμή M και μια ελάχιστη τιμή m .
- ii. Μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της όταν α) Δεν υπάρχει το όριό της στο x_0 ή β) Υπάρχει το όριό της στο x_0 , αλλά είναι διαφορετικό από την τιμή της $f(x_0)$, στο σημείο x_0 .

Άσκηση 6

Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) και πότε σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Λύση

Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα ανοικτό διάστημα (α, β) , όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) .

Μια συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (α, β) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ και $\lim_{x \rightarrow \beta^-} f(x) = f(\beta)$.

Άσκηση 7

i. Τι ονομάζεται ακολουθία;

ii. Πότε μπορούμε να αναζητήσουμε τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;

Λύση

i. Ακολουθία ονομάζεται κάθε πραγματική συνάρτηση $\alpha : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{R}$

ii. Για να έχει νόημα το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(\alpha, +\infty)$. Για να έχει νόημα το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ πρέπει η f να είναι ορισμένη σε ένα διάστημα της μορφής $(-\infty, \beta)$.

Άσκηση 8

- i. Να διατυπώσετε το θεώρημα Bolzano. Ποια είναι η γεωμετρική του ερμηνεία;
- ii. Να συγκρίνετε τους αριθμούς $|\eta\mu x|$ και $|x|$. Πότε ισχύει η ισότητα;

Λύση

i. Έστω μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και επιπλέον, ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$, τότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$. Δηλαδή, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο ανοικτό διάστημα (α, β) .

Η γεωμετρική ερμηνεία του Θ. Bolzano είναι ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον $x'x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο.

ii. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $|\eta\mu x| \leq |x|$. Η ισότητα ισχύει μόνο όταν $x = 0$.

Άσκηση 9

Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0).$$

Λύση

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = \alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$ και $x_0 \in \mathbb{R}$.

Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v + \alpha_{v-1} x^{v-1} + \dots + \alpha_0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_v x^v) + \lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha_{v-1} x^{v-1}) + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0$$

$$= \alpha_v \lim_{x \rightarrow x_0} x^v + \alpha_{v-1} \lim_{x \rightarrow x_0} x^{v-1} + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha_0$$

$$= \alpha_v x_0^v + \alpha_{v-1} x_0^{v-1} + \dots + \alpha_0 = P(x_0)$$

Επομένως $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$

Άσκηση 10

Δίνεται η ρητή συνάρτηση $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, όπου $P(x)$, $Q(x)$ πολυώνυμα του x και $x_0 \in \mathbb{R}$ με $Q(x_0) \neq 0$.

Να αποδείξετε ότι: $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Λύση

Είναι: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} P(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$.

Επομένως, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)}$, εφόσον $Q(x_0) \neq 0$.

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3.$$

α) Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της f .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια λύση στο $\mathbb{R}$.

Λύση

α) Η συνάρτηση έχει $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 + 1 < 2x_2 + 1 \Rightarrow$$

$$e^{2x_1+1} < e^{2x_2+1} \Rightarrow -3e^{2x_1+1} > -3e^{2x_2+1}$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow -5x_1 > -5x_2 \Rightarrow -5x_1 + 3 > -5x_2 + 3$$

$$\text{άρα } -3e^{2x_1+1} - 5x_1 + 3 > -3e^{2x_2+1} - 5x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right).$$

Είναι:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3e^{2x+1} - 5x + 3) =$$

$$-3 \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x+1} - 5 \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 3 = -\infty - \infty + 3 = -\infty$$

$$(\text{αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x+1} = e \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x)^2 = e(+\infty) = +\infty).$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3e^{2x+1} - 5x + 3) =$

$$-3 \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+1} - 5 \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 3 = 0 + \infty + 3 = +\infty$$

$$(\text{αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x+1} = e \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^2)^x = e \cdot 0 = 0).$$

Επομένως είναι $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$.

γ) Αφού το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ που περιέχει το 0, θα υπάρχει $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = 0$. Επειδή επιπλέον η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, η x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = 2x^{2011} + 5x - 7, x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- iii. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης f .

Λύση

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2011} < x_2^{2011} \Rightarrow 2x_1^{2011} < 2x_2^{2011}$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow 5x_1 < 5x_2 \Rightarrow 5x_1 - 7 < 5x_2 - 7 \text{ άρα}$$

$$2x_1^{2011} + 5x_1 - 7 < 2x_2^{2011} + 5x_2 - 7 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα αυτό. Εξάλλου $f(1) = 2 + 5 - 7 = 0$ και επομένως: $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$

iii. Είναι: $f(1) = 0$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε:

- Για κάθε $x < 1$, έχουμε: $f(x) < f(1) \Rightarrow f(x) < 0$
- Για κάθε $x > 1$, έχουμε: $f(x) > f(1) \Rightarrow f(x) > 0$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 4\sqrt{e^x - 2} + 3$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- iii. Να ορίσετε την f^{-1} .

Λύση

i. Πρέπει: $e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$

Άρα $D_f = [\ln 2, +\infty)$.

ii. Για κάθε $x_1, x_2 \in [\ln 2, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow e^{x_1} - 2 < e^{x_2} - 2 \Rightarrow \sqrt{e^{x_1} - 2} < \sqrt{e^{x_2} - 2} \Rightarrow$$

$$4\sqrt{e^{x_1} - 2} < 4\sqrt{e^{x_2} - 2} \Rightarrow 4\sqrt{e^{x_1} - 2} + 3 < 4\sqrt{e^{x_2} - 2} + 3 \Rightarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[\ln 2, +\infty)$. Οπότε αφού η f είναι και συνεχής (πράξεις συνεχών) το σύνολο τιμών της είναι:

$$f([\ln 2, +\infty)) = \left[f(\ln 2), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right)$$

Έχουμε:

$$f(\ln 2) = 4\sqrt{e^{\ln 2} - 2} + 3 = 4 \cdot 0 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (4\sqrt{e^x - 2} + 3) = +\infty$$

Άρα $f([\ln 2, +\infty)) = [3, +\infty)$

iii. Η f είναι 1-1 ως γνήσια αύξουσα (ii) και επομένως αντιστρέφεται.

Για κάθε $x \in [\ln 2, +\infty)$ έχουμε: $f(x) = y \Leftrightarrow$

$$4\sqrt{e^x - 2} + 3 = y \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{e^x - 2} = \frac{y-3}{4} \\ \frac{y-3}{4} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^x - 2 = \left(\frac{y-3}{4}\right)^2 \\ y \geq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \ln \left[\left(\frac{y-3}{4}\right)^2 + 2 \right] \\ y \geq 3 \end{cases}.$$

$$\text{Apra } f^{-1}(x) = \ln \left(\left(\frac{x-3}{4} \right)^2 + 2 \right) \text{ } \mu \varepsilon \text{ } D_{f^{-1}} = [3, +\infty).$$

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2\ln(\sqrt{x-1}+1)+3$

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι “1-1”.
- iii. Να ορίσετε την f^{-1} .
- iv. Να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}(1+x) = 2$.

Λύση

i. Πρέπει:

$$\left\{ \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ \text{και} \\ \sqrt{x-1}+1 > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x \geq 1 \text{ άρα } D_f = [1, +\infty)$$

ii. Έστω $x_1, x_2 \in [1, +\infty)$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2\ln(\sqrt{x_1-1}+1)+3 = 2\ln(\sqrt{x_2-1}+1)+3 \Rightarrow$$

$$2\ln\sqrt{x_1-1} = 2\ln\sqrt{x_2-1} \Rightarrow$$

$$\ln\sqrt{x_1-1} = \ln\sqrt{x_2-1} \Rightarrow x_1-1 = x_2-1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η f είναι “1-1”.

iii. Έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow y = 2\ln(\sqrt{x-1}+1)+3 \Leftrightarrow \frac{y-3}{2} = \ln(\sqrt{x-1}+1) \Leftrightarrow$$

$$e^{\frac{y-3}{2}} = \sqrt{x-1}+1 \Leftrightarrow \left(e^{\frac{y-3}{2}} - 1\right)^2 = x-1, \text{ πρέπει } e^{\frac{y-3}{2}} - 1 \geq 0, \text{ επομένως}$$

$$x = (e^{\frac{y-3}{2}} - 1)^2 + 1, y \geq 3.$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = (e^{\frac{x-3}{2}} - 1)^2 + 1, x \in [3, +\infty)$$

$$\text{iv. } f^{-1}(1+x) = 2 \Leftrightarrow (e^{\frac{x+1-3}{2}} - 1)^2 + 1 = 2 \Leftrightarrow (e^{\frac{x-2}{2}} - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow$$

$$(e^{\frac{x-2}{2}} - 1 = 1 \text{ ή } e^{\frac{x-2}{2}} - 1 = -1) \Leftrightarrow$$

$$(e^{\frac{x-2}{2}} = 2 \text{ ή } e^{\frac{x-2}{2}} = 0 \text{ αδύνατον}) \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \ln 2 \Leftrightarrow x = 2\ln 2 + 2.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2$.

- i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f
- ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.
- iii. Να λύσετε την ανίσωση: $3x2^x + 2^x < 1$

Λύση

i. Η συνάρτηση έχει $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow -3x_1 + 2 > -3x_2 + 2$$

$$\text{άρα } \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} - 3x_1 + 2 > \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} - 3x_2 + 2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2 \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3 \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 2 = +\infty - (-\infty) - 2 = +\infty, \text{ αφού } 0 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{οπότε } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2 \right] =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3 \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 = 0 - \infty + 2 = -\infty, \text{ αφού } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{ οπότε}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$$

Επειδή η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, έχει σύνολο τιμών το:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty)$$

Επειδή $2011 \in f(\mathbb{R})$ και η f είναι γνησίως φθίνουσα, υπάρχει μοναδικός $x \in \mathbb{R}$ για τον οποίο η συνάρτηση παίρνει την τιμή 2011.

iii. Η ανίσωση γίνεται:

$$3x2^x + 2^x < 1 \Leftrightarrow 3x + 1 < \frac{1}{2^x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x > 1 \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x - 3x + 2 > 3 \Leftrightarrow f(x) > 3 \Leftrightarrow f(x) > f(0) \Leftrightarrow x < 0$$

(αφού $f(0) = 3$) και f γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3x^{2011} + 2x - 5$, $x \in \mathbb{R}$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα τη $x = 1$.
- iii. Να βρείτε το πρόσημο της f .

Λύση

i. Η συνάρτηση έχει $D_f = \mathbb{R}$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2011} < x_2^{2011} \Rightarrow 3x_1^{2011} < 3x_2^{2011}$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow 2x_1 - 5 < 2x_2 - 5.$$

$$\text{Άρα } 3x_1^{2011} + 2x_1 - 5 < 3x_2^{2011} + 2x_2 - 5 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

ii. Έχουμε: $f(1) = 0$ άρα $x = 1$ ρίζα της $f(x) = 0$ και επειδή η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

iii. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πολυωνυμική και $x = 1$ η μοναδική της ρίζα, τότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano διατηρεί σταθερό πρόσημο στα διαστήματα $(-\infty, 1)$ και $(1, +\infty)$.

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα για κάθε $x < 1$ ισχύει $f(x) < f(1) = 0$, ενώ για κάθε $x > 1$ ισχύει $f(x) > f(1) = 0$.

Άσκηση 7

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, όταν:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{f(x)} = +\infty$

ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{4x+3} = -\infty$

iii. $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)(3x+4)] = +\infty$

Λύση

i. Θέτουμε $\frac{2x-1}{f(x)} = g(x)$ και επειδή $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty$ είναι $g(x) \neq 0$ για τιμές κοντά στο 1.

Επίσης: $\frac{2x-1}{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x-1}{g(x)}$

Οπότε: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-1}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[(2x-1) \frac{1}{g(x)} \right] = 0$

ii. Θέτουμε: $\frac{f(x)}{4x+3} = h(x)$, οπότε $f(x) = (4x+3)h(x)$

Επίσης $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = -\infty$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(4x+3)h(x)] = 7(-\infty) = -\infty$

iii. Θέτουμε:

$f(x)(3x+4) = \kappa(x)$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} \kappa(x) = +\infty$

Επίσης $3x+4 \neq 0$ για τιμές κοντά στο 1, οπότε $f(x) = \frac{\kappa(x)}{3x+4}$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{3x+4} \kappa(x) \right] = \frac{1}{7} (+\infty) = +\infty$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f : [1, 5]$ της οποίας η γραφική παράσταση περνάει από τα σημεία $A(1, 8)$ και $B(5, 12)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\frac{29}{3}$

iii. Υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (1, 5)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9}$$

Λύση

i. Είναι: $f(1) = 8$ και $f(5) = 12$ και αφού γνησίως μονότονη θα είναι γνησίως αύξουσα ($1 < 5$ και $f(1) < f(5)$).

ii. Η f είναι γνησίως αύξουσα και συνεχής στο $[1, 5]$ άρα έχει σύνολο τιμών το:

$$f([1, 5]) = [f(1), f(5)] = [8, 12]$$

$$\frac{29}{3} \in f([1, 5])$$

iii. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $x_1, x_2 \in D_f$ με $x_1 < x_2$ θα είναι $f(x_1) < f(x_2)$. Έτσι έχουμε:

$$1 < 2 < 5 \Leftrightarrow f(1) < f(2) < f(5) \Leftrightarrow 8 < f(2) < 12 \Leftrightarrow 16 < 2f(2) < 24$$

$$1 < 3 < 5 \Leftrightarrow f(1) < f(3) < f(5) \Leftrightarrow 8 < f(3) < 12 \Leftrightarrow 24 < 3f(3) < 36$$

$$1 < 4 < 5 \Leftrightarrow f(1) < f(4) < f(5) \Leftrightarrow 8 < f(4) < 12 \Leftrightarrow 32 < 4f(4) < 48$$

οπότε:

$$72 < 2f(2) + 3f(3) + 4f(4) < 108 \Leftrightarrow$$

$$8 < \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9} < 12$$

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα ενδιάμεσων τιμών θα υπάρχει $x_0 \in (1, 5)$ τέτοιο ώστε:

$$f(x_0) = \frac{2f(2) + 3f(3) + 4f(4)}{9} \text{ και αφού } f \text{ γνησίως αύξουσα θα είναι μοναδικό.}$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \ln(3e^x + 1) - 2$.

- i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- iii. Να ορίσετε την f^{-1} .
- iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2$.

Λύση

i. Για να ορίζεται η f , πρέπει: $3e^x + 1 > 0$ που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα, το πεδίο ορισμού της είναι: $D_f = \mathbb{R}$

ii. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow 3e^{x_1} < 3e^{x_2} \Rightarrow 3e^{x_1} + 1 < 3e^{x_2} + 1 \Rightarrow$$

$$\ln(3e^{x_1} + 1) < \ln(3e^{x_2} + 1) \Rightarrow \ln(3e^{x_1} + 1) - 2 < \ln(3e^{x_2} + 1) - 2 \Rightarrow$$

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα, άρα 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

iii. Έχουμε:

$$f(x) = y \Leftrightarrow y + 2 = \ln(3e^x + 1) \Leftrightarrow e^{y+2} = 3e^x + 1 \Leftrightarrow$$

$$e^x = \frac{e^{y+2} - 1}{3}, \frac{e^{y+2} - 1}{3} > 0 \text{ οπότε } x = \ln \frac{1}{3}(e^{y+2} - 1), y > -2.$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \ln \frac{1}{3}(e^{x+2} - 1), x \in (-2, +\infty)$$

iv. Έχουμε:

$$f(x) < f^{-1}(\ln 5 - 2) - 2 \Leftrightarrow \ln(3e^x + 1) - 2 < \ln \frac{1}{3}(e^{\ln 5 - 2} - 1) - 2 \Leftrightarrow$$

$$\ln(3e^x + 1) < \ln \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3e^x + 1 < \frac{4}{3} \Leftrightarrow 9e^x + 3 < 4 \Leftrightarrow$$

$$e^x < \frac{1}{9} \Leftrightarrow x < \ln \frac{1}{9} \Leftrightarrow x < -\ln 9$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = -2x^3 - 3x - 1$

- i. Να βρείτε το είδος μονοτονίας της f .
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 2$
- iv. Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}(x) \geq x - 1$

Λύση

i. Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow -2x_1^3 > -2x_2^3$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow -3x_1 - 1 > -3x_2 - 1$$

άρα

$$-2x_1^3 - 3x_1 - 1 > -2x_2^3 - 3x_2 - 1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και 1-1 οπότε αντιστρέφεται.

$$\text{iii. } f^{-1}(x) = 2 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) = f(2) \Leftrightarrow x = -23$$

iv. Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα, θα ισχύει:

$$f^{-1}(x) \geq x + 1 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x)) \leq f(x + 1) \Leftrightarrow$$

$$x \leq -2(x^3 + 3x^2 + 3x + 1) - 3(x + 1) - 1 \Leftrightarrow$$

$$2x^3 + 6x^2 + 10x + 6 \leq 0 \Leftrightarrow (\text{Σχήμα Horner})$$

$$(x + 1)(2x^2 + 4x + 6) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1 \text{ (αφού } 2x^2 + 4x + 6 > 0 \text{ διότι } \Delta = 16 - 48 = -32 < 0)$$

Άσκηση 11

Δίνεται η 1-1 συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$f(f(x)) + f(x) = 3x + 2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ και } f(1) = 3$$

i. Να βρείτε το $f^{-1}(1)$.

ii. Να βρείτε το $f(3)$

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f^{-1}(x) = 3$

iv. Να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + x}{f(f(x)) + f(x) - 2}$

Λύση

i. Η f είναι 1-1 στο $\mathbb{R}$ οπότε αντιστρέφεται. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(1)$ στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$$f(f(f^{-1}(1))) + f(f^{-1}(1)) = 3f^{-1}(1) + 2 \Leftrightarrow$$

$$f(1) + 1 = 3f^{-1}(1) + 2 \Leftrightarrow 4 - 2 = 3f^{-1}(1) \Leftrightarrow f^{-1}(1) = \frac{2}{3}$$

ii. Για $x = 1$ η δοθείσα σχέση γίνεται:

$$f(f(1)) + f(1) = 3 \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow f(3) + 3 = 5 \Leftrightarrow f(3) = 2$$

iii. Είναι:

$$f^{-1}(x) = 3 \Leftrightarrow x = f(3) \Leftrightarrow x = 2 \text{ (από ii)}$$

iv. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + x}{f(f(x)) + f(x) - 2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x + x}{3x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

αφού είναι: $\left| \frac{\sigma \nu x}{x} \right| = \frac{|\sigma \nu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{|x|} \leq \frac{\sigma \nu x}{x} \leq \frac{1}{|x|} \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0$$

Οπότε από το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sigma \nu x}{x} = 0$. Όμοια και για το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta \mu x}{x}$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνεχής στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - \sqrt{x} + \eta\mu(x-1)}{x^2 - 1} = 2$

i. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f περνάει από το σημείο $M(1,1)$

ii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3f(x) - 2| - 1}{x^2 - 1}$

Λύση

i. Θέτουμε: $g(x) = \frac{f(x) - \sqrt{x} + \eta\mu(x-1)}{x^2 - 1} \Leftrightarrow f(x) = (x^2 - 1)g(x) + \sqrt{x} - \eta\mu(x-1)$.

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left[g(x)(x^2 - 1) + \sqrt{x} - \eta\mu(x-1) \right] = 1$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει: $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$

Άρα η γραφική της παράσταση περνάει από το σημείο $M(1,1)$

ii. Είναι $\lim_{x \rightarrow 1} [3f(x) - 2] = 1 > 0$, οπότε $3f(x) - 2 > 0$, κοντά στο x_0

Άρα

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|3f(x) - 2| - 1}{x^2 - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3f(x) - 3}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 1)g(x) + 3\sqrt{x} - 3\eta\mu(x-1) - 3}{x^2 - 1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} [3g(x)] + \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(\sqrt{x} - 1)}{(x-1)(x+1)} - 3 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \\ &= 6 + \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{3}{2} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = \\ &= 6 + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} = \frac{21}{4} \end{aligned}$$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 2\ln \frac{x+1}{1-x} + 3$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να μελετήσετε την f^{-1} ως προς τη συνέχεια.
- Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

Λύση

i. Για να ορίζεται η f , πρέπει:

$$\frac{x+1}{1-x} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το: $D_f = (-1, 1)$

ii. Η f είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων f_2 και f_1 με

$f_1(x) = 2\ln x + 3$ και $f_2(x) = \frac{x+1}{1-x}$, αφού για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει:

$$(f_1 \circ f_2)(x) = f_1(f_2(x)) = 2\ln f_2(x) + 3 = 2\ln \frac{x+1}{1-x} + 3$$

iii. Για κάθε $x_1, x_2 \in (-1, 1)$ με $f(x_1) = f(x_2)$ έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2\ln \frac{x_1+1}{1-x_1} + 3 = 2\ln \frac{x_2+1}{1-x_2} + 3 \Rightarrow \frac{x_1+1}{1-x_1} = \frac{x_2+1}{1-x_2} \Rightarrow$$

$$x_1 - x_1x_2 + 1 - x_2 = x_2 + 1 - x_1x_2 - x_1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η f αντιστρέφεται.

- Είναι:

$$f(x) = y \Rightarrow y = 2\ln \frac{x+1}{1-x} + 3 \Rightarrow \frac{x+1}{1-x} = e^{\frac{y-3}{2}} \Rightarrow$$

$$x+1 = e^{\frac{y-3}{2}} - x \cdot e^{\frac{y-3}{2}} \Rightarrow (1 + e^{\frac{y-3}{2}}) \cdot x = e^{\frac{y-3}{2}} - 1 \Rightarrow x = \frac{e^{\frac{y-3}{2}} - 1}{e^{\frac{y-3}{2}} + 1}$$

Επειδή:

$$-1 < x < 1 \Rightarrow -1 < \frac{e^{\frac{y-3}{2}} - 1}{e^{\frac{y-3}{2}} + 1} < 1 \Rightarrow \frac{e^{\frac{y-3}{2}} - 1}{e^{\frac{y-3}{2}} + 1} < 1$$

$$\text{και } \frac{e^{\frac{y-3}{2}} - 1}{e^{\frac{y-3}{2}} + 1} > -1$$

ή $-1 < 1$ και $2e^{\frac{y-3}{2}} > 0$ που αληθεύουν για κάθε $y \in \mathbb{R}$, παίρνουμε:

$$f^{-1}(x) = \frac{e^{\frac{x-3}{2}} - 1}{e^{\frac{x-3}{2}} + 1}, x \in \mathbb{R}$$

- Η f^{-1} είναι συνεχής ως πηλίκος των συνεχών συναρτήσεων $f_1(x) = e^{\frac{x-3}{2}} - 1$ και $f_2(x) = e^{\frac{x-3}{2}} + 1$. Η f_1 είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $g_1(x) = e^x - 1$ και $g_2(x) = \frac{x-3}{2}$

Πράγματι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$(g_1 \circ g_2)(x) = g_1(g_2(x)) = e^{\frac{x-3}{2}} - 1 = f_1(x)$$

Η f_2 είναι συνεχής ως σύνθεση των συνεχών $h_1(x) = e^x + 1$ και $h_2(x) = \frac{x-3}{2}$.

Πράγματι για κάθε $x \in \mathbb{R}$, ισχύει:

$$(h_1 \circ h_2)(x) = h_1(h_2(x)) = e^{\frac{x-3}{2}} + 1 = f_2(x)$$

iv. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3)$$

Αν θέσουμε $u = \frac{x+1}{1-x}$ και αφού για $x \rightarrow 1^- \Leftrightarrow u \rightarrow +\infty$, θα έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{u \rightarrow +\infty} (2 \ln u + 3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(2 \ln \frac{x+1}{1-x} + 3 \right)$$

Αν θέσουμε $u = \frac{x+1}{1-x}$ και αφού για $x \rightarrow -1^+ \Leftrightarrow u \rightarrow 0$, έχουμε

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{u \rightarrow 0} (2 \ln u + 3) = -\infty$$

Άσκηση 14

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ και η συνάρτηση g με τύπο $g(x) = \ln \frac{x+2}{2-x}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$.
- Να βρείτε συνάρτηση h για την οποία να ισχύει: $(h \circ g)(x) = x$.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι περιττή.

Λύση

i. Για να ορίζεται η g , πρέπει: $\frac{x+2}{2-x} > 0 \Leftrightarrow x \in (-2, 2)$. Άρα το πεδίο ορισμού της g είναι το:

$$D_g = (-2, 2).$$

Επίσης έχουμε: $D_f = \mathbb{R}^*$ οπότε το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ είναι:

$$D_{f \circ g} = \left\{ x \in (-2, 2) / \ln \frac{x+2}{2-x} \neq 0 \right\} = \left\{ x \in (-2, 2) / \frac{x+2}{2-x} \neq 1 \right\} =$$

$$\{x \in (-2, 2) / x \neq 0\} = (-2, 0) \cup (0, 2).$$

ii. Ισχύει $(h \circ g)(x) = x \Leftrightarrow h(g(x)) = x \Leftrightarrow h\left(\ln \frac{x+2}{2-x}\right) = x$ (1)

Θέτουμε $u = \ln \frac{x+2}{2-x}$, οπότε έχουμε:

$$u = \ln \frac{x+2}{2-x} \Leftrightarrow \frac{x+2}{2-x} = e^u \Rightarrow 2e^u - xe^u = x+2 \Rightarrow x = \frac{2e^u - 2}{e^u + 1} \text{ αφού } e^u + 1 \neq 0, \text{ για κάθε } u \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Άρα η (1) γίνεται: } h(u) = \frac{2e^u - 2}{e^u + 1} \text{ ή } h(x) = \frac{2e^x - 2}{e^x + 1}.$$

iii.

- Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $-x \in \mathbb{R}$.

$$\bullet \text{ Για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ έχουμε: } h(-x) = \frac{2e^{-x} - 2}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{2}{e^x} - 2}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{2 - 2e^x}{1 + e^x} = -\frac{2e^x - 2}{1 + e^x} = -h(x).$$

Άρα η h περιττή.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνονται οι συνεχείς στο $\mathbb{R}$ συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Οι γραφικές τους παραστάσεις τέμνονται στο $A(2, -1)$.
- $\rho_1 = -1$ και $\rho_2 = 5$ είναι δύο διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 5)$.

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = -\infty$$

Λύση

α) Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$.

Τότε από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = 0$ που είναι άτοπο.

Άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

β) Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(-1, 5)$ και $g(x) \neq 0$ στο $(-1, 5)$ αφού -1 και 5 είναι διαδοχικές ρίζες της $g(x) = 0$.

Άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-1, 5)$. Επίσης $g(2) = -1 < 0$. Οπότε $g(x) < 0$ για κάθε $x \in (-1, 5)$.

γ) Είναι: $f(2) = -1 < 0$. Άρα από α) είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε $f(3) < 0$. Επίσης από β) $g(2) < 0$.

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(3) \cdot x^4 + 2x^2 + 1}{g(2) \cdot x^3 + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{f(3)}{g(2)} \cdot x \right) = -\infty.$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = 2x^4 + 3\ln x + 1.$$

- i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .
- ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .
- iii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$, η εξίσωση $f(x) = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα.
- iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός $\lambda > 0$ για τον οποίο ισχύει:

$$\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda}$$

Λύση

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f = (0, +\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με

$$x_1 < x_2 \text{ έχουμε: } x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^4 < x_2^4 \Rightarrow 2x_1^4 < 2x_2^4 \text{ και}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \ln x_1 < \ln x_2 \Rightarrow 3\ln x_1 < 3\ln x_2 \Rightarrow 3\ln x_1 + 1 < 3\ln x_2 + 1$$

$$\text{άρα } 2x_1^4 + 3\ln x_1 + 1 < 2x_2^4 + 3\ln x_2 + 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

ii. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ άρα έχει σύνολο τιμών το:

$$f((0, +\infty)) = (\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)).$$

Είναι:

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x^4 + 3\ln x + 1) = 0 - \infty + 1 = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^4 + 3\ln x + 1) = (+\infty) + (+\infty) + 1 = +\infty$

Επομένως είναι: $f((0, +\infty)) = (-\infty, +\infty)$.

iii. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$, άρα η εξίσωση $f(x) = \alpha$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$, έχει μοναδική ρίζα.

iv. Έχουμε:

$$\lambda^4 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \ln \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow 2\lambda^4 + 1 = 3(\ln 1 - \ln \lambda) \Leftrightarrow$$

$$2\lambda^4 + 1 = -3\ln \lambda \Leftrightarrow 2\lambda^4 + 3\ln \lambda + 1 = 0 \Leftrightarrow f(\lambda) = 0$$

Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι υπάρχει μοναδικό $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $f(\lambda) = 0$. Αυτό ισχύει αφού $0 \in f((0, +\infty))$ και η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει η σχέση: $2f^3(x) - 3 = 2x - 3f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.
- Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την f^{-1} .
- Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} .

Λύση

i. $2f^3(x) - 3 = 2x - 3f(x) \Leftrightarrow 2f^3(x) + 3f(x) = 2x + 3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για $x = x_0$ είναι $2f^3(x_0) + 3f(x_0) = 2x_0 + 3$.

Αφαιρώντας κατά μέλη, έχουμε:

$$2[f^3(x) - f^3(x_0)] + 3[f(x) - f(x_0)] = 2(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$2[f(x) - f(x_0)][f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)] + 3[f(x) - f(x_0)] = 2(x - x_0) \Leftrightarrow$$

$$f(x) - f(x_0) = \frac{2(x - x_0)}{2[f^2(x) + f(x)f(x_0) + f^2(x_0)] + 3}$$

Αφού $2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 3 \neq 0$, διότι είναι δευτεροβάθμιο τριώνυμο ως προς $f(x)$ με διακρίνουσα:

$$\Delta = 4f^2(x_0) - 4 \cdot 2(2f^2(x_0) + 3) = 4f^2(x_0) - 16f^2(x_0) - 24 =$$

$$-12f^2(x_0) - 24 = -12[f^2(x_0) + 2] < 0$$

$$\text{Άρα: } |f(x) - f(x_0)| = \frac{2|x - x_0|}{2f^2(x) + 2f(x)f(x_0) + 2f^2(x_0) + 3} \leq 2|x - x_0|.$$

$$\text{Οπότε } -2|x - x_0| \leq f(x) - f(x_0) \leq 2|x - x_0|$$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow x_0} [-2|x - x_0|] = \lim_{x \rightarrow x_0} [2|x - x_0|] = 0$ οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής, θα ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

ii. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $y = \alpha$ έχει με τη C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση $\alpha = f(x)$ έχει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ λύση στο $\mathbb{R}$.

$$\alpha = f(x) \Leftrightarrow f(x) - \alpha = 0 \Leftrightarrow (f(x) - \alpha) \left(2 \underbrace{\left(\overbrace{f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2}^* \right)}_{>0} + 3 \right) = 0, \quad (1)$$

(*) την παράσταση $f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2$ την αντιμετωπίζουμε σαν τριώνυμο ως προς $f(x)$ έτσι έχουμε $\Delta = -3\alpha^2 \leq 0 \Rightarrow f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2 \geq 0 \Rightarrow f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2 + 3 \geq 3 > 0$

$$(1) \Leftrightarrow 2(f^3(x) - \alpha^3) + 3(f(x) - \alpha) = 0 \Leftrightarrow 2f^3(x) + 3f(x) = 2\alpha^3 + 3\alpha \Leftrightarrow$$

$$2x + 3 = 2\alpha^3 + 3\alpha \Leftrightarrow x = \frac{2\alpha^3 + 3\alpha - 3}{2}, \text{ δηλαδή για κάθε } \alpha \in \mathbb{R} \text{ έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το } \mathbb{R}.$$

$$\text{Έστω } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \text{ τότε } f^3(x_1) = f^3(x_2) \Rightarrow 2f^3(x_1) = 2f^3(x_2).$$

$$\text{Επίσης } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3f(x_1) = 3f(x_2) \text{ και προσθέτοντας κατά μέλη, έχουμε:}$$

$$2f^3(x_1) + 3f(x_1) = 2f^3(x_2) + 3f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 3 = 2x_2 + 3 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα η f είναι 1-1 και επομένως αντιστρέφεται. Η f^{-1} έχει πεδίο ορισμού το σύνολο τιμών της f που είναι το $\mathbb{R}$.

$$\text{Είναι: } f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

$$\text{Οπότε: } 2f^3(x) + 3f(x) = 2x + 3 \Leftrightarrow 2y^3 + 3y = 2f^{-1}(y) + 3$$

$$\text{Άρα } f^{-1}(x) = \frac{2x^3 + 3x - 3}{2}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{iii. } f(x) = 0 \Leftrightarrow x = f^{-1}(0) = \frac{2 \cdot 0^3 + 3 \cdot 0 - 3}{2} = -\frac{3}{2}$$

iv. Η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και η f , οπότε τα κοινά τους σημεία είναι στην $y = x$.

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x^3 + 3x - 3}{2} = x$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 + 3x - 3 = 2x \Leftrightarrow 2x^3 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Παρατήρηση: Τις προτάσεις

A) Αν η f είναι γνησίως μονότονη τότε και η f^{-1} είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

B) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα τότε τα κοινά σημεία των C_f και $C_{f^{-1}}$, (αν υπάρχουν), βρίσκονται στην ευθεία $y = x$.

Πρέπει να τις αποδεικνύουμε για να τις χρησιμοποιήσουμε σε μία άσκηση.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $2f(x) - \eta\mu f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι $|2f(x) - x| \leq |f(x)|$.

2. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| \leq |x|$.

3. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

4. Να βρείτε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$

Λύση

1. Από την υπόθεση έχουμε:

$$2f(x) - \eta\mu f(x) = x \Rightarrow 2f(x) - x = \eta\mu f(x) \Rightarrow |2f(x) - x| = |\eta\mu f(x)| \leq |f(x)| \quad (1)$$

2. Ισχύει

$$\begin{aligned} \|2f(x) - x\| &\leq |2f(x) - x| \stackrel{(1)}{\leq} |f(x)| \Rightarrow \|2f(x) - x\| \leq |f(x)| \Rightarrow \\ \Leftrightarrow -|f(x)| &\leq |2f(x) - x| \leq |f(x)| \Rightarrow |2f(x) - f(x)| \leq |x| \Rightarrow |f(x)| \leq |x| \end{aligned}$$

3. Από το προηγούμενο ερώτημα έχουμε: $|f(x)| \leq |x| \Rightarrow -|x| \leq f(x) \leq |x|$, (2) όμως

$$\lim_{x \rightarrow 0} (-|x|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0, \text{ οπότε η (2) από το κριτήριο της παρεμβολής μας δίνει: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

4. Θέτουμε $f(x) = u$ και αφού $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, τότε $u \rightarrow 0$, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(f(x))}{f(x)} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1$$

$$2f(x) - \eta\mu f(x) = x \stackrel{\gamma\iota\alpha\ x \neq 0}{\Rightarrow} 2 \frac{f(x)}{x} - \frac{f(x)}{x} \cdot \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} \left(2 - \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right) = 1.$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow 0} \left(2 - \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right) = 2 - 1 = 1 \neq 0$, οπότε για x κοντά στο 0 θα ισχύει:

$$\frac{f(x)}{x} \left(2 - \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} \right) = 1 \Rightarrow \frac{f(x)}{x} = \frac{1}{2 - \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 - \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}} = 1.$$

Άσκηση 5

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία είναι γνησίως μονότονη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(2, 3)$.

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να βρείτε το πρόσημο της f .
- iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(2e^x + 1) = 3$.
- iv. Να λύσετε την ανίσωση $f(3x + 5) \leq 0$.

Λύση

i. Επειδή η f είναι γνησίως μονότονη και με $-1 < 2$ είναι $f(-1) = 0 < f(2) = 3$, η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι: $f(-1) = 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (άρα και 1-1) η τιμή που μηδενίζει την f είναι μοναδική. Επομένως για:

$$x < -1 \Rightarrow f(x) < f(-1) \Rightarrow f(x) < 0$$

$$x > -1 \Rightarrow f(x) > f(-1) \Rightarrow f(x) > 0.$$

Άρα $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, -1)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (-1, +\infty)$.

iii. Αφού η f είναι 1-1 έχουμε:

$$f(2e^x + 1) = 3 \Leftrightarrow f(2e^x + 1) = f(2) \Leftrightarrow 2e^x + 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$2e^x = 1 \Leftrightarrow e^x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\ln 2$$

iv. Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε:

$$f(3x + 5) \leq 0 \Leftrightarrow f(3x + 5) \leq f(-1) \Leftrightarrow 3x + 5 \leq -1 \Leftrightarrow 3x \leq -6 \Leftrightarrow x \leq -2.$$

Άσκηση 6

Δίνονται οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύουν:

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x + 1}{x - 1} = 2017.$
- $|g(x) - 2| \leq |f(x) - 1|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}.$
- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1.
- $f(x) = f(x+1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}.$

1. Να βρείτε τον αριθμό $f(1)$.
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1.
3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2.
4. Αν η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[1, 2]$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^2 g(x) = 3$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

Λύση

1. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 1 θα ισχύει: $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x).$

Θέτουμε $\frac{f(x) - 2x + 1}{x - 1} = h(x) \Rightarrow f(x) = (x - 1)h(x) + 2x - 1$, οπότε $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 2017.$

Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} [(x - 1)h(x) + 2x - 1] = 0 \cdot 2017 + 2 - 1 = 1.$ Άρα $f(1) = 1.$

2. Αφού η σχέση $|g(x) - 2| \leq |f(x) - 1|$, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτοντας $x = 1$ παίρνουμε:
 $|g(1) - 2| \leq |f(1) - 1| = 0 \Rightarrow g(1) - 2 = 0 \Rightarrow g(1) = 2.$

Επίσης έχουμε:

$$|g(x) - 2| \leq |f(x) - 1| \Leftrightarrow -|f(x) - 1| \leq g(x) - 2 \leq |f(x) - 1| \Leftrightarrow 2 - |f(x) - 1| \leq g(x) \leq 2 + |f(x) - 1| \quad (1).$$

Όμως χρησιμοποιώντας ότι $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1) = 1$, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2 - |f(x) - 1|) = \lim_{x \rightarrow 1} (2 + |f(x) - 1|) = 2, \text{ οπότε από το κριτήριο της παρεμβολής η (1) μας}$$

δίνει: $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 2 = g(1).$ Άρα η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1.

3. Αφού η σχέση $f(x) = f(x+1)$, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτοντας $x = 1$ παίρνουμε:
 $f(2) = f(1) = 1.$

Έχουμε: $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x+1) \overset{\text{Θέτω: } x+1=u, \text{ όταν } x \rightarrow 1 \text{ τότε } u \rightarrow 2}{=} \lim_{u \rightarrow 2} f(u), \text{ οπότε}$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 = f(2)$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 2.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $t(x) = x^2 g(x) - 3$ που είναι συνεχής στο $[1, 2]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης για $x=2$ η σχέση $|g(x) - 2| \leq |f(x) - 1|$ μας δίνει: $|g(2) - 2| \leq |f(2) - 1| = 0 \Rightarrow g(2) = 2$.

Έχουμε: $t(1) = 1^2 g(1) - 3 = 2 - 3 = -1 < 0$ και $t(2) = 2^2 g(2) - 3 = 4 \cdot 2 - 3 = 5 > 0$, οπότε $t(1)t(2) < 0$. Άρα ισχύει το Θ. Bolzano οπότε θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 2)$ τέτοιο ώστε $t(\xi) = 0 \Rightarrow \xi^2 g(\xi) = 3$.

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ και $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

1. Να αποδείξετε ότι $f(0) = 0$.
2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι περιττή.
3. Αν η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:
 - a. Η συνάρτηση f αντιστρέφεται.
 - b. Ισχύει: $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Λύση

1. Αφού η σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ισχύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, θέτουμε $x = y = 0$ έτσι έχουμε: $f(0+0) = f(0) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$.

2. Έστω $x \in \mathbb{R}$, τότε και $-x \in \mathbb{R}$. Θέτουμε στη σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y)$ όπου $y = -x$ και παίρνουμε:

$f(x-x) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(0) = f(x) + f(-x) \Leftrightarrow f(x) + f(-x) = 0 \Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$,
άρα η συνάρτηση f είναι περιττή.

3.

a. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$. (1)

Η σχέση $f(x+y) = f(x) + f(y)$ για $x = x_1$ και $y = -x_2$ γίνεται

$$f(x_1 - x_2) = f(x_1) + f(-x_2) \Leftrightarrow f(x_1 - x_2) = f(x_1) - f(x_2) \stackrel{(1)}{\Leftrightarrow} f(x_1 - x_2) = 0.$$

Αφού όμως η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα στο $\mathbb{R}$, θα είναι υποχρεωτικά

$x_1 - x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, που σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

b. Έστω $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $f(x) = \alpha \Leftrightarrow x = f^{-1}(\alpha)$, $f(y) = \beta \Leftrightarrow y = f^{-1}(\beta)$, έτσι έχουμε

$$\alpha + \beta = f(x) + f(y) = f(x+y) \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha + \beta) = x + y \Leftrightarrow f^{-1}(\alpha + \beta) = f^{-1}(\alpha) + f^{-1}(\beta)$$

Άρα $f^{-1}(x+y) = f^{-1}(x) + f^{-1}(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση f συνεχής στο $[-3, 3]$ για την οποία ισχύει $3x^2 + 4f^2(x) = 27$ για κάθε $x \in [-3, 3]$.

- Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.
- Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα $(-3, 3)$.
- Να βρεθεί ο τύπος της f .

iv. Αν επιπλέον $f(1) = \sqrt{6}$ να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x}$.

Λύση

i. Αν ρ ρίζα της $f(x) = 0$, τότε έχουμε:

$$3\rho^2 + 4f^2(\rho) = 27 \Leftrightarrow \rho^2 = 9 \Leftrightarrow \rho = 3 \text{ ή } \rho = -3.$$

ii. Επειδή η συνάρτηση f , ως συνεχής στο $[-3, 3]$, είναι συνεχής στο $(-3, 3)$ και δεν μηδενίζεται στο διάστημα αυτό, διατηρεί πρόσημο στο $(-3, 3)$.

iii.

- Αν $f(x) < 0$, τότε από τη σχέση $3x^2 + 4f^2(x) = 27$ έχουμε:

$$f(x) = -\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2}, x \in [-3, 3]$$

- Αν $f(x) > 0$, τότε από τη σχέση $3x^2 + 4f^2(x) = 27$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{\sqrt{27-3x^2}}{2}, x \in [-3, 3]$$

iv. $f(1) = \sqrt{6} > 0$ άρα από το ερώτημα (Γ3) έχουμε:

$$f(x) = \frac{\sqrt{27-3x^2}}{2}, x \in [-3, 3].$$

$$\text{Οπότε } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sqrt{27-3x^2}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{27-3x^2} - 3\sqrt{3}}{2x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{27-3x^2-27}{2x(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{2(\sqrt{27-3x^2}+3\sqrt{3})} = 0$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 9} \leq 3 + xf(x) \leq x^8 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3} + 3 \text{ για κάθε } x > 0. \text{ Να βρείτε:}$$

i. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{2x}.$

ii. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} x^7 \eta \mu \frac{2}{x}.$

iii. Το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$

iv. Το $f(0).$

Λύση

i. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x + 9 - 9}{2x(\sqrt{x^2 + 2x + 9} + 3)} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+2)}{2x(\sqrt{x^2 + 2x + 9} + 3)} = \frac{1}{6}$$

ii. Επειδή $\left| \eta \mu \frac{2}{x} \right| \leq 1$ για κάθε $x \neq 0$, έχουμε:

$$\left| x^7 \eta \mu \frac{2}{x} \right| = |x^7| \cdot \left| \eta \mu \frac{2}{x} \right| \leq |x^7| \Leftrightarrow -|x^7| \leq x^7 \eta \mu \frac{2}{x} \leq |x^7|$$

Αλλά $\lim_{x \rightarrow 0} (-|x^7|) = \lim_{x \rightarrow 0} |x^7| = 0$

Οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^7 \eta \mu \frac{2}{x} \right) = 0$

iii. Για κάθε $x > 0$ έχουμε:

$$\sqrt{x^2 + 2x + 9} \leq 3 + xf(x) \leq x^8 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3} + 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{x} \leq f(x) \leq \frac{x^8 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3}}{x}$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 9} - 3}{2x} = \frac{1}{3} \text{ (από i ερώτημα).}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^8 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{x}{3}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^7 \eta \mu \frac{2}{x} + \frac{1}{3} \right) = 0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \text{ (από ii ερώτημα)}$$

$$\text{Άρα σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής είναι } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3}$$

iv. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$, είναι συνεχής και στο $x = 0$. Άρα

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{1}{3}.$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(2) = 5$.

- i. Να βρείτε το $f(5)$.
- ii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.
- iii. Να βρείτε το $f^{-1}(2)$.
- iv. Να λύσετε την εξίσωση: $f(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1) = 2$.

Λύση

i. Η σχέση $(f \circ f)(x) + 2f(x) = 2x + 1$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ οπότε για $x = 2$ έχουμε:

$$f(f(2)) + 2f(2) = 2 \cdot 2 + 1 \Leftrightarrow f(5) + 10 = 5 \Leftrightarrow f(5) = -5$$

ii. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f(f(x_1)) = f(f(x_2)) \text{ (επειδή η } f \text{ είναι συνάρτηση) και}$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2f(x_1) = 2f(x_2)$$

$$\text{άρα } f(f(x_1)) + 2f(x_1) = f(f(x_2)) + 2f(x_2) \Rightarrow 2x_1 + 1 = 2x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2$$

οπότε η f είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

iii. Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(2)$ και έχουμε:

$$f(f(f^{-1}(2))) + 2f(f^{-1}(2)) = 2f^{-1}(2) + 1 \Rightarrow f(2) + 4 = 2f^{-1}(2) + 1 \Rightarrow$$

$$5 + 4 - 1 = 2f^{-1}(2) \Rightarrow f^{-1}(2) = 4.$$

iv. Έχουμε:

$$f(f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1) = 2 \Leftrightarrow f^{-1}(2x^2 + 7x) - 1 = f^{-1}(2) \Leftrightarrow$$

$$f^{-1}(2x^2 + 7x) = 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 7x = f(5) \Leftrightarrow 2x^2 + 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$x_1 = -1 \text{ ή } x_2 = -\frac{5}{2}.$$

Άσκηση 11

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\alpha) = 2\beta$ και $f(\beta) = 2\alpha$ με $0 < \alpha < \beta$. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη στο $[\alpha, \beta]$, τότε:

1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.
2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0 \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(x_0) = \alpha + \beta$.
3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2x$, έχει ακριβώς μια λύση στο (α, β) .

Λύση

1. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως μονότονη στο $[\alpha, \beta]$ και

$0 < \alpha < \beta \Leftrightarrow 2\alpha < 2\beta \stackrel{\text{υπόθεση}}{\Leftrightarrow} f(\beta) < f(\alpha)$, τότε η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$.

2. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \alpha - \beta$, η οποία είναι συνεχής (f συνεχής) και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ γιατί αν,

$$x_1, x_2 \in [\alpha, \beta] \text{ με } x_1 < x_2 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow f(x_1) - \alpha - \beta > f(x_2) - \alpha - \beta \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2).$$

Οπότε το σύνολο τιμών της g είναι

$$g([\alpha, \beta]) = [g(\beta), g(\alpha)] = [f(\beta) - \alpha - \beta, f(\alpha) - \alpha - \beta] = [\alpha - \beta, \beta - \alpha] \text{ και επειδή το}$$

$$0 \in \left[\begin{array}{cc} \alpha - \beta & \beta - \alpha \\ - & + \end{array} \right], \text{ τότε υπάρχει ακριβώς (} g \text{ γνησίως φθίνουσα) ένα } x_0 \in (\alpha, \beta) \text{ έτσι ώστε}$$

$$g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = \alpha + \beta$$

3. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x) = f(x) - 2x$, η οποία είναι συνεχής (αφού f συνεχής) και γνησίως φθίνουσα στο $[\alpha, \beta]$ γιατί αν,

$$x_1, x_2 \in [\alpha, \beta] \text{ με } x_1 < x_2 \stackrel{f \downarrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) > f(x_2) \text{ (1) και } x_1 < x_2 \Leftrightarrow -2x_1 > -2x_2 \text{ (2).}$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) έχουμε: $f(x_1) - 2x_1 > f(x_2) - 2x_2 \Leftrightarrow h(x_1) > h(x_2)$

Οπότε το σύνολο τιμών της h είναι

$$h([\alpha, \beta]) = [h(\beta), h(\alpha)] = [f(\beta) - 2\beta, f(\alpha) - 2\alpha] = [2(\alpha - \beta), 2(\beta - \alpha)] \text{ και επειδή το}$$

$$0 \in \left[\underbrace{2(\alpha - \beta)}_{-}, \underbrace{2(\beta - \alpha)}_{+} \right], \text{ τότε υπάρχει ακριβώς (} h \text{ γνησίως φθίνουσα) ένα } x_1 \in (\alpha, \beta) \text{ έτσι}$$

$$\text{ώστε } h(x_1) = 0 \Leftrightarrow f(x_1) = 2x_1.$$

Άσκηση 12

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x)g(x) = -e^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

1. Αν $f(2017) > 0$, να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και g .

2. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(2017)x^4 + 3x^3 + 1}{(|\theta| - |\eta\mu\theta|)x^3 + (\theta - 1)x - 1}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

3. Αν $f(1) < e$ και $g(-2) > -2$, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g τέμνει την ευθεία $y = x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (-2, 1)$.

Λύση

1. Είναι $f(x)g(x) = -e^x < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $f(x)g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επομένως οι συναρτήσεις f, g δεν έχουν ρίζες στο $\mathbb{R}$ και αφού είναι και συνεχείς θα διατηρούν σταθερό πρόσημο, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και μάλιστα ετερόσημες.

Η συνάρτηση f διατηρεί σταθερό πρόσημο σε όλο το $\mathbb{R}$ και επειδή $f(2017) > 0$, θα είναι $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η $g(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. Αφού $g(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε $g(2017) < 0$.

- Αν $\theta = 0$ τότε $|\eta\mu\theta| = |\theta| \Leftrightarrow |\theta| - |\eta\mu\theta| = 0$ και το όριο γίνεται

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(2017)x^4 + 3x^3 + 1}{-x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(2017)x^4}{-x} = -g(2017) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = -g(2017)(+\infty) \stackrel{g(2017) < 0}{=} +\infty$$

- Αν $\theta \neq 0$ τότε $|\eta\mu\theta| < |\theta| \Leftrightarrow |\theta| - |\eta\mu\theta| > 0$ και το όριο γίνεται:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(2017)x^4 + 3x^3 + 1}{(|\theta| - |\eta\mu\theta|)x^3 + (\theta - 1)x - 1} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(2017)x^4}{(|\theta| - |\eta\mu\theta|)x^3} = \frac{g(2017)}{|\theta| - |\eta\mu\theta|} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = \\ &= \frac{g(2017)}{|\theta| - |\eta\mu\theta|} (+\infty) \stackrel{g(2017) < 0}{=} \stackrel{|\theta| - |\eta\mu\theta| > 0}{=} -\infty. \end{aligned}$$

3. Πρέπει να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = x$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο $(-2, 1)$.

Έστω η συνάρτηση $h(x) = g(x) - x$, η οποία είναι συνεχής (ως άθροισμα συνεχών) στο $[-2, 1]$.

Είναι $h(1) = g(1) - 1 < -1 - 1 = -2 < 0$, γιατί: $f(1)g(1) = -e \Leftrightarrow g(1) = \frac{-e}{f(1)} < -1$ αφού

$$f(1) < e \Leftrightarrow \frac{e}{f(1)} > 1 \Leftrightarrow -\frac{e}{f(1)} < -1.$$

Επίσης $h(-2) = g(-2) + 2 > -2 + 2 = 0 \Leftrightarrow h(-2) > 0$.

Άρα η h είναι συνεχής στο $[-2,1]$ και $h(-2)h(1) < 0$, οπότε ισχύει το Θ.Bolzano που σημαίνει ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (-2,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = x_0$.

Άσκηση 13

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) = \alpha^{2x} + 2\alpha^x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Αν $f(0) = -2$ να βρείτε τον τύπο της f .

iii. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$, $\alpha < 2$.

iv. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x}$, $\alpha > 3$

Λύση

i. Είναι $f^2(x) = \alpha^{2x} + 2\alpha^x + 1 = (\alpha^x + 1)^2 \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα, η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Επειδή $f(0) = -2$ είναι $f(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Άρα $f(x) = -(\alpha^x + 1) = -\alpha^x - 1$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x} =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2\alpha^x - 2 - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x} =$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x \cdot \left[-2\left(\frac{\alpha}{3}\right)^x - 2\left(\frac{1}{3}\right)^x - 1 \right]}{3^x \cdot \left[3\left(\frac{2}{3}\right)^x + 4 \right]} = \frac{-1}{4}$, αφού $0 < \frac{\alpha}{3} < 1$, $0 < \frac{1}{3} < 1$ και $0 < \frac{2}{3} < 1$ άρα

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha}{3}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^x = 0$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2f(x) - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2\alpha^x - 2 - 3^x}{3 \cdot 2^x + 4 \cdot 3^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^x \cdot \left[-2 \left(\frac{\alpha}{2} \right)^x - 2 \left(\frac{1}{2} \right)^x - \left(\frac{3}{2} \right)^x \right]}{2^x \left[3 + 4 \left(\frac{3}{2} \right)^x \right]} = -\infty, \text{ αφού } \frac{\alpha}{2} > 1, \frac{3}{2} > 1 \text{ και } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{ άρα}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\alpha}{2} \right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^x = 0 \text{ και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x = +\infty$$

Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $x^4 + 1 \leq 4f(x) \leq x^4 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4}$.

ii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \right]$.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4\eta\mu 3x}{2x^2 + 3\eta\mu x}$.

iv. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [0, 1]$ τέτοιο, ώστε $f(\xi) - \xi = 0$.

Λύση

i. Η σχέση $x^4 + 1 \leq 4f(x) \leq x^4 + 2$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Για $x = 0$, έχουμε:

$$1 \leq 4f(0) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2}$$

Για $x = 1$, έχουμε:

$$2 \leq 4f(1) \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4}$$

ii. Για $x \neq 0$, θέτουμε όπου x το $\frac{1}{x}$ στη δοσμένη σχέση και έχουμε:

$$\left(\frac{1}{x}\right)^4 + 1 \leq 4f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \left(\frac{1}{x}\right)^4 + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^4 \leq x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{4} + \frac{1}{2}x^4$$

Είναι: $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x^4\right) = \frac{1}{4}$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}x^4\right) = \frac{1}{4}$

Άρα από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0} x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4}$

iii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4\eta\mu 3x}{2x^2 + 3\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) + 4 \frac{\eta\mu 3x}{x}}{2x + 3 \frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{\frac{1}{4} + 4 \cdot 3}{0 + 3} = \frac{49}{12}$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0} x^4 f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{4} \text{ (από ii), } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 3 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 3 \cdot 1 = 3$$

iv. Έστω $g(x) = f(x) - x$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$. Επίσης ισχύει:

$$g(0) \cdot g(1) = f(0) \cdot [f(1) - 1] < 0 \text{ αφού } \frac{1}{4} \leq f(0) \leq \frac{1}{2} \Rightarrow f(0) > 0 \text{ και } \frac{1}{2} \leq f(1) \leq \frac{3}{4} \Rightarrow f(1) < 1.$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi) = 0 \Leftrightarrow f(\xi) - \xi = 0$

Άσκηση 15

i. Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2f(x) - 4}{x} = 2$, να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ii. Δίνεται η συνάρτηση $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$xg(x) + 2 \leq 2\sin x - \eta\mu x + x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, αν είναι γνωστό ότι υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός.

iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f^2(x) + \eta\mu^2(2x)}{\varepsilon\varphi^2 x + x^2 g(x)}$

Λύση

i. Θέτουμε: $h(x) = \frac{2f(x) - 4}{x} \Leftrightarrow f(x) = \frac{xh(x) + 4}{2}$

Έτσι, έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xh(x) + 4}{2} = 2$$

ii. Είναι:

$$xg(x) + 2 \leq 2\sin x - \eta\mu x + x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε έχουμε: } xg(x) \leq 2\sin x - \eta\mu x + x - 2$$

- Αν $x > 0$, τότε: $g(x) \leq \frac{2\sin x - \eta\mu x + x - 2}{x} \Leftrightarrow g(x) \leq \frac{2(\sin x - 1)}{x} - \frac{\eta\mu x}{x} + 1$ και

$$\text{επομένως } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \leq 2 \cdot 0 - 1 + 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \leq 0.$$

- Αν $x < 0$, τότε: $g(x) \geq \frac{2\sin x - \eta\mu x + x - 2}{x} \Leftrightarrow g(x) \geq \frac{2(\sin x - 1)}{x} - \frac{\eta\mu x}{x} + 1$ και

επομένως

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \geq 2 \cdot 0 - 1 + 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \geq 0.$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 f^2(x) + \eta \mu^2(2x)}{\epsilon \phi^2 x + x^2 g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \left[f^2(x) + \frac{\eta \mu^2(2x)}{x^2} \right]}{x^2 \left[\left(\frac{\epsilon \phi x}{x} \right)^2 + g(x) \right]} = \frac{4+4}{1+0} = 8.$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2(2x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \frac{\eta \mu^2(2x)}{(2x)^2} = 4 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu(2x)}{(2x)} \right)^2 = 4 \lim_{u \rightarrow 0} \left(\frac{\eta \mu u}{u} \right)^2 = 4 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\epsilon \phi x}{x} \right)^2 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sigma \upsilon \nu x} \cdot \frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 = 1$$

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $3f(x) + 2f^3(x) = 4x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

- Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της.
- Να αποδείξετε ότι η f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα.
- Να βρείτε τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και f^{-1} , αν γνωρίζετε ότι αυτά βρίσκονται πάνω στην ευθεία με εξίσωση $y = x$.
- Να λυθεί η εξίσωση: $f(2e^{x-1}) = f(3-x)$.

Λύση

i. Θα αποδείξουμε ότι η ευθεία $y = \alpha$ έχει με τη C_f ένα τουλάχιστον κοινό σημείο, δηλαδή η εξίσωση $\alpha = f(x)$ έχει για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ λύση στο $\mathbb{R}$.

$$\alpha = f(x) \Leftrightarrow f(x) - \alpha = 0 \Leftrightarrow (f(x) - \alpha) \left(2 \underbrace{\left(\overbrace{f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2}^* \right)}_{>0} + 3 \right) = 0, \quad (1)$$

(*) την παράσταση $f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2$ την αντιμετωπίζουμε σαν τριώνυμο ως προς $f(x)$ έτσι έχουμε $\Delta = -3\alpha^2 \leq 0 \Rightarrow f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2 \geq 0 \Rightarrow f^2(x) + \alpha f(x) + \alpha^2 + 3 \geq 3 > 0$

$$(1) \Leftrightarrow 2f^3(x) - 2\alpha^3 + 3f(x) - 3\alpha = 0 \Leftrightarrow 2f^3(x) + 3f(x) = 2\alpha^3 + 3\alpha \Leftrightarrow$$

$4x + 1 = 2\alpha^3 + 3\alpha \Leftrightarrow x = \frac{2\alpha^3 + 3\alpha - 1}{4}$, δηλαδή για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ έχουμε λύση, άρα το σύνολο τιμών είναι το $\mathbb{R}$.

Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $f(x_1) = f(x_2)$, τότε έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^3(x_1) = f^3(x_2) \Rightarrow 2f^3(x_1) = 2f^3(x_2)$$

$$\text{και } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3f(x_1) = 3f(x_2)$$

$$\text{άρα } 2f^3(x_1) + 3f(x_1) = 2f^3(x_2) + 3f(x_2) \Rightarrow 4x_1 + 1 = 4x_2 + 1$$

οπότε η f είναι 1-1, άρα αντιστρέφεται.

Θέτουμε όπου x το $f^{-1}(x)$ στη δοθείσα σχέση και έχουμε:

$$3f(f^{-1}(x)) + 2[f(f^{-1}(x))]^3 = 4f^{-1}(x) + 1 \Rightarrow$$

$$3x + 2x^3 = 4f^{-1}(x) + 1 \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x^3 + 3x - 1}{4}.$$

ii. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow 2x_1^3 < 2x_2^3$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow 3x_1 - 1 < 3x_2 - 1$$

άρα

$$2x_1^3 + 3x_1 - 1 < 2x_2^3 + 3x_2 - 1 \Rightarrow \frac{2x_1^3 + 3x_1 - 1}{4} < \frac{2x_2^3 + 3x_2 - 1}{4} \Rightarrow$$

$$f^{-1}(x_1) < f^{-1}(x_2),$$

οπότε f^{-1} γνησίως αύξουσα.

iii. Έχουμε:

$$f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = x \Leftrightarrow$$

$$\frac{2x^3 + 3x - 1}{4} = x \Leftrightarrow 2x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

iv. Η f είναι 1-1, οπότε έχουμε:

$$f(2e^{x-1}) = f(3-x) \Leftrightarrow 2e^{x-1} = 3-x \Leftrightarrow 2e^{x-1} + x - 3 = 0 \quad (1)$$

Η (1) έχει προφανή ρίζα την $x = 1$.

Έστω $g(x) = 2e^{x-1} + x - 3$. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 1 < x_2 - 1 \Rightarrow e^{x_1-1} < e^{x_2-1} \Rightarrow 2e^{x_1-1} < 2e^{x_2-1}$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 - 3 < x_2 - 3$$

$$\text{άρα } 2e^{x_1-1} + x_1 - 3 < 2e^{x_2-1} + x_2 - 3 \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2)$$

Οπότε g γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως η ρίζα $x = 1$ είναι μοναδική.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει

$$f^2(x) + 4\eta\mu^2 x = x^2 - 3x + 4f(x)\eta\mu x + 10, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2\eta\mu x$ διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε τη συνάρτηση f αν $f(0) = \sqrt{10}$.

iii. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sigma\upsilon\nu x - 1 - \sqrt{10}}{x}$.

Λύση

i. Είναι:

$$f^2(x) + 4\eta\mu^2 x = x^2 - 3x + 4f(x)\eta\mu x + 10 \Leftrightarrow$$

$[f(x) - 2\eta\mu x]^2 = x^2 - 3x + 10 > 0$, (1) γιατί $\Delta = 9 - 40 = -31 < 0$ που σημαίνει ότι το τριώνυμο $x^2 - 3x + 10$ είναι ομόσημο του $1 > 0$. Οπότε $f(x) - 2\eta\mu x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και αφού η $g(x) = f(x) - 2\eta\mu x$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ θα διατηρεί σταθερό πρόσημο.

ii. Είναι: $f(0) = \sqrt{10}$, οπότε $g(0) = f(0) - 2\eta\mu 0 = f(0) = \sqrt{10} > 0$ και από (i) έχουμε:

$$g(x) > 0 \Leftrightarrow f(x) - 2\eta\mu x > 0. \text{ Άρα } f(x) - 2\eta\mu x = \sqrt{x^2 - 3x + 10} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 10} + 2\eta\mu x.$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{10} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 10} + 2\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - \sqrt{10} - 1}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 3x + 10} - \sqrt{10}}{x} + 2 \frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) \stackrel{(*)}{=} -\frac{3\sqrt{10}}{20} + 2 + 0 = -\frac{3\sqrt{10}}{20} + 2.$$

$$\stackrel{(*)}{\lim_{x \rightarrow 0}} \left(\frac{\sqrt{x^2 - 3x + 10} - \sqrt{10}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{(\sqrt{x^2 - 3x + 10} - \sqrt{10})(\sqrt{x^2 - 3x + 10} + \sqrt{10})}{x(\sqrt{x^2 - 3x + 10} + \sqrt{10})} \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 3x}{x(\sqrt{x^2 - 3x + 10} + \sqrt{10})} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 3x + 10} + \sqrt{10}} \right) = \frac{-3}{2\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{20}$$

$$\stackrel{(*)}{\lim_{x \rightarrow 0}} \left(2 \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 2 \cdot 1 = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} \right) = 0$$

Άσκηση 18

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ και $g(x) = 2 - x$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f και g .
- Να ορισθεί η συνάρτηση $fo g$.
- Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .
- Να βρείτε το είδος της μονοτονίας της συνάρτησης $fofog$.

Λύση

i. Για να ορίζεται η f , πρέπει: $x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$

Άρα το πεδίο ορισμού της είναι το: $D_f = [-1, +\infty)$.

Το πεδίο ορισμού της g είναι το: $D_g = \mathbb{R}$ (πολυωνυμική)

ii. Το πεδίο ορισμού της $fo g$ είναι:

$$D_{fo g} = \{x \in \mathbb{R} / 2 - x \geq -1\} = \{x \in \mathbb{R} / x \leq 3\} = (-\infty, 3] \neq \emptyset$$

Άρα για κάθε $x \in (-\infty, 3]$ έχουμε:

$$(fo g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{2-x+1} - 1 = \sqrt{3-x} - 1$$

iii. Για κάθε $x_1, x_2 \in [-1, +\infty)$ έχουμε:

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{x_1+1} - 1 = \sqrt{x_2+1} - 1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Άρα, η f αντιστρέφεται.

Έστω $f(x) = y \Leftrightarrow y = \sqrt{x+1} - 1 \Leftrightarrow y+1 = \sqrt{x+1}$, (πρέπει $y \geq -1$) $\Leftrightarrow x = (y+1)^2 - 1$ οπότε $f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 1$ με $x \geq -1$

iv. Για κάθε $x_1, x_2 \in [-1, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 + 1 < x_2 + 1 \Rightarrow \sqrt{x_1+1} - 1 < \sqrt{x_2+1} - 1 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα. Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2 - x_1 > 2 - x_2 \Rightarrow g(x_1) > g(x_2).$$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα.

$$D_{f \circ f \circ g} = D_{f \circ (f \circ g)} = \left\{ x \in (-\infty, 3] / \sqrt{3-x} - 1 \geq -1 \right\} = (-\infty, 3] \neq \emptyset.$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 3]$ με

$$x_1 < x_2 \quad \overset{g \text{ γν. φθίνουσα}}{\Rightarrow} \quad g(x_1) > g(x_2) \quad \overset{f \text{ γν. αύξουσα}}{\Rightarrow} \quad f(g(x_1)) > f(g(x_2)) \Rightarrow$$

$$f(f(g(x_1))) > f(f(g(x_2))).$$

Άρα η συνάρτηση $f \circ f \circ g$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 3]$.

Άσκηση 19

$$\text{Δίνεται η συνεχής συνάρτηση } f \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{2x + \kappa \eta \mu x}{x - x^2}, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases}$$

- Να βρείτε τα κ, λ .
- Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
- Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2 \ln(8x + 1)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

Λύση

i. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, άρα και στο $x_0 = 0$

$$f : \text{συνεχής στο } x = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2x + \kappa \eta \mu x}{x - x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2 + \kappa \cdot \frac{\eta \mu x}{x}}{1 - x} = \frac{2 + \kappa \cdot 1}{1} = 2 + \kappa$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x \right) = 4$$

$$f(0) = \lambda$$

$$\text{Άρα: } \lambda = 4 \text{ και } 2 + \kappa = 4 \Leftrightarrow \kappa = 2$$

$$\text{ii. Για } \kappa = 2 \text{ και } \lambda = 4 \text{ έχουμε: } f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 2\eta \mu x}{x - x^2}, & x < 0 \\ 4, & x = 0 \text{ οπότε:} \\ \sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x, & x > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{8x^2 + x + 16} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8x^2 + x + 16 - 9x^2}{\sqrt{8x^2 + x + 16} + 3x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(-1 + \frac{1}{x} + \frac{16}{x^2} \right)}{x \left(\sqrt{8 + \frac{1}{x} + \frac{16}{x^2}} + 3 \right)} = (+\infty) \left(\frac{-1}{\sqrt{8} + 3} \right) = -\infty$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 2\eta\mu x}{x - x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 + 2\frac{\eta\mu x}{x}}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{1}{1 - x} \left(2 + 2\frac{\eta\mu x}{x} \right) \right] = 0,$$

$$\text{αφού: } \left| \frac{\eta\mu x}{x} \right| = \frac{|\eta\mu x|}{|x|} \leq \frac{1}{|x|} \Leftrightarrow \frac{-1}{|x|} \leq \frac{\eta\mu x}{x} \leq \frac{1}{|x|}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{1}{|x|} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0, \text{ οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\eta\mu x}{x} = 0$$

iv. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - 2\ln(8x+1)$, $x \in [0,1]$

Η g είναι συνεχής στο $[0,1]$ (ως σύνθεση και αποτέλεσμα πράξεων συνεχών)

Επίσης:

$$g(0) = f(0) = 4 > 0$$

$$g(1) = f(1) - 2\ln 9 = 2 - 2\ln 9 = 2\ln \frac{e}{9} < 0$$

Άρα από το θεώρημα Bolzano έχουμε ότι η εξίσωση $g(x) = 0 \Leftrightarrow f(x) = 2\ln(8x+1)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

Άσκηση 20

$$\text{Δίνεται η συνάρτηση } f \text{ με } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 5x + 6}{4(x^3 - 2x^2)}, & x \in (-\infty, 0) \cup (0, 2) \\ \frac{\kappa x + 1}{2(x^2 - 4)}, & x \in (2, +\infty) \end{cases} \quad \text{και η } g: \mathbb{R} - \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x \cdot g(x) + 2x}{3x} = 5 \text{ και } g(x+3) = g(x) + f(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε:

- i. Το κ αν υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.
- ii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.
- iii. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.
- iv. Το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} g(x)$.

Λύση

$$\text{i. Είναι: } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{4(x^3 - 2x^2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x-3)}{4x^2(x-2)} = -\frac{1}{16}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\kappa x + 1}{2(x-2)(x+2)}$$

$$\text{Έχουμε: } \lim_{x \rightarrow 2^+} (\kappa x + 1) = 2\kappa + 1$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 2^+} 2(x-2)(x+2) = 0$$

$$\text{Αν } 2\kappa + 1 \neq 0 \Leftrightarrow \kappa \neq -\frac{1}{2} \text{ τότε το } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \text{ ή } -\infty.$$

$$\text{Αν } 2\kappa + 1 = 0 \Leftrightarrow \kappa = -\frac{1}{2} \text{ τότε έχουμε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-\frac{1}{2}x + 1}{2(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-(x-2)}{4(x-2)(x+2)} = -\frac{1}{16}.$$

Δηλαδή υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ αν και μόνο αν $\kappa = -\frac{1}{2}$

ii. Είναι: $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 5x + 6}{4(x^3 - 2x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x-2)(x-3)}{4x^2(x-2)} = -\infty$

iii. Θέτουμε:

$$h(x) = \frac{\eta\mu x g(x) + 2x}{3x} \Leftrightarrow \eta\mu x g(x) = 3xh(x) - 2x \text{ και για } x \neq 0 \text{ έχουμε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3xh(x) - 2x}{\eta\mu x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} - 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} = 15 - 2 = 13$$

iv. Είναι: $\lim_{x \rightarrow 3} g(x) \stackrel{x=u+3}{=} \lim_{u \rightarrow 0} g(u+3) = \lim_{u \rightarrow 0} [g(u) + f(u)] = 13 + (-\infty) = -\infty$

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = -2x^5 - 2kx^3 + 2k^5$, $x \in \mathbb{R}$ και $k > 0$.

α) Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0, k)$.

δ) Αν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f(x) + 2k^5}{\eta\mu^3 x} = \lambda^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$, να βρείτε τη καμπύλη στην οποία βρίσκονται τα σημεία $M(k, \lambda)$.

Λύση

α) Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^5 < x_2^5 \Rightarrow -2x_1^5 > -2x_2^5 \quad (1) \text{ και}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \xRightarrow{-2k < 0} -2kx_1^3 > -2kx_2^3 \Rightarrow -2kx_1^3 + 2k^5 > -2kx_2^3 + 2k^5. \quad (2)$$

Προσθέτοντας τις (1), (2) έχουμε: $-2x_1^5 - 2kx_1^3 + 2k^5 > -2x_2^5 - 2kx_2^3 + 2k^5 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

Οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Η f έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το:

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right). \text{ Είναι:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^5 - 2kx^3 + 2k^5) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^5) = -2(+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 - 2kx^3 + 2k^5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5) = -2(-\infty) = +\infty$$

Επομένως είναι: $f(\mathbb{R}) = (-\infty, +\infty)$

γ) Για τη συνεχή συνάρτηση f στο $[0, k]$, ισχύουν:

- $f(0) = 2k^5 > 0$
- $f(k) = -2k^5 - 2k^4 + 2k^5 = -2k^4 < 0$

Άρα από το θεώρημα Bolzano η $f(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, k)$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ η ρίζα είναι μοναδική.

δ)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-f(x) + 2k^5}{\eta\mu^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^5 + 2kx^3 - 2k^5 + 2k^5}{\eta\mu^3 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(2x^2 + 2k)}{\eta\mu^3 x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 2k}{\frac{\eta \mu^3 x}{x^3}} = 2k = \lambda^2, \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} = 1.$$

Δηλαδή οι συντεταγμένες των σημείων $M(k, \lambda)$, ικανοποιούν την εξίσωση: $y^2 = 2x$.

Άρα ανήκουν σε μία παραβολή με εξίσωση $y^2 = 2x$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = 3\ln 2x + e^{3x} + 4x - 2$.

i. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία την f .

ii. Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = e^{\frac{3}{2}}$

iv. Να βρείτε τον πραγματικό θετικό αριθμό μ για το οποίο ισχύει:

$$3\ln 4\mu - 3\ln(2\mu^2 + 2) - 4(\mu^2 + 1) = e^{3(\mu^2 + 1)} - e^{6\mu} - 8\mu$$

Λύση

i. Η συνάρτηση f έχει $D_f = (0, +\infty)$. Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ με $x_1 < x_2$ έχουμε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 2x_1 < 2x_2 \Rightarrow \ln 2x_1 < \ln 2x_2 \Rightarrow 3\ln 2x_1 < 3\ln 2x_2$$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow 3x_1 < 3x_2 \Rightarrow e^{3x_1} < e^{3x_2}$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow 4x_1 < 4x_2 \Rightarrow 4x_1 - 2 < 4x_2 - 2.$$

$$\text{Άρα } 3\ln 2x_1 + e^{3x_1} + 4x_1 - 2 < 3\ln 2x_2 + e^{3x_2} + 4x_2 - 2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2).$$

Οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

ii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (3\ln 2x + e^{3x} + 4x - 2) = -\infty + 1 + 0 - 2 = -\infty$$

$$\text{αφού } \lim_{x \rightarrow 0} \ln 2x = \lim_{u \rightarrow 0} \ln u = -\infty, \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} e^{3x} = \lim_{u \rightarrow 0} e^u = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3\ln 2x + e^{3x} + 4x - 2) = +\infty \text{ αφού } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln 2x = \lim_{u \rightarrow +\infty} \ln u = +\infty \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{3x} = \lim_{u \rightarrow +\infty} e^u = +\infty$$

iii. $f(x) = e^{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$, (αφού η f γνησίως αύξουσα άρα και 1-1) και η ρίζα είναι μοναδική.

iv. Είναι:

$$3\ln 4\mu - 3\ln(2\mu^2 + 2) - 4(\mu^2 + 1) = e^{3(\mu^2 + 1)} - e^{6\mu} - 8\mu \Leftrightarrow$$

$$3\ln 4\mu + e^{6\mu} + 8\mu = 3\ln 2(\mu^2 + 1) + e^{3(\mu^2 + 1)} + 4(\mu^2 + 1) \Leftrightarrow$$

$$3\ln 2 \cdot (2\mu) + e^{3(2\mu)} + 4 \cdot (2\mu) - 2 = 3\ln 2(\mu^2 + 1) + e^{3(\mu^2 + 1)} + 4(\mu^2 + 1) - 2 \Leftrightarrow$$

$$f(2\mu) = f(\mu^2 + 1) \Leftrightarrow \mu^2 + 1 = 2\mu \Leftrightarrow \mu = 1 \text{ (Διπλή ρίζα).}$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι συνθήκες:

- $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $4f(x) + 3f(x+1) = 2x^2 - 2013$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

i. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

ii. Να βρείτε το $f(1)$.

iii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x - 1$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0,1)$.

Λύση

i. Ισχύει: $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$, $x \in \mathbb{R}$

- Για $x > 0$, έχουμε: $|3\eta\mu x - 2xf(x)| \leq \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 \leq 3\eta\mu x - 2xf(x) \leq \frac{1}{2}x^2 \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x}$$

$$\text{αλλά: } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \frac{3}{2} \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \frac{3}{2}$$

- Για $x < 0$, έχουμε: $\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x} \leq f(x) \leq -\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x}$ αλλά $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \frac{3}{2}$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{4}x + \frac{3}{2} \frac{\eta\mu x}{x} \right) = \frac{3}{2}$$

οπότε λόγω του κριτηρίου παρεμβολής έχουμε:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{3}{2}$$

$$\text{Άρα } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \frac{3}{2} \text{ και επομένως } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2}.$$

ii. Η σχέση $4f(x) + 3f(x+1) = 2x^2 - 2013$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ άρα και για $x = 0$ οπότε έχουμε: $4f(0) + 3f(1) = -2013$. Αλλά f συνεχής οπότε:

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Άρα } 4 \cdot \frac{3}{2} + 3f(1) = -2013 \Leftrightarrow f(1) = -673.$$

iii. Αρκεί να υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = g(x_0) \Leftrightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0$

Έστω $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in [0,1]$. Είναι:

$$h(0) = f(0) - g(0) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} > 0$$

$$h(1) = f(1) - g(1) = -673 < 0$$

$$\text{Οπότε: } h(0)h(1) = -\frac{673}{2} < 0$$

Επειδή η h είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων, από το θεώρημα Bolzano συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = g(x_0)$.

Άσκηση 4

Θεωρούμε τη συνεχή και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

- $4\eta\mu(x-2) \leq (x-2)f(x) \leq x^2 - 4$, για κάθε $x \in (0, 2)$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)+1}{x} = 5$.

1. Να βρείτε τους αριθμούς $f(0)$ και $f(2)$.

2. Αν $g(x) = 4 - e^x - f(x)$, $x \in (0, 2)$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

3. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $t(x) = \ln(-f(x) + 4)$, $x \in (0, 2)$ τέμνει την $y = x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0 \in (0, 2)$.

Λύση

1. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ θα είναι συνεχής και στα άκρα 0 και 2, οπότε θα ισχύει: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ και $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

$$\bullet \quad 4\eta\mu(x-2) \leq (x-2)f(x) \leq x^2 - 4 \quad \stackrel{x < 2 \Leftrightarrow x-2 < 0}{\Rightarrow} \quad x+2 \leq f(x) \leq 4 \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} \quad (1)$$

Όμως $\lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4$ και $\lim_{x \rightarrow 2} 4 \frac{\eta\mu(x-2)}{x-2} \stackrel{x-2=u, x \rightarrow 2 \Rightarrow u \rightarrow 0}{=} 4 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 4$, οπότε η (1) από το κριτήριο της παρεμβολής μας δίνει: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$. Άρα $f(2) = 4$.

$$\bullet \quad \text{Θέτουμε } \frac{f(x)+1}{x} = s(x) \Rightarrow f(x) = xs(x) - 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} s(x) = 5.$$

Έχουμε: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (xs(x) - 1) = 0 \cdot 5 - 1 = -1$. Άρα $f(0) = -1$.

2. Έστω $x_1, x_2 \in (0, 2)$ με $x_1 < x_2$.

Τότε: $x_1 < x_2 \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow -f(x_1) > -f(x_2)$ (2) και

$$x_1 < x_2 \stackrel{e^x \uparrow}{\Leftrightarrow} e^{x_1} < e^{x_2} \Leftrightarrow 4 - e^{x_1} > 4 - e^{x_2} \quad (3).$$

Προσθέτοντας τις (2) και (3) έχουμε: $4 - e^{x_1} - f(x_1) > 4 - e^{x_2} - f(x_2) \Leftrightarrow g(x_1) > g(x_2)$ που σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, 2)$.

Αφού η συνάρτηση g είναι συνεχής (άθροισμα συνεχών συναρτήσεων) και γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, 2)$, το σύνολο τιμών της θα είναι: $g(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) \right) = (-e^2, 4)$ γιατί

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (4 - e^x - f(x)) = 4 - e^2 - 4 = -e^2 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (4 - e^x - f(x)) = 4 - e^0 + 1 = 4.$$

3. Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 2)$ έτσι ώστε να ισχύει: $t(x_0) = x_0$. Είναι:

$$t(x_0) = x_0 \Leftrightarrow \ln(-f(x_0) + 4) = x_0 \Leftrightarrow e^{x_0} = -f(x_0) + 4 \Leftrightarrow 4 - f(x_0) - e^{x_0} = 0 \Leftrightarrow g(x_0) = 0$$

Επειδή το $0 \in g(A) = (-e^2, 4)$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A = (0, 2)$, υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0) = 0$. Άρα και $t(x_0) = x_0$.

Άσκηση 5

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f^2(x) = x^2 + x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+f(x)}{x} = -\frac{1}{2}$.

1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.
2. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της f είναι $f(x) = -\sqrt{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.
3. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x - f(x))$.
4. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση με τύπο $g(x) = x - f(x)$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-\infty, 0)$.

Λύση

1. Είναι $x^2 + x + 1 > 0$ γιατί $\Delta = -3 < 0$ που σημαίνει ότι το τριώνυμο είναι ομόσημο του $1 > 0$. Άρα $f^2(x) = x^2 + x + 1 > 0 \Rightarrow f^2(x) \neq 0 \Rightarrow f(x) \neq 0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, τότε: $f(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Άρα η f δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.

2. Αφού $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1+f(x)}{x} \cdot x - 1 \right) = -\frac{1}{2} \cdot 0 - 1 = -1 < 0$, θα υπάρχει x_1 (κοντά στο 0) με $f(x_1) < 0$ και λαμβάνοντας υπόψη το (1) ερώτημα θα έχουμε $f(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Οπότε: $f^2(x) = x^2 + x + 1 \Rightarrow f(x) = -\sqrt{x^2 + x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 3. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - f(x)) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \sqrt{x^2 + x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + x + 1})(x + \sqrt{x^2 + x + 1})}{x - \sqrt{x^2 + x + 1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x^2 - x - 1}{x - \sqrt{x^2 + x + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x - 1}{x - \sqrt{x^2 + x + 1}} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

4. Αφού, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x - f(x)) = -\frac{1}{2} < 0$, υπάρχει ρ_1 κοντά στο $(-\infty)$ έτσι ώστε $g(\rho_1) < 0$.

Αφού $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x - f(x)) = 0 + 1 = 1 > 0$, υπάρχει ρ_2 κοντά στο 0 έτσι ώστε $g(\rho_2) > 0$.

Έχουμε $g(\rho_1)g(\rho_2) < 0$ και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\rho_1, \rho_2] \subseteq (-\infty, 0)$, οπότε ισχύει το Θ. Bolzano άρα υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (\rho_1, \rho_2): g(x_0) = 0$.

Άσκηση 6

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Αν $1 < f(x) < e$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1)$.

2. Αν $f(0) > 1$ και $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = e^x + x \eta \mu \frac{1}{x}$ έχει μία τουλάχιστον θετική ρίζα.

3. Αν $f(k) + f(2k) = 4k$, $k > 0$ και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{f(x)-k}{x-2k} = \frac{f(x)-2k}{x-k}$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(k, 2k)$.

4. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $g: [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$ με $g(x) = f(x) - x$, να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in [1,3]$ έτσι ώστε $g(\xi) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3)}{6} - \frac{7}{3}$.

Λύση

1. Έστω $h(x) = f(x) - e^x$, $x \in [0,1]$.

- Αφού η σχέση $1 < f(x) < e$, ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θέτοντας $x = 0$ και $x = 1$ παίρνουμε: $1 < f(0) < e$ και $1 < f(1) < e$, αντίστοιχα.
- Είναι $h(0) = f(0) - e^0 > 1 - 1 = 0 \Rightarrow h(0) > 0$ και $h(1) = f(1) - e^1 < e - e = 0 \Rightarrow h(1) < 0$, οπότε ισχύει: $h(0)h(1) < 0$.
- Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Από τα παραπάνω ισχύει το Θ. Bolzano για την h , οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0 \Rightarrow f(x_0) = e^{x_0}$.

2. Έστω $\varphi(x) = f(x) - e^x - x \eta \mu \frac{1}{x}$, $x > 0$ η οποία είναι συνεχής ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων στο $(0, +\infty)$.

- Είναι $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \eta \mu \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x} = u, u \rightarrow +\infty}{=} \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu u}{u} = 0$, αφού:
 $\left| \frac{\eta \mu u}{u} \right| \leq \frac{1}{|u|} \Leftrightarrow -\frac{1}{|u|} \leq \frac{\eta \mu u}{u} \leq \frac{1}{|u|}$ και $\lim_{u \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{|u|}\right) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{|u|}\right) = 0$, οπότε από το κριτήριο παρεμβολής έχουμε: $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{\eta \mu u}{u} = 0$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (f(x) - e^x - x\eta\mu \frac{1}{x}) = f(0) - 1 - 0 = f(0) - 1 > 0$. Τότε θα υπάρχει x_1 κοντά στο 0 ώστε $\varphi(x_1) > 0$.

$$\bullet \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x\eta\mu \frac{1}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \stackrel{\frac{1}{x}=u, u \rightarrow 0}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\eta\mu u}{u} = 1.$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - e^x - x\eta\mu \frac{1}{x}) = 0 - (+\infty) - 1 = -\infty$. Τότε θα υπάρχει x_2 κοντά στο $+\infty$ ώστε $\varphi(x_2) < 0$.

- Είναι $\varphi(x_1)\varphi(x_2) < 0$ και η συνάρτηση φ συνεχής στο $[x_1, x_2] \subseteq (0, +\infty)$, ισχύει το Θ. Bolzano οπότε υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2) \subseteq (0, +\infty)$, με $x_0 > 0$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = 0$.

3. Έστω $t(x) = (f(x) - k)(x - k) - (f(x) - 2k)(x - 2k)$, $x \in [k, 2k]$, $k > 0$.

- Είναι $t(k) = -(f(k) - 2k)(k - 2k) = k(f(k) - 2k) < 0$, γιατί
 $k < 2k \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(k) < f(2k) = 4k - f(k) \Leftrightarrow 2f(k) < 4k \Leftrightarrow f(k) - 2k < 0$ και $k > 0$.
- $t(2k) = (f(2k) - k)(2k - k) = k(f(2k) - k) > 0$, γιατί:
 $k < 2k \stackrel{f \uparrow}{\Leftrightarrow} f(k) < f(2k) \Leftrightarrow f(2k) > f(k) = 4k - f(2k) \Leftrightarrow 2f(2k) > 4k \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow f(2k) > 2k > k \Leftrightarrow f(2k) - k > 0$ και $k > 0$.
- Είναι $t(k)t(2k) < 0$ και η συνάρτηση t συνεχής στο $[k, 2k]$, ισχύει το Θ. Bolzano οπότε υπάρχει $\xi \in (k, 2k)$, τέτοιο ώστε $t(\xi) = 0$.

4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - x$, η οποία είναι συνεχής στο $[1, 3]$. Τότε θα υπάρχει μια ελάχιστη τιμή m και μία μέγιστη τιμή M δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2 : m = g(x_1) \leq g(x) \leq g(x_2) = M$ (1), για κάθε $x \in [1, 3]$.

Θέτουμε στην (1), όπου $x = 1, 2, 3$, έτσι έχουμε:

$$\left. \begin{array}{l} g(x_1) \leq g(1) \leq g(x_2) \\ g(x_1) \leq g(2) \leq g(x_2) \\ g(x_1) \leq g(3) \leq g(x_2) \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} g(x_1) \leq g(1) \leq g(x_2) \\ 2g(x_1) \leq 2g(2) \leq 2g(x_2) \\ 3g(x_1) \leq 3g(3) \leq 3g(x_2) \end{array} \right\} \stackrel{(+)}{\Rightarrow} 6g(x_1) \leq g(1) + 2g(2) + 3g(3) \leq 6g(x_2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x_1) \leq \frac{g(1) + 2g(2) + 3g(3)}{6} \leq g(x_2)$$

$$1^{\text{η}} \text{ Περίπτωση: Αν } g(x_1) = \frac{g(1) + 2g(2) + 3g(3)}{6} \Rightarrow \xi = x_1$$

$$2^{\text{η}} \text{ Περίπτωση: Αν } g(x_2) = \frac{g(1) + 2g(2) + 3g(3)}{6} \Rightarrow \xi = x_2$$

3^η Περίπτωση: Αν $g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow g = \text{σταθερή}$, οπότε ξ είναι κάθε σημείο του διαστήματος $[1, 3]$.

4^η Περίπτωση: Αν $g(x_1) < \frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} < g(x_2)$.

Δηλαδή το $\frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} \in (g(x_1), g(x_2))$, οπότε από Θεώρημα ενδιαμέσων τιμών θα

υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, 3)$ έτσι ώστε

$$\begin{aligned} g(\xi) &= \frac{g(1)+2g(2)+3g(3)}{6} = \frac{f(1)-1+2(f(2)-2)+3(f(3)-3)}{6} = \\ &= \frac{f(1)-1+2f(2)-4+3f(3)-9}{6} = \frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6} - \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Άρα σε κάθε περίπτωση υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in [1, 3]$ έτσι ώστε

$$g(\xi) = \frac{f(1)+2f(2)+3f(3)}{6} - \frac{7}{3}.$$

Άσκηση 7

Δίνεται η συνάρτηση f για την οποία ισχύουν:

- $f(e^{f(x)}) = \ln x + 2$, για κάθε $x > 0$ και
- $(f \circ f)(e^{f(x)}) = \ln(\ln x + 1)^2$ για κάθε $x > \frac{1}{e}$.

1. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

2. Να αποδείξετε ότι $f(x) = 2\ln(x-1)$, $x > 1$.

3. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(f \circ f)(x) = f(e^{-x} + 2)$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο $(1+e, 1+e^{\frac{3}{2}})$.

Λύση

1. Έστω

$$x_1, x_2 > 0 \text{ με } f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} \Rightarrow f(e^{f(x_1)}) = f(e^{f(x_2)}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln x_1 + 2 = \ln x_2 + 2 \Rightarrow \ln x_1 = \ln x_2 \Rightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η συνάρτηση f είναι 1-1.

$$2. (f \circ f)(e^{f(x)}) = \ln(\ln x + 1)^2 \Leftrightarrow f(f(e^{f(x)})) = 2\ln(\ln x + 1) \Leftrightarrow f(\ln x + 2) = 2\ln(\ln x + 1) \quad (1)$$

Θέτουμε: $\ln x + 2 = y \Leftrightarrow \ln x + 1 = y - 1 > 0 \Rightarrow y > 1$ και η (1) γίνεται:

$$f(\ln x + 2) = 2\ln(\ln x + 1) \Rightarrow f(y) = 2\ln(y-1), \quad y > 1. \text{ Άρα } f(x) = 2\ln(x-1), \quad x > 1.$$

3. Το πεδίο ορισμού της $f \circ f$ είναι:

$$\{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_f\} = \{x > 1 \text{ και } 2\ln(x-1) > 1\} = \{x > 1 \text{ και } x > 1 + \sqrt{e}\} = (1 + \sqrt{e}, +\infty)$$

$$(f \circ f)(x) = f(e^{-x} + 2) \Leftrightarrow f(f(x)) = f(e^{-x} + 2) \stackrel{f:1-1}{\Leftrightarrow} f(x) = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow 2\ln(x-1) = e^{-x} + 2$$

$$\Leftrightarrow 2\ln(x-1) - e^{-x} - 2 = 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = 2\ln(x-1) - e^{-x} - 2$ και εφαρμόζουμε το Θ. Bolzano στο

διάστημα $[1+e, 1+e^{\frac{3}{2}}]$

- Η g είναι συνεχής στο $[1+e, 1+e^{\frac{3}{2}}] \subseteq (1+\sqrt{e}, +\infty)$, ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

- $g(e+1) = 2\ln(e+1-1) - e^{-(e+1)} - 2 = 2 \cdot 1 - \frac{1}{e^{e+1}} - 2 = -\frac{1}{e^{e+1}} < 0$

- $g(1+e^{\frac{3}{2}}) = 2\ln(1+e^{\frac{3}{2}}-1) - e^{-1-e^{\frac{3}{2}}} - 2 = 3 - e^{-1-e^{\frac{3}{2}}} - 2 = 1 - \frac{1}{e^{1+e^{\frac{3}{2}}}} > 0$, δηλαδή

$g(1+e^{\frac{3}{2}})g(e+1) < 0$, οπότε ισχύει το Θ. Bolzano. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1+e, 1+e^{\frac{3}{2}})$ έτσι ώστε $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow (f \circ f)(x_0) = f(e^{-x_0} + 2)$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: $\kappa\eta\mu^2x = x^2f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2x} - \lambda$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1) και η γραφική της παράσταση διέρχεται από το σημείο $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$

- i. Να βρείτε τα κ και λ
- ii. Αν $\kappa=1$ και $\lambda=1$ να βρείτε την f .
- iii. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin x}$.

Λύση

i. $A \in C_f$, άρα $f(0) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda = 1$

Η σχέση (1) για $\lambda=1$ γίνεται: $\kappa\eta\mu^2x = x^2f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2x} - 1$ και για $x \neq 0$ έχουμε:

$$f(x) = \frac{\kappa\eta\mu^2x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2x}}{x^2} \text{ οπότε:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\kappa \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 \right] + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\eta\mu^2x}{x^2(1+\sqrt{1+\eta\mu^2x})} = \kappa - \frac{1}{2}$$

Αλλά η f είναι συνεχής στο 0, οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) \Leftrightarrow \kappa - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \kappa = 1$$

ii. Η σχέση (1) για $\kappa=\lambda=1$ γίνεται: $\eta\mu^2x = x^2f(x) + \sqrt{1+\eta\mu^2x} - 1$.

Για $x \neq 0$ η τελευταία γίνεται: $f(x) = \frac{\eta\mu^2x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2x}}{x^2}$.

Επίσης έχουμε: $f(0) = \frac{1}{2}$

$$\text{Άρα } f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu^2x + 1 - \sqrt{1+\eta\mu^2x}}{x^2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

iii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sigma \nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x + 1 - \sqrt{1 + \eta \mu^2 x}}{x^2 \sigma \nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sigma \nu x} \cdot \left(\frac{\eta \mu x}{x} \right)^2 \right] + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 + \eta \mu^2 x}}{x^2 \sigma \nu x} =$$

$$1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\eta \mu^2 x}{x^2 \sigma \nu x (1 + \sqrt{1 + \eta \mu^2 x})} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 9

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{x^3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x - 4}{2^x}$

- i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.
- ii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- iii. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- iv. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μία ακριβώς ρίζα στο $\mathbb{R}$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbb{R}$, αφού $2^x \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι:

$$f(x) = \frac{x^3 \cdot 2^x + 3 \cdot 2^x - 4}{2^x} = x^3 + 3 - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^x$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε: $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3 \Rightarrow x_1^3 + 3 < x_2^3 + 3$

$$\text{και } x_1 < x_2 \Rightarrow \left(\frac{1}{2} \right)^{x_1} > \left(\frac{1}{2} \right)^{x_2} \Rightarrow -4 \left(\frac{1}{2} \right)^{x_1} < -4 \left(\frac{1}{2} \right)^{x_2},$$

αφού η συνάρτηση $\left(\frac{1}{2} \right)^x$ είναι γνησίως φθίνουσα. Άρα

$$x_1^3 + 3 - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^{x_1} < x_2^3 + 3 - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^{x_2} \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Είναι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x^3 + 3 - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^x \right] = (-\infty) + 3 - 4(+\infty) = -\infty,$$

$$\text{αφού } 0 < \frac{1}{2} < 1 \text{ οπότε: } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x = +\infty.$$

iii. Είναι: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 + 3 - 4 \left(\frac{1}{2} \right)^x \right] = (+\infty) + 3 - 4 \cdot 0 = +\infty,$

αφού $0 < \frac{1}{2} < 1$ οπότε: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x = 0.$

iv. Η f είναι συνεχής (πράξεις συνεχών), είναι και γνησίως αύξουσα άρα

$$f(\mathbb{R}) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = (-\infty, +\infty).$$

Το $\kappa \in \mathbb{R}$ περιλαμβάνεται στο σύνολο τιμών της f , οπότε η εξίσωση $f(x) = \kappa$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $\mathbb{R}$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα, η ρίζα είναι μοναδική.

Ημερομηνία τροποποίησης: 25/01/2019

1. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ορίζεται καθεμιά από τις παρακάτω συναρτήσεις:

$$\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{(x-1)\sqrt{x+1}}$$

$$\beta) f(x) = \frac{2}{\sqrt{x-2}-1} + \frac{3}{\sqrt{4-x}-\sqrt{x}}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{\sqrt{x^2-x}}{|x-2|-1} + \frac{1}{|3x-8|-|x|}$$

$$\delta) f(x) = \frac{5}{|x-3|-1}$$

$$\epsilon) f(x) = \ln(x^2+x-2) + \ln \frac{x+3}{3-x}$$

$$\sigma\tau) f(x) = \frac{\sin x}{2\eta\mu x - 1} + \frac{1}{\epsilon\phi x - 1}, \quad x \in [0, 2\pi]$$

$$\zeta) f(x) = \sqrt{e^x - 1} + \sqrt{1 - \ln x}$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1$.

α) Να εξετάσετε ποιες από τις συναρτήσεις του παρακάτω πίνακα είναι ίσες με τη συνάρτηση f .

$f_1(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$	$f_2(x) = \frac{x^3+1}{x^2-x+1}$	$f_3(x) = (\sqrt{x+1})^2$
$f_4(x) = x\left(\frac{1}{x} + 1\right)$	$f_5(x) = \ln e^{x+1}$	$f_6(x) = e^{\ln(x+1)}$

β) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

3. Δίνονται οι συναρτήσεις

$f_1(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$	$f_2(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$	$f_3(x) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}$
$f_4(x) = \sqrt{\frac{(x-1)^2}{x^2-1}}$	$f_5(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$	$f_6(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x-1}\sqrt{x+1}}$

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού καθεμιάς συνάρτησης.

β) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ζεύγη ίσων συναρτήσεων.

γ) Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο οι παραπάνω συναρτήσεις είναι όλες ίσες.

4. Δίνεται η συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[0, 1]$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

α) $f(x^2)$

β) $f(x - 4)$

γ) $f(\ln x)$

5. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, $x \neq 0$, να βρείτε το $f(2)$.

6. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι περιττή. Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ με $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα και στο διάστημα $[-\beta, -\alpha]$.

7. α) Για κάθε $\alpha > 0$, να δείξετε ότι $\alpha + \frac{1}{\alpha} \geq 2$.

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x) = x + \frac{1}{x}$ με $x > 0$.

8. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = \frac{1}{x-1}$, $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.

α) Να βρείτε τα πεδία ορισμού τους.

β) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f + g$, $f \cdot g$.

γ) Χρησιμοποιώντας τις f, g να δικαιολογήσετε ότι $(g \circ f)(x) \neq g(x) \cdot f(x)$.

δ) Να εξετάσετε αν για τις παραπάνω συναρτήσεις f, g οι συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι ίσες.

9. Έστω η συνάρτηση $f(x) = ax$, η οποία ονομάζεται και γραμμική συνάρτηση. Να δείξετε ότι η σύνθεση δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι γραμμική συνάρτηση. Να εξετάσετε αν το άθροισμα δύο γραμμικών συναρτήσεων είναι γραμμική συνάρτηση. Το ίδιο και για το γινόμενο.

10. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$, οι οποίες είναι γνησίως μονότονες και έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας (είναι και οι δύο γνησίως αύξουσες ή και οι δύο γνησίως φθίνουσες).

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f \circ g$ είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων $f \circ f$ και $g \circ g$.

γ) Να εξετάσετε τη μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \ln[\ln(x)]$, $x > 1$.

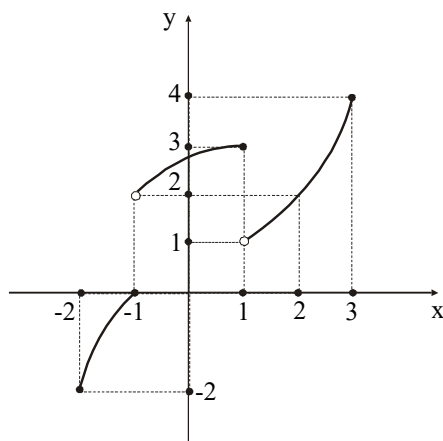
11. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $(f \circ f)(x) - f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη της f .

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{|x| + 1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1 - 1.

β) Να βρείτε την f^{-1} .

13 Η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια:



α) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

γ) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ δ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

ε) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ στ) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ζ) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

14. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

15. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$.

16. Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x \sin x} \right)$.

17. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\eta\mu^2 x} - \frac{1}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \right)$

18. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -6$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = 10$, να βρείτε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(h(x))^2}$ β) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{3f(x) - 4[g(x)]^2}{g(x) + 2f(x)}$

19. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α, β ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x + 1}{x^2 - 1}, & x < -1 \\ \ln(x + \beta), & x \geq -1 \end{cases}$$

να έχει όριο πραγματικό αριθμό στο $x_0 = -1$.

20. Δίνεται η συνάρτηση f με $D_f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$ ώστε:

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) + \eta\mu \frac{\pi(x-1)}{2} - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\pi}{2}$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 1}{x - 1}$

21. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχουν τα παρακάτω όρια:

α) της $f(x) = \frac{x-2}{(x-1)(x+2)}$ στο $x_0 = -2$

β) της $f(x) = \frac{x^3 + x^2}{|x+1|}$ στο $x_0 = -1$

22. α) Να δείξετε ότι : $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ (1) αν και μόνο αν

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = \ell \quad (2)$$

β) Αν για τη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}:$$

i) να βρείτε το $f(0)$

ii) αν η f είναι συνεχής στο 0, να δείξετε ότι είναι συνεχής σε όλο το $\mathbb{R}$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(1 - \ln x)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε τα όρια της f στα άκρα του D_f .

γ) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο D_f .

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f αφού πρώτα αποδείξετε ότι είναι συνεχής.

24. Αν $|f(x)| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

25. Δίνονται οι συναρτήσεις f και g με τύπους:

$$f(x) = \sqrt{x-1} \quad \text{και} \quad g(x) = \sqrt{4-x}$$

α) Να βρείτε τις συναρτήσεις $f \circ g$ και $g \circ f$.

β) Να αποδείξετε ότι οι f και g είναι συνεχείς στο σημείο $x_0 = 2$.

γ) Να εξετάσετε αν οι $f \circ g$ και $g \circ f$ είναι και αυτές συνεχείς στο $x_0 = 2$.

26. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{αν } x \leq 1 \\ 3x-1, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη συνέχεια.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

γ) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f^{-1} .

δ) Να εξετάσετε τη μονοτονία των συναρτήσεων f και f^{-1} .

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{1}{x}} + 2}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2^{\frac{1}{x}} + 1}, & x = 0 \end{cases}$.

α) Να υπολογίσετε τα όρια: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.

β) Να κάνετε πρόχειρη γραφική παράσταση της f .

γ) Υπάρχει τιμή του α για την οποία η f να είναι συνεχής;

28. Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ είναι συνεχής:

α) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $\lim_{h \rightarrow 0} (f(x_0 + h) - f(x_0 - h)) = 0$.

β) Να εξετάσετε αν ισχύει το αντίστροφο χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta \mu x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

29. Να δείξετε ότι:

α) η εξίσωση $(x + 1) 2^{x+1} = 1$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(-1, 0)$

β) η εξίσωση $x^3 - 6x^2 + 3 = 0$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο $(-1, 1)$.

30. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x + e^x = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(0, 1)$.

31. Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = x$ και $g(x) = \sin 2x$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο του διαστήματος $(0, \frac{\pi}{4})$.

32. Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση f στο διάστημα $[0, 8]$ για την οποία ισχύουν ότι $f(0) = 1$, $f(2) = -2$, $f(4) = 2$, $f(6) = -4$ και $f(8) = 1$.

α) Να βρείτε πόσες φορές τουλάχιστον, η γραφική παράσταση της f θα τέμνει τον άξονα $x'x$ στο $(0, 8)$.

β) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $[0, 2]$ και $[4, 6]$ και γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $[2, 4]$ και $[6, 8]$, τότε να βρείτε πόσες ρίζες θα έχει η εξίσωση $f(x) = 0$.

33. Θεωρούμε την εξίσωση:

$$\frac{\kappa^2}{x} + \frac{\lambda^2}{x+1} + \frac{\mu^2}{x-1} = 0, \quad \kappa, \lambda, \mu \neq 0$$

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει ακριβώς δύο ρίζες στο διάστημα $(-1, 1)$.

β) Αν οι δύο ρίζες είναι οι ρ_1, ρ_2 , να δείξετε ότι: $\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{\mu^2 - \lambda^2}{\kappa^2}$.

34. Δίνεται το πολυώνυμο $P(x) = x^{v+1} - 2x + 1$ για $v \geq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι το $P(x)$ διαιρείται με το $x - 1$.

β) Να βρείτε το πηλίκο της παραπάνω διαίρεσης.

γ) Αν $Q(x)$ το παραπάνω πηλίκο, να αποδείξετε ότι το $Q(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

δ) Να δικαιολογήσετε ότι και το $P(x)$ έχει την ίδια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

35. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο $[0, \alpha]$ με $f(0) = f(\alpha)$.

α) Να αποδείξετε ότι η $h(x) = f(x) - f\left(\frac{\alpha}{2} + x\right)$ είναι συνεχής στο $(0, \frac{\alpha}{2})$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = f\left(\frac{\alpha}{2} + x\right)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\alpha}{2})$.

36. ** Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{3}$$

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-2} - \sqrt{6-x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

γ) Να εξετάσετε την f ως προς τη συνέχεια.

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ε) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό x_0 έτσι ώστε $f(x_0) = \frac{3}{2}$.

38. Έστω η συνεχής συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν το σύνολο τιμών της f είναι το $[\alpha, \beta]$, τότε

α) να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ τέτοιο ώστε $f(x_0) = x_0$

β) να ερμηνεύσετε γεωμετρικά το συμπέρασμα αυτό.

39. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$ με $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \gamma \in \mathbb{R}$ και

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \delta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι υπάρχει μόνο ένας αριθμός $x_0 > 0$ τέτοιος ώστε να ισχύει:

$$f(x_0) + e^{x_0+1} + \ln x_0 = 1.$$

40. Έστω η γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f(x) = x^5 + x + 1$, $x \in [-1, 0]$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(-1, 0)$.

41. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0, 10]$ και η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μοναδικές ρίζες το 3 και το 7.

α) Αν υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) > 0$ με $x_0 < 3$, να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x < 3$.

β) Αν υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) < 0$ με x_0 τέτοιο ώστε $3 < x_0 < 7$, να δείξετε ότι $f(x) < 0$ για κάθε $x: 3 < x < 7$.

42 Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 2)x^3 + (\mu + 1)x + 1}{\mu x^2 + 1}, \text{ αν } \mu \in \mathbb{R}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \lambda x - \mu), \text{ αν } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x}{\alpha^x + 1}, \text{ αν } \alpha > 0$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x + 2^{x+1}}{\alpha^{x+1} + 2^x}, \text{ αν } \alpha > 0$

43. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta\mu \frac{1}{x})$

β) $\lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \eta\mu \frac{1}{x})$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \cdot \eta\mu^p \frac{1}{x})$ με $p \in \mathbb{N}^*$ και $p \geq 2$

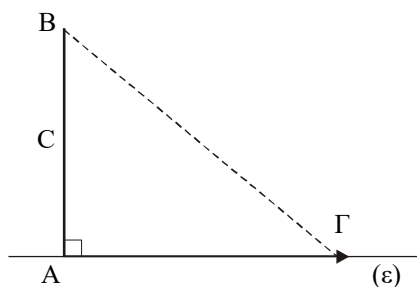
44. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ell \ln \left(\frac{x^2 + \kappa^2}{x} \right)$, $\kappa > 0$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε τα όρια $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

γ) Να δείξετε ότι η $f(x) - \ell \ln x > 0$ και να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - \ell \ln x)$.

45. Το ευθύγραμμο τμήμα AB του διπλανού σχήματος έχει σταθερό μήκος C. Το σημείο Γ κινείται απομακρυνόμενο από το A επάνω στην (ε). Να αποδείξετε ότι τα μήκη των BΓ και ΑΓ τείνουν να γίνουν ίσα.



46. Αν $f(x) = \ell \ln \frac{x-3}{2x}$, να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f

β) τα όρια $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

47. Το ποσοστό της ανεργίας σε μια χώρα είναι 12% και εκτιμάται ότι σε x έτη από τώρα θα δίνεται από τον τύπο $f(x) = \frac{16x+36}{2x+3}$.

α) Να αποδείξετε ότι: $f(x) = 8 + \frac{12}{2x+3}$.

β) Να εξηγήσετε γιατί η ανεργία δεν θα πέσει ποτέ κάτω από το 8%.

γ) Μετά από αρκετά χρόνια, ποιο θα είναι περίπου το ποσοστό ανεργίας;