Παράδειγμα 2: Για την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1-\sigma\upsilon\nu x & ,x<0\\ x-\eta\mu x & ,x\geq 0\end{cases}$, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

Παράδειγμα 3: Για την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}(x-2)e^x & ,x<2\\ x^2-4 & ,x\geq 2\end{cases}$, να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$.

Παράδειγμα 4: Αν για την συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι:

$$x+1\leq f(x)\leq x^2-x+2 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

να βρεθεί:

α. το $f(1)$.
β. το $f'(1)$.

Παράδειγμα 5: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{|x|}, x\in\mathbb{R}$, να εξετάσετε αν ορίζεται η παράγωγος της f στο σημείο $x_0=0$.

Παράδειγμα 12: Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=-1$ και

$\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^2-1}{f(x)}=2$, να δειχθεί ότι:

α. $f(-1)=0$.
β. $f'(-1)=-1$.
γ. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(h-1)+he^h}{h+\sigma\upsilon\nu h-1}=0$.

Παράδειγμα 13: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+ax-\beta & ,x<1\\ \beta\sqrt{x} & ,x\geq 1\end{cases}$.

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$, να βρεθούν οι αριθμοί a,β.

Παράδειγμα 15: Να βρεθεί η εφαπτομένη της συνάρτησης

$f(x)=\begin{cases}x^2+x+1 & , x<0\\ x+1 & , x\geq 0\end{cases}$ στα σημεία:

α. $A(0,f(0))$.
β. $B(1,f(1))$.

Παράδειγμα 16: Να βρείτε την κλίση της C_f καθώς και την εξίσωση της εφαπτόμενης ευθείας της συνάρτησης f στο σημείο x_0, όταν:

α. $f(x) = \frac{2}{x^2}$ και $x_0 = 1$.

β. $f(x) = x|x|$ και $x_0 = 0$.

Παράδειγμα 18: Ένα σώμα κινείται κατά μήκος ενός άξονα και η θέση του x στον άξονα καθορίζεται από την συνάρτηση $x(t) = t^2 - t - 2, \quad 0 \leq t \leq 3,$ όπου

t μεταβλητή που συμβολίζει τον χρόνο. Να βρεθεί:

α. η θέση του στον άξονα κατά την στιγμή της εκκίνησης.

β. η μέση του ταχύτητα το χρονικό διάστημα $[1,2]$.

γ. η στιγμιαία του ταχύτητα $v(1)$.

δ. η κατεύθυνση του κινητού την χρονική στιγμή $t_0 = 1$.

Παράδειγμα 19: Στο διπλανό σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων θέσεως δύο κινητών A, B που κινήθηκαν πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0sec έως 6sec. Να βρεθεί:

α. Ποιο κινητό ξεκίνησε από την αρχή του άξονα κίνησης;

β. Ποιο κινητό κινήθηκε προς τα δεξιά σε όλο το χρονικό διάστημα από 2sec έως 5sec;

γ. Ποιο κινητό άλλαξε φορά κίνησης τη χρονική στιγμή $t = 3$sec και ποιο τη χρονική στιγμή $t = 5$sec;

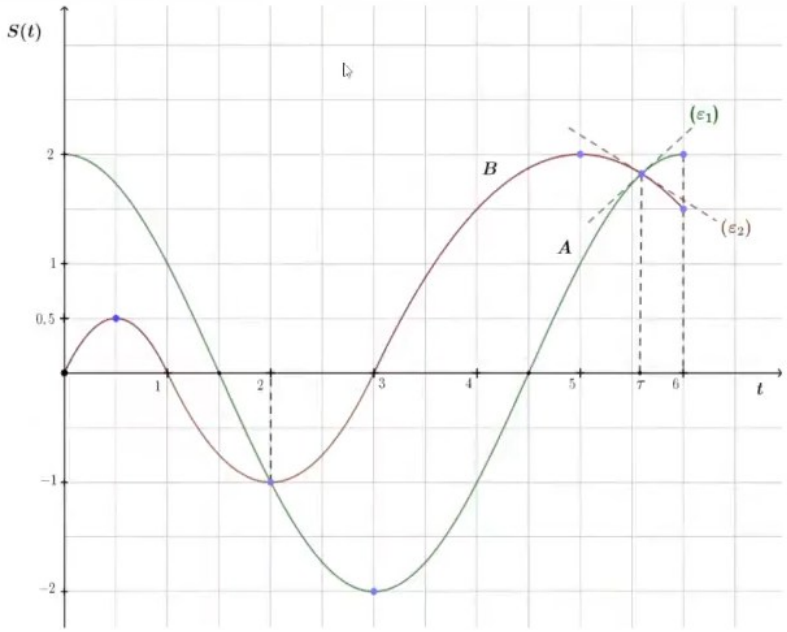
δ. Πόσες φορές τα κινητά βρέθηκαν στην ίδια θέση ταυτόχρονα;

ε. Ποιο κινητό τερμάτισε πιο κοντά στην αρχή του άξονα κίνησης;

στ. Ποιο κινητό διάνυσε το μεγαλύτερο διάστημα;

Την χρονική στιγμή $t = \tau$ έχουν σχεδιαστεί οι εφαπτομένες $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2)$ των συναρτήσεων θέσεως των κινητών A, B αντίστοιχα.

ζ. Ποιο κινητό έχει μεγαλύτερη στιγμιαία ταχύτητα εκείνη την χρονική στιγμή;



Παράδειγμα

Δίνεται η $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-\frac{3}{4} & , \ x>1\\ \frac{1}{4}x^2 & , \ x\le 1\end{cases}$

α) Να βρείτε την παράγωγο της f

β) Να λύσετε την εξίσωση $(2\cdot f'(x)-1)\cdot(6\cdot f'(x)-1)=0$

Παράδειγμα 5: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}x-1 & x\le 1\\ lnx & 1<x\le e.\\ x & x>e\end{cases}$$

Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο $[-1,e]$.

Παράδειγμα 6: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}e^x & , \ x\le 0\\ συνx & , \ x>0\end{cases}$.
Να εξετάσετε αν είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

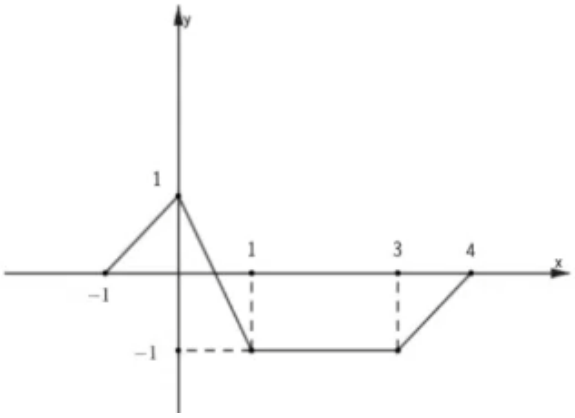
Παράδειγμα 7: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ημx, x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγος της $f''(x)$.

Παράδειγμα 8: Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x & , \ x<0\\ ημx & , \ x\ge 0\end{cases}$.

Να εξετάσετε αν είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

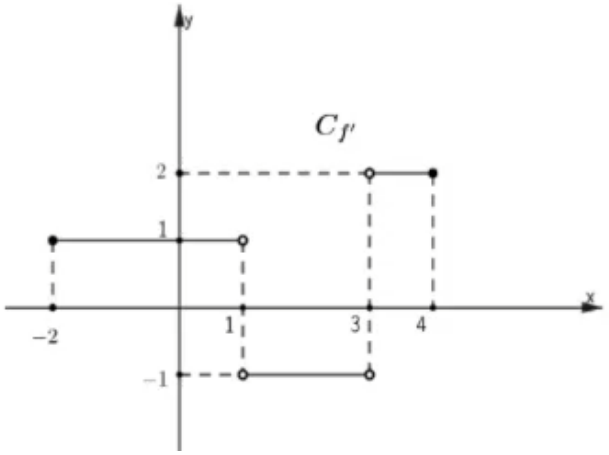
Παράδειγμα 9:

Να παραστήσετε γραφικά την παράγωγο της συνάρτησης f του διπλανού σχήματος.



Παράδειγμα 10:

Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f:[-2,4] \to \mathbb{R}$, η οποία είναι συνεχής, με $f(-2) = 1$, και της οποίας η παράγωγος παριστάνεται γραφικά στο διπλανό σχήμα.



Παράδειγμα 5: Να βρεθούν (όπου ορίζονται) οι παράγωγοι των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sigma\upsilon\nu x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

β. $g(x) = |x^2 - x|$

Παράδειγμα 6: Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - ax, & x < 1 \\ a + \beta x, & x \geq 1 \end{cases}$$

με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τις τιμές των α και β

β. Να βρείτε την παράγωγο της f.

Παράδειγμα 1: Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x,\ x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $M(-1, f(-1))$.

Παράδειγμα 2: Δίνεται η συνάρτηση

$f(x) = e^x + \frac{\eta\mu x}{1+\sigma\upsilon\nu x}$, $A_f = \{x \in \mathbb{R} \mid \sigma\upsilon\nu x \neq -1\}$.

Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο που τέμνει τον άξονα $y'y$.

Παράδειγμα 3: Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x}, & x \leq 1 \\ x^2 + x - 2, & x > 1 \end{cases}$$

Να βρείτε, αν ορίζεται, την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στα σημεία:

α. $A(2, f(2))$ β. $B(1, f(1))$

Παράδειγμα 4: Δίνεται η συνάρτηση

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x lnx + \sqrt{x}$, $x > 0$.

Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1))$.

Παράδειγμα 5: Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = x^2 - 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -2x + 5$.

Παράδειγμα 6: Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = x^3 - 1\,,\, x \in \mathbb{R}$

η οποία είναι κάθετη στην ευθεία $x + 3y - 6 = 0.$

Παράδειγμα 7: Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+2)\,, x > -2.$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ε της γραφικής παράστασης της f η οποία σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\omega = 45^o$.

Παράδειγμα 8: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 4, & x < 1 \\ 3x^2 + 3, & x \geq 1 \end{cases}$

I. Να βρείτε την παράγωγο της f

II. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία είναι παράλληλη του ευθύγραμμου τμήματος με άκρα $A\big(-2, f(-2)\big)$ και $B\big(1, f(1)\big)$

Παράδειγμα 9: Έστω η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - x, x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f η οποία διέρχεται από το σημείο $N(1, -7)$

Παράδειγμα 10: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}\ ,\ x > 1.$

Να βρεθεί η εξίσωση εφαπτομένης της C_f η οποία διέρχεται από το σημείο $A(2\sqrt{2}, 3).$

Παράδειγμα 1: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xlnx, x > 0$.

i. Να εξετάσετε αν η ευθεία $y = 2x - e$, εφάπτεται της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

ii. Να βρείτε το σημείο επαφής.

Παράδειγμα 2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta\sqrt{x} + 4, x \geq 0$.

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία

$$(\varepsilon): 3x - 2y + 12 = 0$$

εφάπτεται στη C_f στο σημείο $M(4, f(4))$.

Παράδειγμα 3: Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις

$$f(x) = e^{x-1} \text{ και } g(x) = \frac{x^2+1}{2}, x \in \mathbb{R}$$

εφάπτονται στο σημείο $A(1,1)$ και να βρεθεί η κοινή εφαπτομένη τους στο σημείο A.

Παράδειγμα 4: Δίνονται οι συναρτήσεις

$f(x) = x^3 + 2x, x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = 2x^2 + x, x \in \mathbb{R}$

i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f και C_g

ii. Να αποδείξετε ότι οι C_f και C_g έχουν κοινή εφαπτομένη (ε) μόνο στο ένα από τα κοινά σημεία τους και να βρείτε την εξίσωση της (ε)

Παράδειγμα 5: Δίνονται οι συναρτήσεις

$$f(x) = 9 - x^2 \text{ και } g(x) = -x^2 + 8x - 15, \ x \in \mathbb{R}$$

Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f και C_g

Παράδειγμα 6: Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^{3x} + 1, x \in \mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να ορίσετε την αντίστροφη f^{-1}.

ii. Αν f^{-1} παραγωγίσιμη στο $(1, +\infty)$ να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο της με τετμημένη 2.

Παράδειγμα 7: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x + 1, x \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο που η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα y΄y.

β. i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης.

ii. Αν $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, παραγωγίσιμη, να βρείτε τη εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο που τέμνει τον άξονα x΄x.

Παράδειγμα 1

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x+1} - 1$ και $g(x) = 2\sqrt{x}$.

α) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x'x.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που βρήκατε, εφάπτεται και στην C_g .

Παράδειγμα 2

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^{x+1} - 1$ και $g(x) = 2\sqrt{x}$.

Η εφαπτομένη της C_g στο $A\big(x_0, g(x_0)\big)$, εφάπτεται και στην C_f στο $B\big(-x_0, f(-x_0)\big)$.

Να βρείτε την εξίσωση της κοινής εφαπτομένης.

Ασκήσεις στην παράγωγο από το ΨΦ

1

Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2\sqrt{x} & , 0 \le x < 1 \\ \frac{x^2+\beta}{4} & , x \ge 1 \end{cases}$$

να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 1$.

2

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο R και $\lim\limits_{x\to 3} \frac{f(x)}{\sqrt{x^2-5}-2} = 2$. Αν f συνεχής στο $x_0 = 3$, να βρείτε το $f'(3)$.

3

Έστω συνάρτηση f η οποία ικανοποιεί τη σχέση $f^3(x)+xf^2(x)=x^3+\eta\mu^3 x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η f παραγωγίζεται στο $x_0 = 0$ να βρείτε την $f'(0)$.

4

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και για την οποία ισχύει:
$f^2(x)-2f(x)=x^2-1$, για κάθε $x \ge 1$, τότε:

1) Να βρείτε το $f(1)$.
2) Να αποδείξετε ότι $f'(1)=1$.
3) Υπολογίστε το όριο $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f^3(x)-3f(x)-2}{(x+2)(x-1)}$.

5

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{2^x-1}{x}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-x-1}{x}$

6

Αν η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τότε ισχύουν:

i. Αν η f είναι άρτια τότε η f' είναι περιττή.

ii. Αν η f είναι περιττή τότε η f' είναι άρτια.

7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 2x + 3$, xϵR

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Αν γνωρίζετε ότι η f^{-1} είναι συνεχής , να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f^{-1} είναι παραγωγίσιμη στο 4 και να υπολογίσετε την $(f^{-1})'(4)$.

8

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt[5]{(x-3)^3}$

ii. $f(x) = \sqrt[3]{(x-3)^5}$

iii. $f(x) = \sqrt[5]{(x-2)^4}$

9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3$.

Α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $x_o = 1$.

Β) Να βρεθούν τα κοινά σημεία της C_f με την εφαπτομένη της C_f στο $x_o = 1$.

1. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=xe^x$ και η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει $x+1\le f(x)\le x^2+x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε το $f(0)$.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0.

γ) Να υπολογίσετε την παράγωγο της g στο 0.

δ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο $\mathrm{A}(0,g(0))$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\alpha x^2+\beta & ,\ x<1\\ 2x+1 & ,\ x\ge 1\end{cases}$

α) Να δείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=2$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $\mathrm{A}(1,f(1))$.

3.

i) Αν f παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$ και $f(x^2-1)=x^4-2x^2+2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(3,f(3))$.

ii) Αν $f(x)=x^2+1$ τότε :

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-8x+21$

β) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f οι οποίες διέρχονται από το σημείο $\mathrm{E}(0,-3)$

4. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x-h)-f(x)=-2h$ για κάθε $x,h\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}=4$

γ) Αν g συνεχής στο $\mathbb{R}$ με $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{x}=42$, να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 και στη συνέχεια ότι ισχύει $g'(0)=21\cdot f'(21)$

Διαγώνισμα

Θέμα 1 Να αντιστοιχίσετε :

1)	$f(x) = x^3 + ln^2 x$	α)	$f'(1) = 1$
2)	$f(x) = \frac{ln x}{x^3}$	β)	$f'(0) = 3$
3)	$f(x) = ln(x^3 + 1)$	γ)	$f'(0) = 0$
4)	$f(x) = \frac{e^x}{x^2+1}$	δ)	$f'(1) = 3$
5)	$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} + 3x$	ε)	$f'(0) = 1$

(**Μ 10**)

Θέμα 2

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 1} \frac{f(x)+2x-5}{x^2-1} = 4$

α) Να υπολογίσετε το $f(1)$. (**Μ 10**)

β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1. (**Μ 10**)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 + 6 \cdot \eta\mu x - 3$

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_g στο $A\big(0, g(0)\big)$ εφάπτεται και στην C_f στο $B\big(1, f(1)\big)$. (**Μ 10**)

δ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(1+3h)-f(1-2h)}{h}$ (**Μ 10**)

ε) Αν $f(x) = 2x^3 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = f(x_0)$. (**Μ 5**)

Θέμα 3

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \gamma x^3 + \delta & , \ x \le 1 \\ \frac{\alpha}{x} + \beta & , \ x > 1 \end{cases}$

και η ευθεία $y = 3x + 3$ που εφάπτεται στην C_f στο $A\big(-1, f(-1)\big)$.

Δίνεται επίσης συνάρτηση $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g^3(x) + g(x) = x^6 + x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $\gamma = \delta = 1$ (**Μ 10**)

β) Να δείξετε ότι $\alpha = -3$ και $\beta = 5$ (**Μ 10**)

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 12 \cdot x + 21$ (**Μ 10**)

δ) Να δείξετε ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο 0. (**Μ 5**)

ε) Αν g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι ευθεία $y = 2x - 1$ είναι η εφαπτομένη της C_g στο $M\big(1, g(1)\big)$ και στη συνέχεια να δείξετε ότι υπάρχουν τρεις εφαπτόμενες της C_f παράλληλες στην ευθεία αυτή. (**Μ 10**)

6ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε η συνάρτηση f+g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει: $(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$ **Μονάδες 6**

Α2. Έστω f μια συνάρτηση με πεδίο ορισμού ένα σύνολο Α. Πότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της; **Μονάδες 4**

Α3. Να αποδείξετε ότι αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό. **Μονάδες 5**

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=1$.

β) Η γραφική παράσταση μιας πολυωνυμικής συνάρτησης περιττού βαθμού έχει πάντοτε οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$ τότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$

δ) Η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη σε όλο το πεδίο ορισμού της.

ε) Αν f 1-1 τότε $f\left(f^{-1}(x)\right)=x$ για κάθε $x\in D_f$ **Μονάδες 10**

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $g(x)=\frac{4-e^{2x}}{e^x}$ και η συνάρτηση $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο $h(x)=\ln x$.

Β1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $f=g\circ h$. **Μονάδες 5**

Έστω $f(x)=\frac{4-x^2}{x}, x>0$.

Β2. i) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία (μονάδες 4).

ii) Να αποδείξετε ότι $\frac{4-\pi^2}{4-e^2}>\frac{\pi}{e}$ (μονάδες 4). **Μονάδες 8**

Β3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-2x+21$ **Μονάδες 3**

Β4. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(2,0)$, εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $k(x)=x^2-4x+5$ **Μονάδες 3**

Β5. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}$. **Μονάδες 6**

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-x}-\ln\lambda, & x\le 0\\ \eta\mu x+\lambda\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$$, με λ > 0.

Γ1. Να αποδείξετε ότι λ=1 **Μονάδες 5**

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Α(0, 1), η οποία σχηματίζει με τον άξονα x'x γωνία ίση με $\frac{\pi}{4}$. **Μονάδες 6**

Γ3. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-x=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0,\frac{3\pi}{2}\right)$ **Μονάδες 3**

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)-\ln(-x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα. **Μονάδες 3**

Γ5. Ένα σημείο Μ(α, f(α)), με α ≤ 0, κινείται στη γραφική παράσταση της f.

Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου Μ δίνεται από τον τύπο α'(t) = - $\frac{\alpha(t)}{3}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο Μ τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο Β. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του σημείου Β τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία το σημείο Μ έχει τετμημένη -1. **Μονάδες 8**

Θέμα Δ

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=2$. **Μονάδες 2**

Δ2. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. **Μονάδες 2**

Δ3. Να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$ **Μονάδες 2**

ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2\,\eta\mu 2x}$ **Μονάδες 2**

Δ4. Αν $f(x)=\sqrt{x^2+1}+\alpha x+\beta$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε :

i) να βρείτε τους αριθμούς α και β . **Μονάδες 4**

ii) να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μια ρίζα της εξίσωσης $f(|x|)=0$. **Μονάδες 4**

Δ5. Αν $f(x)=\sqrt{x^2+1}+2x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να υπολογίσετε τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ **Μονάδες 4**

ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{n\mu x}{f(x)}$ **Μονάδες 5**

Καλή επιτυχία !!!

ΤΕΣΤ Ομάδα Α

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f στο $x_0=3$. (**10 μονάδες**)

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3-h)}{h}$ (**10 μονάδες**)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f

η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία $y=-2x+21$. (**10 μονάδες**)

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x+2)\cdot e^x+x^2$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f . (**10 μονάδες**)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\big(0,f(0)\big)$. (**10 μονάδες**)

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}(2x+1)^2 & , \quad x<-1\\ \sqrt{2x+3} & , \quad x\geq -1\end{cases}$

α) Υπολογίστε το άθροισμα $f'(-3)+f'\left(\frac{1}{2}\right)$ (**10 μονάδες**)

β) Εξετάστε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο -1 . (**10 μονάδες**)

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+\eta\mu x & , \quad x\leq 0\\ \alpha x+\beta & , \quad x>0\end{cases}$

α) Να βρείτε τα α , β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 0 . (**10 μονάδες**)

β) Αν f είναι παραγωγίσιμη στο 0 τότε :

i) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\big(0,f(0)\big)$. (**10 μονάδες**)

ii) αν $g(x)=e^x+\mu$, να βρείτε το μ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\big(0,f(0)\big)$

να εφάπτεται και στην C_g . (**10 μονάδες**)

ΤΕΣΤ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Α2. Δίνεται η παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbb{R}$ συνάρτηση :

$$f(x) = \begin{cases} \eta\mu x & , \quad x > \pi \\ \alpha x + \beta & , \quad x \leq \pi \end{cases}$$

Να βρείτε τις τιμές των α, β .

Θέμα Β

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$-2x + 1 \leq f(x) \leq x^4 - 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}, \quad \textbf{(1)}$$

τότε

i. να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$

ii. να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ και ισχύει $f'(0) = -2$.

Θέμα Γ

Έστω $f : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 > 0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}}{x^2 - {x_0}^2}$ β) $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f^3(x) - f^3(x_0)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}$

Θέμα Δ

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ με $f'(0) = 1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x + y) = f(x) \cdot e^y + f(y) \cdot e^x \text{ για κάθε } x, y \in \mathbf{R} .$$

i. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

Τα θέματα Β , Γ , Δ είναι από την ιστοσελίδα http://www.study4exams.gr/

① $f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x}$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$ είναι // στον $x'x$.

Η εφαπτομένη της C_f στο $B(2, f(2))$ σχηματίζει γωνία $\frac{3\pi}{4}$ με τον $x'x$.

Να βρείτε τα α, β.

② $f(x) = x^2 - 4x$ $\quad g(x) = \frac{\alpha}{x}$, $\alpha \neq 0$

Η εφαπτομένη της C_f στο $A(-1, f(-1))$ εφάπτεται και της C_g. Να βρείτε το α.

③ $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$ $\quad g(x) = \alpha x^2 + \beta x + 1$

Οι C_f και C_g έχουν κοινό σημείο με τετμημένη -1 στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

Να βρείτε τα α, β.

④ $f(x) = x(x-2)$ $\quad g(x) = -x^2 - 5$

Να βρείτε τις κοινές εφαπτομένες των C_f και C_g.

⑤ $f(x) = (x-2)\ln x$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(6) $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $A(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (1,2)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία $x+2y-1=0$.

(7) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη.

$2f(x+1) + 2f(1-x) = \sigma\upsilon\nu 2x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τη γωνία που σχηματίζει με τον $x'x$ η εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$

(8) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη.

$f(x) = 2f(3x-4) - x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$g(x) = e^{2-x} f(x)$

Να βρείτε την εξίσ. της εφαπτομένης της C_g στο $A(2, g(2))$

(9) f συνεχής στο $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{f(x) - \sqrt{x+3}}{x-1} = 3$$

α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 1.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(1, f(1))$

Παράδειγμα 1: Δίνεται ότι τα σημεία $M(x,y)$ ενός επιπέδου συνδέονται με την σχέση $y = x\eta\mu x$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του y ως προς x στο σημείο $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

Παράδειγμα 2: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 9x + 2025$. Να βρεθούν:

α) ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x στο σημείο $x_0 = 5$.

β) οι τιμές του x, ώστε ο ρυθμός μεταβολής της f να είναι μη αρνητικός.

γ) ο ρυθμός μεταβολής του συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\big(x, f(x)\big)$ ως προς x όταν x=1.

Παράδειγμα 3: Ένα σώμα κινείται σε έναν κατακόρυφο άξονα και η θέση του κάθε χρονική στιγμή περιγράφεται από την συνάρτηση $S(t) = t\sqrt{t+1}, t \geq 0$.

α. Να βρεθεί η ταχύτητα $\upsilon(t)$ του κινητού και να υπολογιστεί η ταχύτητα την χρονική στιγμή $t_0 = 3$.

β. Να βρεθεί η επιτάχυνση $a(t)$ του κινητού και να υπολογιστεί η επιτάχυνση την χρονική στιγμή $t_0 = 1$.

Παράδειγμα 4: Το κόστος παραγωγής $K(x)$ και η είσπραξη $E(x)$, x μονάδων – μη αρνητικό και μετρούμενο σε χιλιάδες– ενός βιομηχανικού προϊόντος δίνονται από τις συναρτήσεις $K(x) = x^3 + 3x + 1$ και $E(x) = 15x$, αντιστοίχως. Να βρεθεί:

α. Το οριακό κόστος στο $x_0 = 1$.

β. Το μέσο κόστος $\boldsymbol{K_\mu(x) = \frac{K(x)}{x}}$ στο $x_0 = 1$.

γ. Η οριακή είσπραξη στο $x_0 = 3$.

δ. Πότε ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους, $P(x) = E(x) - K(x)$, είναι θετικός.

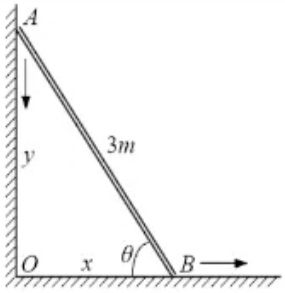
Παράδειγμα 5 (Άσκηση 2, Β' Ομάδας, Σχολικό βιβλίο, σελ.126):
Έστω *Τ* το εμβαδόν του τριγώνου *ΟΑΒ* που ορίζουν τα σημεία $O(0,0)$, $A(x,0)$ και $B(0,\ln x)$, με $x > 1$. Αν το *x* μεταβάλλεται με ρυθμό 4cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού *Τ*, όταν $x = 5\text{cm}$.

Παράδειγμα 6 (Άσκηση 8, Β' Ομάδας, Σχολικό βιβλίο, σελ. 127):
Ένα κινητό κινείται σε κυκλική τροχιά με εξίσωση $x^2 + y^2 = 1$. Καθώς περνάει από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, η τεταγμένη *y* ελαττώνεται με ρυθμό 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης *x* τη χρονική στιγμή που το κινητό περνάει από το *Α*.

Παράδειγμα 7 (Άσκηση 5, Β' Ομάδας, Σχολικό βιβλίο, σελ. 126):
Μία σκάλα μήκους 3m είναι τοποθετημένη σ' έναν τοίχο. Το κάτω μέρος της σκάλας γλυστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,1m/sec. Τη χρονική στιγμή t_0, που η κορυφή της σκάλας απέχει από το δάπεδο 2,5m, να βρείτε:

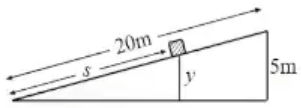
i) Το ρυθμό μεταβολής της γωνίας ϑ (Σχήμα).

ii) Την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή *Α* της σκάλας.

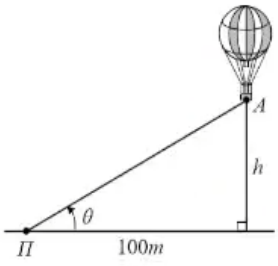


Παράδειγμα 9 (Άσκηση 3, Β' Ομάδας, Σχολικό βιβλίο, σελ. 126):

Ένας άνθρωπος σπρώχνει ένα κουτί στη ράμπα του διπλανού σχήματος και το κουτί κινείται με ταχύτητα 3m/s. Να βρείτε πόσο γρήγορα ανυψώνεται το κουτί, δηλαδή το ρυθμό μεταβολής του *y*.



Παράδειγμα 10 (Άσκηση 4, Β' Ομάδας, Σχολικό βιβλίο, σελ. 126):
Ένα αερόστατο *Α* αφήνει το έδαφος σε απόσταση 100m από έναν παρατηρητή *Π* με ταχύτητα 50m/min. Με ποιο ρυθμό αυξάνεται η γωνία ϑ που σχηματίζει η *ΑΠ* με το έδαφος τη χρονική στιγμή κατά την οποία το αερόστατο βρίσκεται σε ύψος 100m.



Παράδειγμα 1:

Η θέση ενός κινητού, που κινείται κατά μήκος ενός άξονα, δίνεται κάθε χρονική στιγμή από τη συνάρτηση θέσης:

$$\boldsymbol{x(t) = t^3 - 9t^2 + 24t - 3,} \qquad \boldsymbol{t \in [0, 6]}$$

$$(t \ \sigma\varepsilon \ \min \ \kappa\alpha\iota \ x \ \sigma\varepsilon \ m)$$

α. Να βρεθεί η αρχική θέση του κινητού.

β. Να βρεθεί η ταχύτητα του κινητού καθώς και η επιτάχυνσή του για κάθε χρονική στιγμή t της κίνησης.

γ. Να βρεθεί ποιες χρονικές στιγμές αλλάζει η φορά της κίνησης. Ποια χρονικά διαστήματα το κινητό κινείται προς τα δεξιά και ποια προς τα αριστερά;

δ. Σε ποιες χρονικές στιγμές η στιγμιαία ταχύτητα θα έχει μέτρο 9; Σε ποιες θέσεις βρίσκεται αυτές τις χρονικές στιγμές;

ε. Να βρεθεί το συνολικό διάστημα που διάνυσε το κινητό τα πρώτα 6 λεπτά της κίνησής του.

στ. Τι δείχνει η τιμή $|x(6) - x(0)|$;

ζ. Να βρεθεί η μέση ταχύτητα του κινητού τα πρώτα 6 λεπτά της κίνησής του.

Παράδειγμα 2 : (Ερώτημα Θέματος – Τράπεζα Θεμάτων - ΙΕΠ)

Ένα κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης

$y = \sqrt{4 - x^2}, x \in [-2, 2].$

Καθώς περνάει από το σημείο $B\left(-1, \sqrt{3}\right)$ η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο.

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του κινητού, τη χρονική στιγμή που περνάει από το σημείο Β.

Παράδειγμα 4: (Τράπεζα Θεμάτων – ΙΕΠ)

Στο παρακάτω σχήμα έχουμε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο απεικονίζεται μια αγροικία στην θέση B του αρνητικού ημιάξονα Ox'. Δυτικά της αγροικίας, κατά μήκος του θετικού ημιάξονα Ox, υπάρχει ένας λόφος, το ύψος του οποίου δίνεται από τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ για $x \geq 0$. Όλες οι συντεταγμένες μετρούνται σε μέτρα.

Καθώς ο ήλιος αρχίζει να δύει, ο λόφος ρίχνει στην πεδιάδα την σκιά του $O\Sigma$, η οποία και μεγαλώνει με την πάροδο του χρόνου t, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Θεωρούμε $t = 0$ τη στιγμή που ο ήλιος ρίχνει κάθετα τις ακτίνες του στο σημείο O του λόφου, ενώ στη συνέχεια κινούμενος προς τα δυτικά, αρχίζει να δημιουργείται η σκιά.

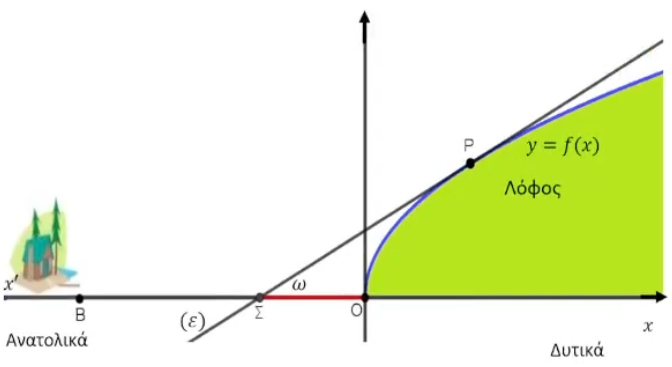
Ας είναι $\hat{\omega} = P\hat{\Sigma}O$.

α) Αν το σημείο P έχει συντεταγμένες $P(x_P, y_P)$, να αποδείξετε ότι η τετμημένη του σημείου Σ είναι $x_\Sigma = -x_P$.

β) Να αποδείξετε ότι κάθε χρονική στιγμή $t > 0$ ισχύει $\varepsilon\varphi\left(\omega(t)\right) = \frac{1}{2}\left(x_P(t)\right)^{-\frac{1}{2}}$.

γ) Να βρείτε **πόσο γρήγορα μεγαλώνει η σκιά** $(\boldsymbol{O\Sigma})$ <u>τη χρονική στιγμή $\boldsymbol{t_0}$</u> κατά την οποία οι ακτίνες του ήλιου σχηματίζουν γωνία $\boldsymbol{\omega = \frac{\pi}{6}}$ με τον οριζόντιο άξονα, ενώ αυτή τη χρονική στιγμή t_0 **η γωνία $\boldsymbol{\omega}$ μειώνεται με ρυθμό $\frac{1}{16}\boldsymbol{rad}$ ανά λεπτό.**

Δίνεται ότι $\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = 1 + \varepsilon\varphi^2\omega$.



ΤΕΣΤ στα Μαθηματικά Ομάδα Α

ΘΕΜΑ 1

Α) Αντιστοιχήστε :

1.	$f(x) = ln\, x + x + 21$	α)	έχει ακρότατα
2.	$f(x) = e^x + \alpha$	β)	δεν έχει ακρότατα
3.	f συνεχής στο $[\alpha, b]$ και $f(\alpha) \cdot f(b) > 0$	γ)	έχει το πολύ μια ρίζα
4.	$f(x) = x^2 + e^x$	δ)	έχει ακριβώς μια ρίζα
5.	f συνεχής και γνησίως αύξουσα στο (α, b)	ε)	δεν έχει ρίζα

(15 μονάδες)

Β) Σωστό ή Λάθος ;

1) Αν $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η f διατηρεί σταθερό πρόσημο.

2) Αν f ορισμένη και συνεχής στο $[\alpha, \beta]$, $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\alpha)$, $f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) > f(\beta)$,
τότε η f παρουσιάζει μέγιστο σε $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

3) Αν f συνεχής , $f^2(x) = x^2 + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(1) < 0$
τότε $f(x) = -\sqrt{x^2+1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4) Αν η συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ έχει ρίζα τότε $f(\alpha) f(\beta) < 0$.

5) Αν f συνεχής στο $[\alpha, b]$ και $f(\alpha) \cdot f(b) > 0$ τότε η f δεν έχει ρίζα .

(10 μονάδες)

ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{e^x + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

(Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1}.

(Μονάδες 12)

ΘΕΜΑ 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -3e^{2x+1} - 5x + 3$

Α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία .

Β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Γ) Να δείξετε ότι η C_f τέμνει τον $x'x$ σε ένα ακριβώς σημείο, το οποίο έχει αρνητική τετμημένη.

Δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην $y = \frac{1}{11}x + 21$

Ε) Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει οριζόντια εφαπτομένη.

(25 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνάρτηση g με $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1,1]$ και η συνεχής συνάρτηση f, ορισμένη στο $[0,\pi]$, με $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, τέτοιες ώστε:

$$(gof)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|, \text{ για κάθε } x \in [0,\pi].$$

α)

i. Να αποδείξετε ότι $|f(x)| = |\eta\mu x|$.

(Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

(Μονάδες 03)

β) Να βρείτε την συνάρτηση f.

(Μονάδες 09)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $h: (0,\pi] \to \mathbb{R}$ με $h(x) = \frac{1}{f(x) - x}$, όπου f είναι η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος. Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:

$$\lim_{x \to 0} h(x)$$

(Μονάδες 07)

Καλή επιτυχία !!!

(1) $f^3(x) + f(x) + 1 = x^2$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

α) Να δ. ότι $f \nearrow$ στο $(0, +\infty)$

β) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο.

γ) Να δ. ότι f συνεχής στο 1

δ) Να δ. ότι $f'(1) = 2$

(2) $f(x+y) = f(x) + f(y) + 21xy$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Αν f παραγωγίσιμη στο 0 να δ. ότι η f είναι παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$.

(3) $f^3(x) + x f^2(x) = 2x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Αν f παραγωγίσιμη στο 0 να δ. ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y - x - 21 = 0$

(4) $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + \alpha x + \beta}{x-1}, & x < 1 \\ \beta x^2 + \gamma, & x \geq 1 \end{cases}$$

Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 1 να βρείτε τα α, β, γ.

(5) $|f(x) - \eta\mu x| \leq \sqrt{x^2+4} - 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να δ. ότι $f'(0) = 1$

(6) Αν $f(1) = 2$ και $f'(1) = -1$ να βρείτε τα όρια:

α) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f^2(x) - 2f(x)}{x^2+x-2}$ β) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{f(x) - 2x}{x^2 - x}$ γ) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{xf(x) - 2}{x-1}$

(7) Αν $f'(0) = 2$ να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(4x)}{x^2+x}$

(8) $f: [\alpha, +\infty) \to \mathbb{R}$ συνεχής με $f'(\alpha) < 0$.

Να δ. ότι η f δεν παρουσιάζει ελάχιστο το α.

(9) $f(x+y) = f(x)\sigma\upsilon\nu y + f(y)\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

Αν f παραγωγίσιμη το 0 να δ. ότι

f παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$ και

$f'(x_0) = f'(0)\sigma\upsilon\nu x_0$ για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$.

(10) Αν f παραγωγίσιμη το $\alpha \in (0, +\infty)$

να δ. ότι $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{\alpha f(x) - x f(\alpha)}{x^2 - \alpha x} = f'(\alpha) - \dfrac{f(\alpha)}{\alpha}$

(1) Ο όγκος μιας σφαίρας ελαττώνεται με ρυθμό $4\ cm^3/sec$. Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο ελαττώνεται η επιφάνεια της σφαίρας όταν η ακτίνα της είναι $8\ cm$.

(Απ. ελαττώνεται με ρυθμό $1\ cm^2/sec$)

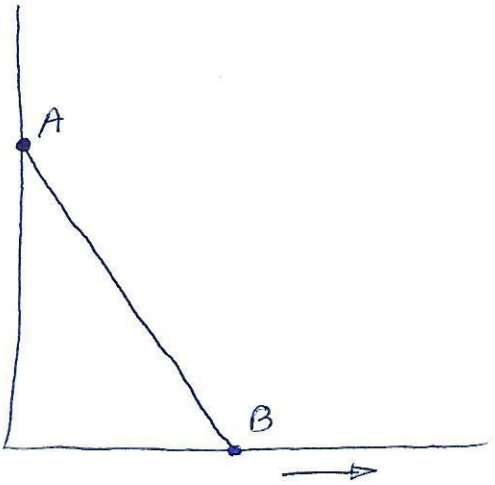
(2) $f(x) = \ln x$. Ένα σημείο Α κινείται κατά μήκος της C_f. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $\alpha(t)$ του σημείου Α είναι $\alpha'(t) = 2\alpha(t)$.

Αν Μ το σημείο τομής της εφαπτομένης της C_f στο Α με τον άξονα $x'x$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του Μ τη στιγμή που το Α έχει τετμημένη e.

(Απ. $x'(t_0) = -2e$)

(3) Μια σκάλα μήκους 5m είναι τοποθετημένη σε τοίχο.

Το Β γλιστράει στο δάπεδο με ρυθμό 0,3 m/s.

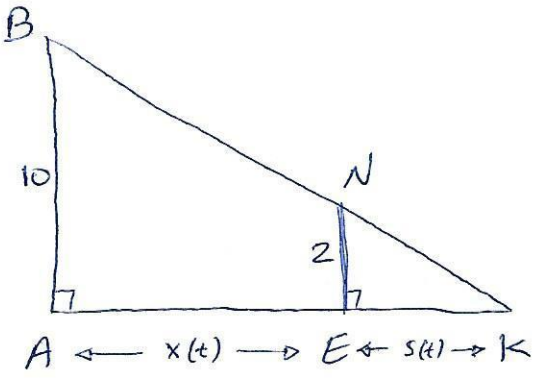


Τη χρονική στιγμή που το Α απέχει 3 m από το δάπεδο να βρεθεί την ταχύτητα με την οποία πέφτει η κορυφή Α της σκάλας.

(Απ. 0,4 m/s)

(4) Μια γυναίκα (ΕΝ) ύψους 2m απομακρύνεται από ένα φανοστάτη (ΑΒ) ύψους 10 m, με ταχύτητα $x'(t) = 0,5$ m/s.

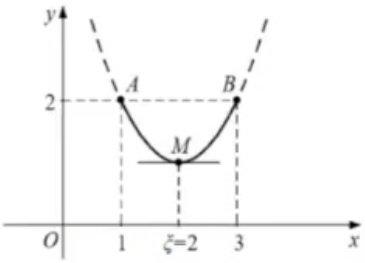
Με ποια ταχύτητα αυξάνεται ο ίσκιος της γυναίκας;



(Απ. $s'(t) = \frac{1}{8}$ m/s)

Παράδειγμα 1:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5,\ x \in [1,3]$.

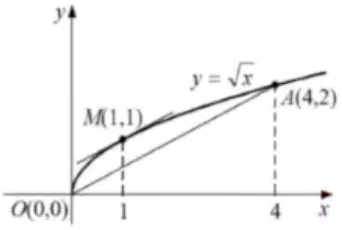


Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα (1,3).

Β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$ στο (1,3).

Παράδειγμα 4:

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x},\ x \in [0,4]$.



Α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = \frac{1}{2}$ έχει μια, τουλάχιστον, ρίζα στο ανοικτό διάστημα (0,4).

Β) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = \frac{1}{2}$ στο (0,4).

Παράδειγμα 1: Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που δίνεται και στη συνέχεια για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα ξ που ανήκουν στα δοθέντα διαστήματα για τα οποία ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος

α. $f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^4},\ [0,2]$

β. $f(x) = \sqrt[5]{(x+1)^4},\ [-2,0]$

Παράδειγμα 2: Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε για τη συνάρτηση f με

$$f(x) = \begin{cases} x + \alpha, & x \le 1 \\ \beta x^2 + \gamma x - 1, & x > 1 \end{cases}$$

ώστε να πληρούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[0, 2]$

Παράδειγμα 3: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + 3, & x \le 1 \\ x^2 + 1, & x > 1 \end{cases},\ x \in \mathbb{R}$.

Αν γνωρίζουμε ότι η παράγωγός της μηδενίζεται στο $x = 0$ μπορούμε να συμπεράνουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [-1, 2];

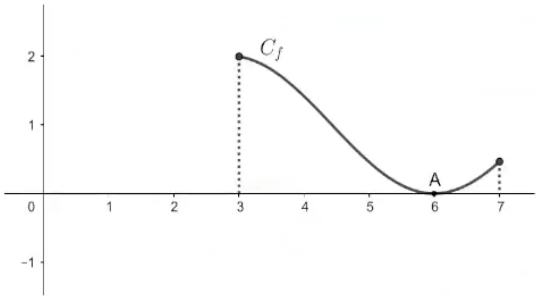
Παράδειγμα 4: Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης

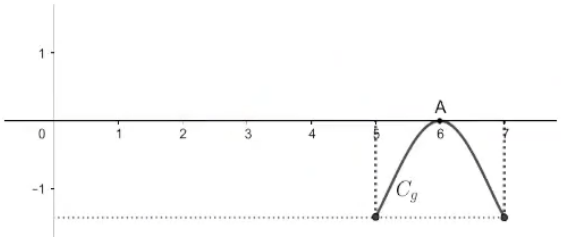
$$f(x) = e^{1-x} + e^{x} - e - 1$$

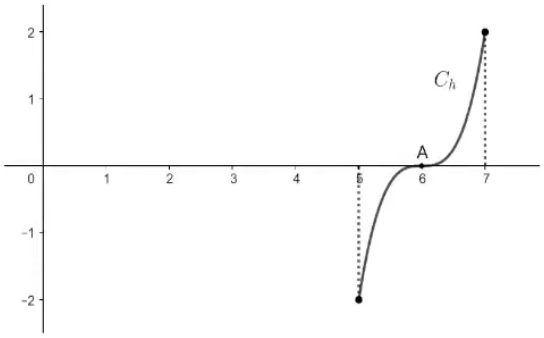
έχει τουλάχιστον μια οριζόντια εφαπτομένη στο διάστημα $[0,1]$.

Παράδειγμα 5: (ΘΕΜΑ 2 – 36842, Τράπεζα Θεμάτων, ΙΕΠ)

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 3 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f, g και h, οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.







α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f, g και h.

β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού τους.
ii. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της.

Παράδειγμα 6: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0 \\ \sigma\upsilon\nu x - 2, & x \geq 0 \end{cases}$

i. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1, \pi]$

ii. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη σε σημείο της με τετμημένη $x_o \in (-1, \pi)$

iii. Τι συμπέρασμα προκύπτει από τις απαντήσεις των ερωτημάτων i. και ii. ;

1. Αν μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R με

$$f'(x) \neq 0 \text{ για κάθε } x \in R.$$

Να αποδειχθεί ότι η f είναι '$1-1$'.

2. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$, τότε η f έχει το πολύ μια ρίζα.

3. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη. Αν $f''(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R$ τότε η f έχει το πολύ δυο ρίζες.

4. Έστω συνάρτηση f η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη. Αν η **f** έχει **3** ρίζες, να δείξετε ότι η **f ''** έχει τουλάχιστον **1** ρίζα.

↳ Κατά συνέπεια, αν η **f** έχει **ν** ρίζες, τότε η **f'** έχει τουλάχιστον **ν-1** ρίζες, η **f''** έχει τουλάχιστον **ν-2** ρίζες και ούτω καθεξής.

Παράδειγμα 7: Έστω f συνεχής στο $[0,2]$ και (2 φορές) παραγωγίσιμη στο $(0,2)$ με $f(0) = f(1) = f(2)$. Δείξτε ότι υπάρχει $c \in (0,2)$ τέτοιο ώστε $f''(c) = 0$.

5. (ΣΥΜΜΕΤΡΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΗΜΑ ROLLE)

Αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$, Α διάστημα, είναι άρτια και παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι η γραφική της παράσταση δέχεται τουλάχιστον μία οριζόντια εφαπτομένη.

Παράδειγμα 1: Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 4$.

i. Να εξετάσετε αν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $[0, 2]$.

ii. Αν ισχύουν, να βρείτε τα $\xi \in (0, 2)$ για τα οποία ισχύει: $f'(\xi) =. -4$

iii. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη ε της C_f στο σημείο $M\big(\xi, f(\xi)\big)$ είναι παράλληλη στην ευθεία $\delta: 4x + y - 3 = 0$ και να βρείτε την εξίσωση της ε.

Παράδειγμα 2: Να αποδειχθούν οι ανισότητες:

i. $e^x \geq x + 1, x \in \mathbb{R}$

ii. $lnx \leq x - 1, x > 0$

Μεθοδολογία: Αν ζητείται ο υπολογισμός ορίου της μορφής

$$\lim_{x \to x_o} [f(x + a) - f(x)]$$

1. Ορίζουμε διάστημα $[x, x + a]$
2. Μέσω **Θ.Μ.Τ.** αποδεικνύουμε ότι υπάρχει $\xi \in (x, x + a)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(x + a) - f(x)}{a}$$

3. Δεδομένου ότι $\boldsymbol{x < \xi < x + a}$, οδηγούμαστε σε **ανισότητα** στην οποία εφαρμόζουμε **Κριτήριο Παρεμβολής.**

Παράδειγμα 4: Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} [x\,(\ln(x + 1) - lnx)]$

Παράδειγμα 5: Έστω f παραγωγίσιμη στο $[1, 5]$ και $f(1) = -3$. Αν για κάθε $x \in (1, 5)$ ισχύει:

$$2 \leq f'(x) \leq 4$$

Να αποδειχτεί ότι $5 \leq f(5) \leq 13$.

Παράδειγμα 6 Να λυθεί η εξίσωση $3^x + 4^x = 2^x + 5^x$

Παράδειγμα 7: (Διαμέριση σε υποδιαστήματα ίσου πλάτους)

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,5]$, παραγωγίσιμη στο $(1,5)$ και ισχύει $f(1) = f(5)$, να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,5)$, διαφορετικά μεταξύ τους, τέτοια ώστε:

$$f'(\xi_1) + f'(\xi_2) = 0$$

Παράδειγμα 8: (Διαμέριση σε υποδιαστήματα άνισου πλάτους)

Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής στο [0, 15] και παραγωγίσιμη στο (0, 15). Δίνεται ότι $f(0) = 1$ και $f(15) = 19$. Να αποδειχτεί ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (0,15)$, διαφορετικά μεταξύ τους, για τα οποία ισχύει:

$$2f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 6$$

Παράδειγμα 9: Να αποδείξετε ότι: $|\eta\mu\beta - \eta\mu\alpha| \leq |\beta - \alpha|$

Ασκήσεις από το ΨΦ

Θέμα 1

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, έτσι ώστε $f(0)=e^2 f(1)$
Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)+2f(\xi)=0$.

Θέμα 2

Αν η συνάρτηση f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[-2,2]$ με $f(1)=0$ και $g(x)=f(x)(x^2-4)$, τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-2,2)$ τέτοιο ώστε $g''(x_0)=0$.

Θέμα 3

Να δείξετε ότι η ευθεία $y=\alpha x+\beta,\ \alpha\neq 0$ έχει με την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^x$ το πολύ δύο κοινά σημεία.

Θέμα 4

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\ln x=2-x,\ x>0$ έχει το πολύ μία ρίζα.

Θέμα 5

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^{\frac{x}{2}}+x+1,\ x\in\mathbb{R}$ και $g(x)=e^{-x}-2x^3+1,\ x\in\mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο το οποίο βρίσκεται πάνω στον άξονα yy'.

Θέμα 6

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=x^2$ έχει μόνο δύο ρίζες στο $[-\pi,\pi]$.

Θέμα 7

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ έτσι ώστε $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1+f(0)$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ έτσι ώστε $f'(x_0)=\sigma\upsilon\nu x_0$

Θέμα 8

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2x-5=(x^2-5x+6)\varepsilon\varphi x$, $x \neq \kappa\pi+\frac{\pi}{2}, \kappa \in \mathbb{Z}$ έχει τουλάχιστον μία ρίζα στο $(2,3)$.

Θέμα 9

Θεωρούμε συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $[1,2]$ και ισχύει: $f(1)=f(2)-\frac{3}{2}$.

1) Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$, ώστε $f'(x_0)=x_0$.

2) Αν η f' είναι συνεχής στο $[1,2]$ και $f'(1)>4$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$, ώστε $f'(\xi)=4\xi$.

Θέμα 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-\kappa x+\lambda, & -1 \leq x<0 \\ \mu x^2+2x+2, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς κ, λ, μ αν ισχύουν για την f οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[-1,1]$.

Θέμα 11

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3+3(2\alpha-1)x^2+2(\alpha+\beta-2)x-3\alpha-\beta+2=0$, με $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Θέμα 12

Αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

Θέματα στο ΘΜΤ από ΨΦ

Θέμα 1

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f.

Αν $f(19)=f(1)$ να αποδείξετε ότι υπάρχουν αριθμοί $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (1,19)$ τέτοιοι ώστε $2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)+4f'(\xi_3)=0$.

Θέμα 2

Μια συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $\Delta=[0,\ 1]$ και ισχύει $f(0)=0$ και $f(1)=1$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

i. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,\ 1)$, τέτοιο ώστε $f(x_0)=1-x_0$.

ii. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2 \in (0,\ 1)$, τέτοια ώστε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$.

Θέμα 3

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού λ για τις οποίες ισχύει $99^{\lambda}+102^{\lambda}=100^{\lambda}+101^{\lambda}$.

Θέμα 4

Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι $x+1 \le e^x \le xe^x+1$.

Θέμα 5

Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[1,5]$ με $f(1)=-2,\ f(5)=2$. Να δείξετε ότι:

i. Υπάρχει εφαπτομένη (ε) της C_f τέτοια ώστε να είναι παράλληλη στην διχοτόμο του 1ου τεταρτημορίου.

ii. Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,5)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)=2-f'(\xi_2)$.

Διαγώνισμα στις παραγράφους 2.1 έως 2.5

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδείξετε ότι, αν μία συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 10

Β. Τι σημαίνει γεωμετρικά το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού; **Μονάδες 5**

Γ. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α) Αν f συνεχής στο x_0 τότε f παραγωγίσιμη στο x_0 .

β) Αν $f(x)=e^{2x}$ τότε $f'(x)=e^{2x}$

γ) Αν $f(x)=x^3+x$ τότε η C_f δεν έχει εφαπτομένη την $y=-2x$

δ) Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τότε η f είναι 1-1 .

ε) Για οποιαδήποτε συνάρτηση f με 2 ρίζες υπάρχει ξ με $f'(\xi)=0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

1. Αν η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η C_f έχει 2 σημεία τομής με τον x΄x , να δείξετε ότι υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον x΄x . **(7 μονάδες)**

2. Αν $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η C_f έχει το πολύ ένα κοινό σημείο με τον x΄x . **(8 μονάδες)**

3. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και α , β με α<β και $f(\alpha)<0<f(\beta)$.
Να δείξετε ότι υπάρχουν x_0 και ξ με $\alpha<x_0<\xi<\beta$ τέτοιοι ώστε
$(\beta-x_0)f'(\xi)=f(\beta)$ **(10 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3 & , \quad x>2 \\ \alpha x^2+\beta x & , \quad x\le 2 \end{cases}$

Α) Να βρείτε τα α , β ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο 2 .

(10 μονάδες)

Β) Αν α = 4 , β = -4 τότε :

i) να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f η οποία είναι παράλληλη στην ευθεία y = 4x + 2018 **(7 μονάδες)**

ii) να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,4)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)\left(x_0{}^2-16\right)+f(x_0)\cdot 2x_0 = 0$$

(8 μονάδες)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνονται οι συναρτήσεις f , g για τις οποίες ισχύει $f'(x)=e^x+g(-x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αν g γνησίως φθίνουσα τότε :

α) Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι γνησίως αύξουσα .

(4 μονάδες)

β) Για τους αριθμούς α , β , γ με α<β<γ και β-α=γ-β να αποδείξετε ότι $2f(\beta)<f(\alpha)+f(\gamma)$ **(7 μονάδες)**

γ) Για οποιουσδήποτε αριθμούς α , β με α<β υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $\left(e^{\xi}+g(-\xi)\right)\cdot(\beta-\alpha)=f(\beta)-f(\alpha)$

(7 μονάδες)

δ) Αν g παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $g(-4)-g(-2)=e^2-e^4$ να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(2,4)$ τέτοιο ώστε $g'(-x_0)=e^{x_0}$

(7 μονάδες)

Καλή επιτυχία !

(1) f συνεχής στο $[0,\pi]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$.
Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,\pi)$ τέτοιο ώστε $\varepsilon\varphi\xi f'(\xi) = -f(\xi)$

(2) f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Δίνεται ακόμα ότι ισχύει $\left(f(\alpha+1)\right)^{\alpha+4} = \left(f(\alpha+4)\right)^{\alpha+1}$
όπου α ένας θετικός αριθμός.
Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (\alpha+1, \alpha+4)$
τέτοιο ώστε: $f(x_0) \cdot \ln f(x_0) = x_0 f'(x_0)$

(3) f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $6f(2) = 2f(6)$
Να δ. ότι υπάρχει σημείο $A(\xi, f(\xi))$ με $\xi \in (2,6)$
στο οποίο η εφαπτομένη της C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

(4) f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και f' παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.
α) Αν η C_f έχει δύο σημεία κοινά με την ευθεία $y = 2x$
να δ. ότι υπάρχει σημείο της C_f το οποίο δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.
β) Αν $\left(f'(\alpha)\right)^2 + \left(f'(\beta)\right)^2 = 0$ και $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (\alpha,\beta)$
β1) Να δ. ότι υπάρχει ρίζα της f''.
β2) Να δ. ότι υπάρχει το πολύ μια ρίζα της f στο $[\alpha,\beta]$.

(5) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη

$xf'(x)-x\neq -1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

$2<2f(x)<3$ για κάθε $x\in[1,e]$.

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(1,e)$

τέτοιο ώστε $\ln x_0 + f(x_0) = x_0$

(6) f (παραγωγίσιμη 2 φορές) στο $[\alpha,\beta]$ και g 1-1 στο $\mathbb{R}$

με $g(2)=0$ και $g\left(f(\alpha)-f(\beta)+2\right)=0$

Ακόμα $f''(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(\alpha,\beta)$

τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

(7) $f'(x)\neq e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

$0<f(x)<1$ για κάθε $x\in[0,1]$

Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$

τέτοιο ώστε $f(x_0)+1 = e^{x_0}$.

(8) f παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με

$f^2(\alpha)-f^2(\beta) = \alpha^2-\beta^2$.

Να δ. ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$

τέτοιο ώστε $f(\xi)f'(\xi)=\xi$.

(1) Αν f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και $f(\alpha)+f(5\alpha)=2f(3\alpha)$, $\alpha>0$ τότε: να δείξετε ότι η f'' μηδενίζει.

(2) f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ με $x\neq y$ ισχύει $(x-y)\left(f'(x)-f'(y)\right)<0$.

Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(\alpha+2)+f(\alpha+3)>f(\alpha+1)+f(\alpha+4)$$

(3) f συνεχής στο $[0,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$. $f(0)=0$, $f'\nearrow$, $f'(x)>1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Να δείξετε ότι $x<f(x)<xf'(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

(4) f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$

Να δ. ότι για κάθε $x>0$ υπάρχει $\xi\in(x,3x)$ τέτοιο ώστε $2xf'(\xi)+f(x)=f(3x)$

(5) f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)>0$ και $f(\beta)=f'(\beta)=0$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)>0$.

(6) Δίνεται f για την οποία ισχύει

$2 \le f'(x) \le 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν το $A(0,1)$ είναι ένα σημείο της C_f τότε:

α) Να δ.ο.τι $11 \le f(5) \le 21$

β) Να δ.ο.τι η εξίσωση $f(x) + x = 2(x+1)$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο $(0,5)$.

(7) f παραγωγίσιμη στο $[1,2]$

$$(f(1)-2)^2 + (f(2)-4)^8 = 0$$

α) Να δ.ο.τι υπάρχει $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) + 2\xi = 6$

β) Να δ.ο.τι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,2)$ τέτοια ώστε

$$f'(\xi_1) \cdot f'(\xi_2) = 4$$

(8) f παραγωγίσιμη στο $[\alpha, \beta]$

Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2, \xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοια ώστε $4f'(\xi_1) + 3f'(\xi_2) = 7f'(\xi)$

(9) f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και f' 1-1.

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο $A(x_0, f(x_0))$ δεν έχει άλλο κοινό σημείο με την C_f εκτός του A.

Θέμα 1

Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to(0,+\infty)$ δίνεται ότι $\ln f(\beta)-\ln f(\alpha)=\beta-\alpha$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=f(\xi)$.

Θέμα 2

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(1)-f(e)=\frac{1}{e}$ (1). Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $x_0^2 f'(x_0)+1-\ln x_0=0$

Θέμα 3

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x=x^2$ έχει μόνο δύο ρίζες στο $[-\pi,\pi]$.

Θέμα 4

Έστω ότι η συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ $(\alpha>0)$ είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Αν $\left(f(\alpha)\right)^{\beta}=\left(f(\beta)\right)^{\alpha}$ να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)\ln f(x_0)=x_0 f'(x_0)$.

Θέμα 5

Να λυθεί η εξίσωση $7^x-6^x=9^x-8^x$

Θέμα 6

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=\beta$ και $f(\beta)=\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)+f'(x_2)=-2$.

Θέμα 7

Θεωρούμε συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(4,11)$ και $B(19,5)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί ξ_1,ξ_2 τέτοιοι, ώστε $2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)=-2$.

Θέμα 8

Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) και $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$, να δείξετε ότι:

α) Υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\alpha+\beta-\xi$.

β) Υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(\alpha,\beta)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.

Θέμα 9

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=-g^2(x)$ και $g'(x)=f^2(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

ε) Να δειχθεί ότι η συνάρτηση $h(x)=f^3(x)+g^3(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

στ) Να βρεθεί ο τύπος της συνάρτησης h, αν $f(0)=1$ και $g(0)=2$.

Θέμα 10

Να βρεθεί συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in D_f$, η οποία δεν είναι σταθερή.

Θέμα 11

Αν για τη συνάρτηση f, ισχύει $f'(x)=0$ για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,2)$ και η συνάρτηση είναι συνεχής στο $[0,2]$, να δείξετε ότι η f είναι σταθερή στο $[0,2]$.

Θέμα 12

Να βρεθεί η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=2-\frac{f(x)}{x}$, για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$.

Θέμα 13

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=x-1+\frac{1}{x-1}$

β) Αν $\theta\epsilon R$, να εξετάσετε αν υπάρχει ρίζα της εξίσωσης $2f(x)-3\eta\mu\theta=0$

Θέμα 14

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x\ln x-x^2+1$.

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού Α της f, η $f'(x)$ και η $f''(x)$.

β) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και να βρεθεί το πρόσημο της f.

γ) Να λυθεί η εξίσωση $2\ln x=\dfrac{x^2-1}{x}$.

δ) Αν $0<x\neq 1$, να αποδειχθεί ότι $\dfrac{x\ln x}{x^2-1}<\dfrac{1}{2}$.

Θέμα 15

Έστω $f:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\to R$ με $f(x)=\frac{\eta\mu x}{x}$.

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\frac{3}{\pi}$

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\frac{\pi}{3}$

Θέμα 16

α) Να μελετήσετε την $f(x)=\frac{ln\,x}{x}+1-x$ ως προς το πρόσημο.

β) Να μελετήσετε την $g(x)=x\,ln\,x-x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3$ ως προς τη μονοτονία.

Θέμα 17

Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια ώστε:

$2xf(x)+(x^2+1)f'(x)=e^x,\forall x\in\mathbb{R}$, με $f(0)=1$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f

δ) Αν $\alpha\in R$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^x-e^\alpha=e^a\cdot x^2$

Παράδειγμα 2:

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0)=2f(0)=4$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\left(f'(x)\right)^2+\left(f(x)\right)^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Εάν για κάθε $x\in\mathbb{R}$, ισχύει $f''(x)+f(x)=0$, τότε:

α)να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$

β) να βρείτε τον τύπο της g.

Παράδειγμα 4:

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:

α) $f'(x)=5$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $f'(x)=2x-1+\frac{1}{x}-e^x$, για κάθε $x\in(0,+\infty)$

Παράδειγμα 5:

Να βρείτε όλες τις συναρτήσεις f για τις οποίες ισχύει:

α) $f'(x)=-1-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

β) $f'(x)=\frac{4}{\sigma w^2 x}-\frac{5}{\eta\mu^2 x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+2025$, $για\ κάθε\ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

γ) $f'(x)=2^x\ln 2+3^x-\frac{1}{\sqrt{x}}+4$, $για\ κάθε\ x\in(0,+\infty)$

Παράδειγμα 6:

Να βρείτε την συνάρτηση f για την οποία ισχύει:

α) $f'(x)=e^x+3x^2+2x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $και$ $f(0)=-3$

β) $xf'(x)=\eta\mu x-f(x)$, $για\ κάθε\ x\in(0,\pi)$ $και$ $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{2}{\pi}$

γ) $f'(x)=3x^2e^{-f(x)}$, $για\ κάθε\ x\in(0,+\infty)$ $και$ $f(1)=0$

Παράδειγμα 1: Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$f(x)=\eta\mu^2 x+\sigma\upsilon\nu^2 x,\ x\in\mathbb{R}$$

είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$ και να βρείτε τον τύπο της.

Παράδειγμα 2: Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες και ισχύει ότι $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Επιπλέον ισχύει $|f'(x) - g(x)| = -|f(x) + g'(x)|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x)\eta\mu x + g(x)\sigma\upsilon\nu x$ είναι σταθερή και να βρείτε την τιμής της.

Παράδειγμα 4: Έστω η παραγωγισιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^*$, με $f(0) = 2$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{5}f'(x) - 2xf(x) = 0 \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

να βρεθεί ο τύπος της f.

Παράδειγμα 5:

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(0) = -3$ και $(x-1)f'(x) = 2x^2 + 2x - 4$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της f.

Παράδειγμα 6: Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}^*$ για την οποία ισχύει:

$$f'(x) = \frac{x-1}{x^2} \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^* .$$

Αν $f(1) = 3$ και $f(-1) = 5$ να βρεθεί ο τύπος της f.

Παράδειγμα 7: Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,2]\to\mathbb{R}$, η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη. Αν ισχύουν τα εξής:

- $f(x)\neq 0$, για κάθε $x\in[1,2]$
- $f(1)=2$
- $f(2)=4$
- $f''(x)f(x)-[f'(x)]=0$, για κάθε $x\in[1,2]$

τότε:

α. Να αποδειχτεί ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=2$.

β. Αν θεωρήσουμε συνάρτηση $g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}, x\in[1,2]$, να αποδειχτεί ότι η $g(x)$ είναι σταθερή στο $[1,2]$.

γ. Να αποδειχτεί ότι ο τύπος της f είναι $f(x)=2^x$.

Παράδειγμα 1:

Να βρείτε τον τύπο της f σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α. $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}lnx+e^{\sqrt{x}}\frac{1}{x}$,

για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(1)=0$

β. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $(x^2+2x+3)f'(x)=2x+2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και

$f(-1)=ln2$

γ. $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}e^{\sqrt{x}}+\sqrt{x+1\cdot}\,e^{\sqrt{x}}+\frac{1}{x+1}-\sigma\upsilon\nu x$,

για κάθε $x\in(-1,+\infty)$ και $f(0)=1$

Παράδειγμα 2:

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(-\infty,1)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(0)=0$ και $\frac{1}{3}f'(x)=x^2e^{f(x)}$, για κάθε $x\in(-\infty,1)$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Παράδειγμα 3:

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

- η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή των αξόνων και
- $f'(x)=\frac{2x}{x^2+1}f(x)+(x^2+1)\sigma\upsilon\nu x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε τον τύπο της f.

Παράδειγμα 4:

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι:

$$x\big(f'(x)-f(x)\big)=\frac{\sqrt{x}}{2}e^x,\ \text{για κάθε } x\in(0,+\infty) \text{ και } f(1)=e.$$

Να βρείτε τον τύπο της f.

Παράδειγμα 7: (Θέμα 4-33642 (τροποποιημένο), Τράπεζα Θεμάτων, ΙΕΠ)

Έστω f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $f(0)=1$και για

κάθε x$\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)+2x=f'(x)+x^2$$

α) Να αποδείξετε ότι αν $g(x)=f(x)-x^2$, τότε ισχύει

i. $g'(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

ii. $f(x)=e^x+x^2, x\in\mathbb{R}$

β) Να αποδείξετε ότι

i. Υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_o,f(x_o)), x_o\in(-1,0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια.

iii. Να βρείτε τη μονοτονία της f και να δείξετε ότι για το x_o του προηγούμενου ερωτήματος ισχύει $f(x)\geq f(x_o)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3 (ΘΕΜΑ 4-32524-Τράπεζα Θεμάτων ΙΕΠ):

Έστω η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\frac{e}{x}-ln\,x$.

α)Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία.

β)Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1-x)=x\,ln\,x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x=1$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+x}{e-x\,ln\,x-ex}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

ii. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=-\infty$.

Θέμα 1

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των συναρτήσεων:

i. $f(x)=e^{x^3-12x}$

ii. $g(x)=\ln(x^2+2x+3)$

Θέμα 2

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της συνάρτησης: $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$

Θέμα 3

1. Να λυθεί η εξίσωση: $x^2+x+\ln x-2=0$.
2. Να λυθεί η ανίσωση: $x+\ln x<1$.

Θέμα 4

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=\dfrac{1}{x}+x-\ln^2 x-2,\ x>0.$

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία της η συνάρτηση f.

Θέμα 5

Να λυθεί η ανίσωση: $x-1\le\dfrac{\eta\mu x^2-\eta\mu x^3}{3x^2}$.

Θέμα 6

Αν ισχύει $\ln\dfrac{\alpha}{\beta}=e^{\beta}-e^{\alpha}$, όπου $\alpha,\beta>0$ τότε, να δειχθεί ότι $\alpha=\beta$.

Θέμα 1

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$f'(x)=3f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=\frac{1}{3}$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση

$g(x)=e^{-3x}\cdot f(x)$ είναι σταθερή και να βρεθεί ο τύπος της f.

Θέμα 2

Να βρείτε τον τύπο της $f:\Delta\to\mathbb{R}$, στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) $f'(x)=3x^2-6x+2$, $x\in\Delta=\mathbb{R}$, με $f(1)=5$

ii) $f'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}$, $x\in\Delta=\mathbb{R}$, με $f(0)=-3$

iii) $f''(x)=e^x-\sigma\upsilon\nu x$, $x\in\Delta=\mathbb{R}$, με $f'(0)=1$ και $f(0)=3$

3) Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(0)=-3$ και

$$(x-1)f'(x)=2x^2+2x-4 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Να βρείτε τον τύπο της f

Θέμα 4

Έστω η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με $f(0)=2$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{5}f'(x)-2xf(x)=0 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R} \quad (1)$$

να βρεθεί ο τύπος της f

Θέμα 5

Να βρείτε τη συνάρτηση f η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ με $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\ln 2$, $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ και τέτοια ώστε $f''(x)=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$ για κάθε $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

Θέμα 6

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $f'(x)+2f(x)=0$ (1), για κάθε $x\in\mathbb{R}$, με $f(0)=3$. Να βρεθεί ο τύπος της f.

Θέμα 7

Να βρείτε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$x^2\cdot f'(x)+2xf(x)=x^2\cdot f(x)$, για κάθε $x>0$ και $f(1)=e$.

Θέμα 8

Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$f(0)=0,\ f'(0)=1$ και $f''(x)-2f'(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)$.

Θέμα 9

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

$f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f(0)=1$ και $2f'(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{e^x}}$, $x\in\mathbb{R}$.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

iii. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1}.

Θέμα 10

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.
Αν ισχύουν οι σχέσεις $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=2$ και $f(x)\cdot f'(x)=x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, να βρείτε τη συνάρτηση $f(x)$.

Διαγώνισμα Ομάδα Α

Θέμα 1

Δίνεται η $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (**10 μονάδες**)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην $y = -3x + 21$. (**10 μονάδες**)

γ) Ένα σημείο κινείται στην ευθεία $y = -3x + 21$ και η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό 4 cm / sec . Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής της τεταγμένης του σημείου ; (**10 μονάδες**)

Θέμα 2

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = -2$ και $f'(x) = f(x) + e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{e^x} - x$ είναι σταθερή . (**10 μονάδες**)

β) Να βρείτε την f . (**10 μονάδες**)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (**10 μονάδες**)

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-4)^2 \cdot (x-1) + 1$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (**10 μονάδες**)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = 0$. (**10 μονάδες**)

Θέμα 4

α) Δίνεται $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$ και $f(\alpha) = f(\beta)$ για αριθμούς α, β $με$ $0 < \alpha < \beta$.

Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο. (**10 μονάδες**)

β) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = (x-4) \cdot (ln\, x - 2)$ παρουσιάζει ελάχιστο. (**10 μονάδες**)

(1) Έστω συνάρτηση f για την οποία ισχύει

$$f(x)+f'(x) = -x^3-3x^2-1 \quad \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}.$$

Το $O(0,0)$ είναι σημείο της C_f και

$$g(x) = e^x f(x) + e^x(x^3+1) \quad , \ x\in\mathbb{R}.$$

α) Να δείξετε ότι η g είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f.

γ) Να λύσετε την ανίσωση $f\left(1+f\left(e^x+x^{2017}-1\right)\right) < \frac{1}{e}-2$

(2) $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=2$ και

$$f'(x)-4 = \frac{3-xf(x)}{x^2} \quad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty)$$

α) Να βρείτε την f

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία (ε): $2y-4x+42=0$

(3) Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(1)=3$ και

$$x^3f'(x) = 2x^7\ln x + 3x^2f(x) + x^7 \quad \text{για κάθε } x\in(0,+\infty).$$

Να βρείτε την f.

(4) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(0) = 1$ και

$$f'(x) = 2f(x) - 2x + 1 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α) Να βρείτε τον τύπο της f

β) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μια ρίζα η οποία είναι αρνητική.

(5) $f''(x) = g''(x) + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$f'(1) - g'(1) = -3 \quad \text{και} \quad f(0) - g(0) = 6$$

Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από τη C_g

(6) $\big(f(x) + 2x\big)\big(f'(x) + 2\big) = 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$f(0) = 1$

α) Να βρείτε την f και την $g(x) = \big(f(x) + 2x\big)^2 - 2x$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $g(\xi)e^{\xi} = 2e$

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$g'(x_0) = \frac{2e - e^{\xi}}{\xi e^{\xi}}$$

Θέμα 1

Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .

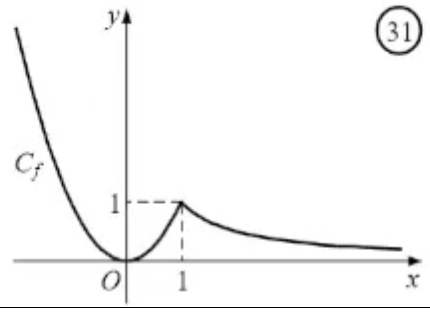
α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$.

γ) Δίνεται η $g(x) = f(x) - \frac{1}{2}$

Να αποδείξετε ότι η g έχει 3 ρίζες και η g' έχει μια ρίζα.

δ) Ένας μαθητής εφάρμοσε 2 φορές Θ. Rolle και ισχυρίστηκε ότι η g' έχει 2 ρίζες. Ποιο ήταν το λάθος του μαθητή;



Θέμα 2

Να αποδείξετε ότι :

Η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ αν } x \le 1 \\ \dfrac{1}{x} & , \text{ αν } x > 1 \end{cases}$$

παρουσιάζει:

i) στο $x = 0$ τοπικό ελάχιστο, το $f(0) = 0$, το οποίο είναι και ολικό ελάχιστο και

ii) στο $x = 1$ τοπικό μέγιστο, το $f(1) = 1$.

Η συνάρτηση f αν και παρουσιάζει τοπικό μέγιστο, εντούτοις δεν παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο.

Θέμα 3

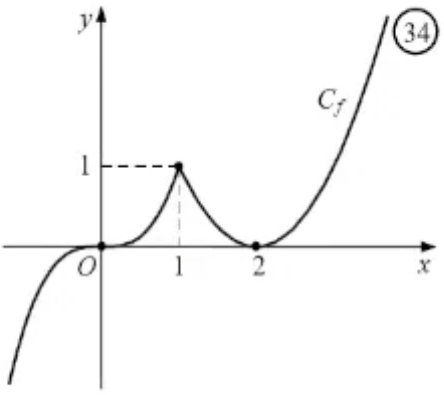
Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της f .

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \alpha$.

γ) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.

δ) Έχει η f τοπικό ακρότατο σε όλα τα κρίσιμα σημεία;



Θέμα 4

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \ x < 1 \\ (x-2)^2 & , \ x \ge 1 \end{cases}.$$

Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Θέμα 5

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x^3 + 2027$. Να μελετηθεί η συνάρτηση f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατά της.

Θέμα 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(\ln x - 1) + 1, x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να λύσετε την εξίσωση $x\ln x + 1 = x$.

Θέμα 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2,\ x \in [0,2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης.

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης.

Θέμα 8

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - 1 - \ln x$.

i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να αποδειχτεί ότι $\ln x \le x - 1$, για κάθε $x > 0$.

iii) Να αποδείξετε ότι $e^x \ge x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Θέμα 9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1}{\ln x},\ x \in (1, +\infty)$.

α) i. Να δείξετε ότι $f'(x) < 0$ με $x \in (1, +\infty)$.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης.

β)i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της f.

Θέμα 10

Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in (0,+\infty)$ ισχύει $x \leq a^{x-1}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Θέμα 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x$ και το σημείο $A(0,2)$.

Αν $K(x, \ln x)$ με $x > 0$ τυχαίο σημείο της C_f και $M(x_o, \ln x_o)$ με $x_o > 0$, το σημείο εκείνο της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A, να αποδείξετε ότι:

α) η απόσταση AK συναρτήσει του $x > 0$ είναι:

$$d(x) = \sqrt{x^2 + \ln^2 x - 4\ln x + 4}.$$

β) $x_o^2 + \ln x_o - 2 = 0$.

γ) η εφαπτομένη της C_f στο M

i. είναι κάθετη στην AM.

ii. τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $(x_o^3 - x_o, 0)$.

Θέμα 12

Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1.

Δίνεται επιπλέον ότι

- η συνάρτηση f' είναι συνεχής,
- $f(0) = -1$ και $f(2) = 1$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$.

γ)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα

ii. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_o \in (0,2)$.

δ) Αν g είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $g'(x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_o.

Θέμα 13

Παρατήρηση:

Ισχύει $\ln x \leq x-1$, για κάθε $x>0$.

Να αποδείξετε ότι $e^x \geq 1+x$, για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$.

Θέμα 14

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x)=2\ln x - x$ και η ευθεία $\varepsilon: y=x$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0,y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε, είναι $d(M,\varepsilon)=\sqrt{2}\,|x_0 - lnx_0|$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0,y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία $\varepsilon: y=x$, είναι $d(M,\varepsilon)=\sqrt{2}\,(x_0 - lnx_0)$.

β)

i. Να βρείτε το σημείο της C_f, το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε.

ii. Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση.

γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y=x$ και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης.

Θέμα 15

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση

$$f(x)=\sqrt[3]{(x-1)^2},\ x \in \mathbb{R}$$

Θέμα 16

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση:

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x-2)^2}, & x<2 \\ x^2-4x+4, & x \geq 2 \end{cases}$$

Θέμα 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & -2 \le x \le 0 \\ x^3 - 3x^2 + 1, & 0 < x \le 3 \end{cases}$

i. Να βρείτε τα **κρίσιμα σημεία** και τις **πιθανές θέσεις** των τοπικών ακροτάτων της f

ii. Να βρείτε τα **τοπικά ακρότατα** της f

iii. Να βρείτε το **σύνολο τιμών** της f

iv. Να βρείτε το **πλήθος των σημείων** στα οποία τέμνει η γραφική παράσταση της f τον άξονα x΄x.

Θέμα 18

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + e^{-x}, x \in \mathbb{R}$.

Να λύσετε την εξίσωση: $\mathbf{2 - f(x) = x^{2\kappa}},\ \kappa \in \mathbb{Z},\ \kappa \neq 0$

Θέμα 19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(\ln x - 1) + 1, x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να προσδιορίσετε το πρόσημο της f

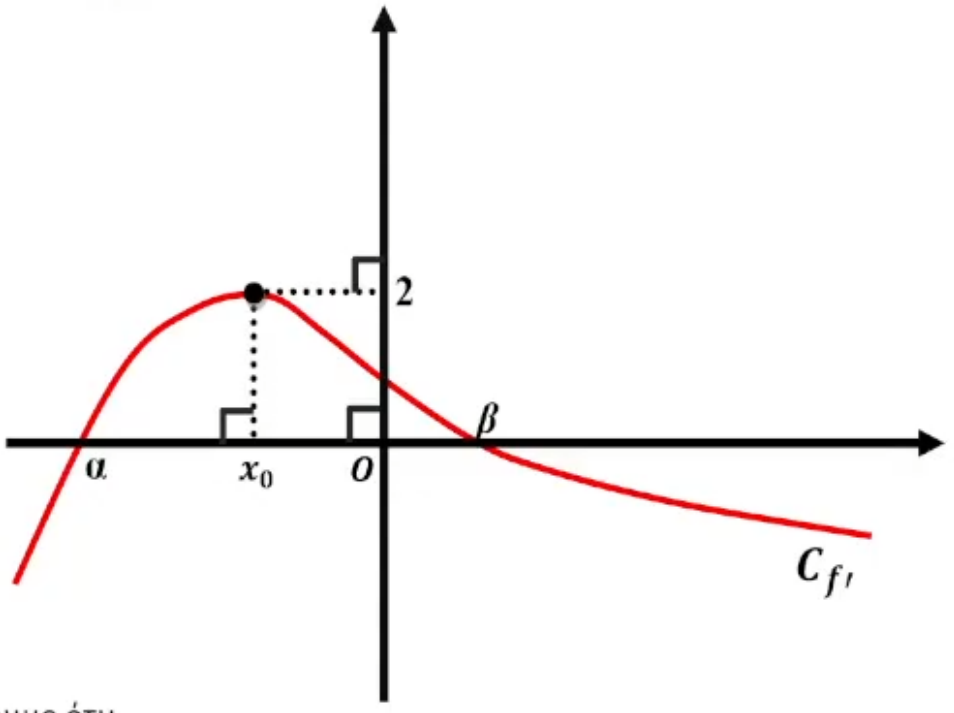
γ) Να λύσετε την εξίσωση $x \ln x + 1 = x$

δ) Να βρείτε τους θετικούς αριθμούς α και b αν ισχύει η σχέση

$$a\ln a + b\ln b + 2 \le a + b$$

Θέμα 20

Θεωρούμε συνάρτηση $f: R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.



Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$,
- τα a, β είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(a) < 0,\ f(\beta) > 0.$
- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες.

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$, ισχύει $f(x+1) - f(x) \leq 2$.

Ακρότατα από ΨΦ

Θέμα 1

Αν για κάθε $x>0$ ισχύει $\ln x+\frac{2\alpha}{x+1}\geq \alpha x^2$, να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{2}{5}$.

Θέμα 2

Αν για κάθε $x>0$ ισχύει $x^{\alpha}\leq \alpha^{x}$, όπου $0<\alpha\neq 1$, να αποδείξετε ότι $\alpha=e$.

Θέμα 3

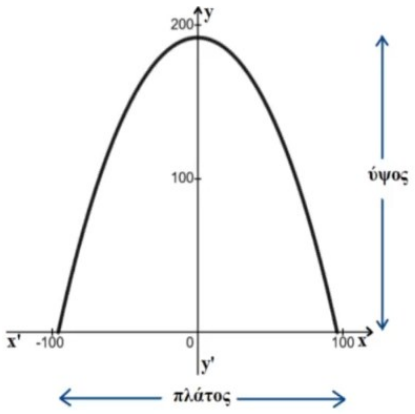
Δίνεται η συνάρτηση $g:[-96,96]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=e^{\frac{x}{96}}+e^{-\frac{x}{96}}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Αν $\alpha>0$ και $f(x)=2\alpha\left[g(96)-g(x)\right]$, $x\in[-96,96]$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(-96,96)$.

ii. Να προσδιορίσετε τον αριθμό α όταν επιπλέον, είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, παριστάνει την αψίδα του Σεντ Λούις η οποία έχει την ιδιότητα το πλάτος της να ισούται με το ύψος της.



Θέμα 4

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν $xf'(x)+2f(x)=\frac{1}{x^2}$ και $f(1)=0$.

i. Να δείξετε ότι $f(x)=\frac{\ln x}{x^2}$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

iii. Να δείξετε ότι $x^{2e}\leq e^{x^2}$, για κάθε $x>0$.

Θέμα 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\ln x+e^{x}$, $x>0$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,+\infty)$ στο οποίο η συνάρτηση f παρουσιάζει ελάχιστο.

β) Να δείξετε ότι $f(x_0)=(x_0-1)\ln x_0-1$, για το x_0 του προηγούμενου ερωτήματος.

Διαγώνισμα

Θέμα 1

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,4]\to\mathbb{R}$ με $f(x)=2\,ln\,x-\frac{1}{2}x^2+x$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (**5 μονάδες**)

β) Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα. (**5 μονάδες**)

γ) Να βρείτε το πλήθος των σημείων τομής της C_f με τον $x'x$. (**5 μονάδες**)

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{f(x)}=16e^{-5}$ (**5 μονάδες**)

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(x_0)\cdot ln\,x_0+\frac{f(x_0)}{x_0}=0$$ (**5 μονάδες**)

Θέμα 2

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f'(x)=e^x-x-2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

και $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-1}{x^{2025}}=\alpha\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=e^x-\frac{1}{2}x^2-2x$, $x\in\mathbb{R}$ (**5 μονάδες**)

β) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς μια εφαπτομένη της C_f η οποία σχηματίζει με τον x'x γωνία 135° και να βρείτε την εξίσωσή της. (**5 μονάδες**)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει εφαπτομένη της C_f παράλληλη στην $y=-2x+2025$ (**5 μονάδες**)

δ) Να δείξετε ότι η f έχει δυο θέσεις τοπικών ακροτάτων που ανήκουν στο $(-2,2)$. (**10 μονάδες**)

Θέμα 3

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\frac{1}{x}+x-ln^2\,x-2$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία. (**15 μονάδες**)

β) Έστω συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $\big(g(1)\big)^{21}+g(1)+2=0$.

Αν η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και ισχύει $g\left(\frac{1}{x}\right)=g(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ τότε:

i) Να μελετήσετε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (**5 μονάδες**)

ii) Να δείξετε ότι οι C_f και C_g δεν έχουν κοινά σημεία. (**5 μονάδες**)

Θέμα 4

α) Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f(1)=3$ και

$xf'(x)+f(x)=2x+1$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Να βρείτε την f. (**5 μονάδες**)

β) Ένα ορθογώνιο έχει πλευρές α,β με $\alpha=\frac{1}{x}$ και $\beta=x^2+x+1$.

i) Να υπολογίσετε τη μικρότερη τιμή για το εμβαδόν του ορθογωνίου. (**10 μονάδες**)

ii) Να δείξετε ότι η περίμετρος του ορθογωνίου μπορεί να γίνει μικρότερη από 8. (**10 μονάδες**)

ΤΕΣΤ στα Μαθηματικά Ομάδα Α

1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x + x - 1$
ως προς το πρόσημο.

2. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4 + 24x^2 + 4x - 40 = 0$
έχει το πολύ δυο ρίζες.

3. Έστω $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $x^\alpha \leq \alpha^x$.
Να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

4. Δίνεται $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1) = 2$ και
$x^2 f'(x) + 2x f(x) = e^{x-1}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.
Να βρείτε την f .

5. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $6f(2) = 2f(6)$.
Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2,6)$
τέτοιο ώστε : η εφαπτομένη της C_f στο σημείο
$A(\xi, f(\xi))$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

(1) $f:[1,4]\to\mathbb{R}$ $\quad f''(x)>0$ για κάθε $x\in(1,4)$

$f(2)=f'(1)=0$

Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο.

(2) Αν $f(x)f'(x)+x>-\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

και $f(0)=0$ να αποδείξετε ότι:

$(f(x))^2>-x^2-\eta\mu x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

(3) Αν f παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$

και $f^5(x)+f(x)=e^{3-x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

να λύσετε την ανίσωση $f(e^x+x^5)<f(1)$

(4) $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ $\quad f(\alpha)=f(\beta)=0$

και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$

Να δ. ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$

(5) $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με $f''(x)>0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$.

Αν $f'(f(\alpha))=f'(f(\beta))$ να δ. ότι $f'(\alpha)<0$.

Fermat

(1) Αν $\frac{\ln x}{\alpha} + \frac{1}{x} \geq 1$ για κάθε $x > 0$

να βρείτε το α.

(2) f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$

$f^3(x) + x f(x) = x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δ. ότι η f δεν έχει ακρότατα.

ΑΚΡΟΤΑΤΑ

(3) f παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$

$f^3(x) + f(x) = e^x - x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι $f(x) \geq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

(4) Η εξίσωση $x^3 - 12x + \alpha = 0$ έχει 3 ρίζες.

Να δ. ότι $\alpha \in (-16, 16)$

(5) $f(x) = e^{x-1} - \ln x + 1$

α) Να δείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) + f\left(x^{2017}\right) = 4$

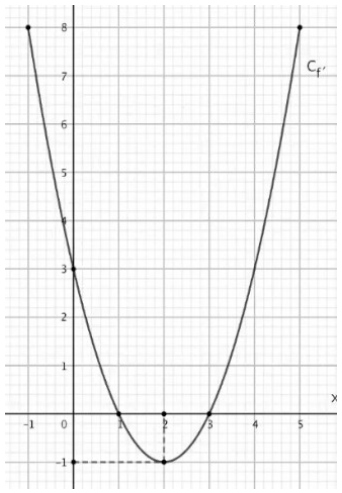
Παράδειγμα 1 (ΘΕΜΑ 26736-ΙΕΠ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ):

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1,5]$.

α) Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου f' είναι το σημείο $A(2,-1)$, με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[-1,2]$ και κυρτή στο $[2,5]$.

β) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_o = 2$;

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $3f(2) - 1 = 0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_o = 2$.



Παράδειγμα 2 (ΘΕΜΑ 31527-ΙΕΠ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ):

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 3x^2 - 8, x \in \mathbb{R}$.

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα.

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο $A(1, f(1))$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f, διαφορετικό από το Α, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην (ε).

Παράδειγμα 3

Αν f παραγωγίσιμη και κυρτή στο $\mathbb{R}$, $\alpha > 0$, να δείξετε ότι $f(x) < \frac{f(x-\alpha)+f(x+\alpha)}{2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 4:

Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$ και $g(x) = lnx$.

α) Να μελετήσετε τις συναρτήσεις αυτές ως προς την κυρτότητά τους.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της Α(0, f(0)) και να αποδείξετε ότι ισχύει $\boldsymbol{e^x \geq 1 + x}$, για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_g στο σημείο της Β(1, g(1)) και να αποδείξετε ότι ισχύει $\boldsymbol{\ln x \leq x - 1}$, για κάθε $\boldsymbol{x > 0}$.

Παράδειγμα 4 (ΘΕΜΑ 23531-ΙΕΠ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - lnx - 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0 \in (0,1)$ με $f(x_0) < 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)}$.

β') Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$ με $f(x_0) = \frac{1}{x_0} + x_0 - 3 < 0$.

Extra ερώτημα:

δ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = -1$ είναι αδύνατη.

ε) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της A(1, f(1)).

στ) Να αποδείξετε ότι $e^x - lnx > (e-1)x + 1$, για κάθε $x \in (0,1) \cup (1, +\infty)$.

Παράδειγμα 5 (ΘΕΜΑ 25745-ΙΕΠ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ)

Δίνεται συνάρτηση $f: [0,2] \to \mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν

$$f(1) = 1, f'(1) = 0, f(0) = f(2)$$

και

$$(f'(x))^2 + f(x) \cdot f''(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in (0,2)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,2)$.

ii. $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,2)$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων.

Παράδειγμα 1:

Δίνεται η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \eta\mu x}, x \in (0, 2\pi)$.

Α. Να εξετάσετε αν έχει σημεία καμπής.

Β. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

Γ. Τι συμπεραίνετε για την ύπαρξη σημείου καμπής σε καθεμιά από τις ακόλουθες περιπτώσεις;

i. Αν $x \in [0, 2\pi]$.

ii. Αν $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2:

Δίνεται η συνάρτηση $\boldsymbol{f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 9x - \gamma}, x \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε τα $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ώστε:

- η f να έχει σημείο καμπής στο $x = -1$,
- η f να έχει τοπικό ακρότατο στο $x = 1$,
- η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο $M(0, 2)$.

Παράδειγμα 3:

Δίνεται η συνάρτηση

$$\boldsymbol{f(x) = |x| + x^2}, x \in \mathbb{R}.$$

Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητά της και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Παράδειγμα 5:

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}\alpha x^3+\beta x, & x\leq 1\\ \dfrac{1}{x}, & x>1\end{cases}$$

i. Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x=1$.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

iii. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ και να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$f(x)>-x+2, \text{ για κάθε } x\in(1,+\infty).$$

iv. Να εξετάσετε αν η εφαπτομένη (ε) έχει και άλλο κοινό σημείο με τη C_f.

Κυρτότητα ΨΦ

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}-x$.

i. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $A(0,1)$.

ii. Να αποδείξετε ότι $e^{2x}\geq 2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Θέμα 2

Αν $f(x)=\ln\frac{1}{x}$ και $g(x)=x\ln\frac{1}{x}$ να αποδείξετε ότι :

i. Η γραφική παράσταση της f στρέφει τα κοίλα άνω ενώ η γραφική παράσταση της g στρέφει τα κοίλα κάτω.

ii. Οι γραφικές παραστάσεις των f,g έχουν μοναδικό κοινό σημείο στο οποίο έχουν κοινή εφαπτομένη.

iii. $x\ln\frac{1}{x}\leq 1-x\leq\ln\frac{1}{x}$, για κάθε $x>0$.

Θέμα 3

Αν η f είναι κυρτή και γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αποδείξτε ότι:

i. Υπάρχει $\xi\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)>0$.

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

Πρόταση που μπορούμε να χρησιμοποιούμε:

Έστω f,g δύο συναρτήσεις που είναι ορισμένες κοντά στο $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$.

i) Αν ισχύουν:

α) $f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

β) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=+\infty$,

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=+\infty$.

ii) Αν ισχύουν:

α) $f(x)\leq g(x)$ κοντά στο x_0 και

β) $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=-\infty$,

τότε θα ισχύει και $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$

ΚΥΡΤΟΤΗΤΑ

(1) Δίνεται συνάρτηση f με $f''(x)+4f'(x)+4f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=f'(0)=1$

α) Να δ.ο.τι η $g(x)=f(x)e^{2x}$ είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Να δ.ο.τι $f(x)\geq\dfrac{3x+1}{e^{2x}}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

(2) $f(x)=\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3+\alpha x^2+\alpha x+\alpha$

Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες η f είναι κυρτή σ' όλο το $\mathbb{R}$.

(3) f δυο φορές παραγωγίσιμη και κυρτή στο $(0,+\infty)$.

Να δ.ο.τι για κάθε $x>0$ ισχύει $f(x)+f(5x)>2f(3x)$.

De L' Hospital

(1) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x^3}$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x-1}$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x^2}$

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-e^x\right)$

(6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\ln x\right)$

(7) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^x\right)$

(8) $\lim\limits_{x\to0}\left(x^2\ln x\right)$

Ασύμπτωτες

(1) $f(x) = \dfrac{\alpha x + 4}{x - \beta}$

Να βρείτε τα α, β ώστε η C_f να έχει ασύμπτωτες τις ευθείες $x = 2$ και $y = 3$.

(2) $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Η ευθεία (ε): $y = x - 1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. Να βρείτε την f.

ΓΕΝΙΚΗ

$f^3(x) + f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και f παραγωγίσιμη.

α) Να βρείτε το σημείο τομής της C_f με τον $y'y$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς το πρόσημο.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη.

δ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα

ε) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x}{f(x) - x}$

στ) Να δ. ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει $f(x) - x f'(x) > 0$

Παράδειγμα 1:

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x-1}{x^3}$. Να υπολογιστεί το όριο $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.

Παράδειγμα 2 :

Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}$.

Παράδειγμα 3:

Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to 1}\frac{lnx}{1-x^2}$.

Παράδειγμα 4:

Να υπολογισθεί το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Παράδειγμα 9 (ΘΕΜΑ 24755-ΙΕΠ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ):

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1-\frac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$.

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$.

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0,f(0))$.

Παράδειγμα 10(ΘΕΜΑ 31746- ΙΕΠ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ):

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2-4x+6)e^x, x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(0,f(0))$.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x)\geq 2x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Παράδειγμα 5 (ΘΕΜΑ 33995,ΙΕΠ-ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ):

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=x-\dfrac{x-1}{x^2+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$.

β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της $\varepsilon: y=x$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι "$1-1$".

Παράδειγμα 8 (ΘΕΜΑ 25748, ΙΕΠ-ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ):

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon): y=3x-2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$

β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{xf(x)-3x^2}$.

Παράδειγμα 1:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2|x+1|-x+5}{x-1}$. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Παράδειγμα 2:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\frac{\eta\mu x}{x}, x\neq 0$.

Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$.

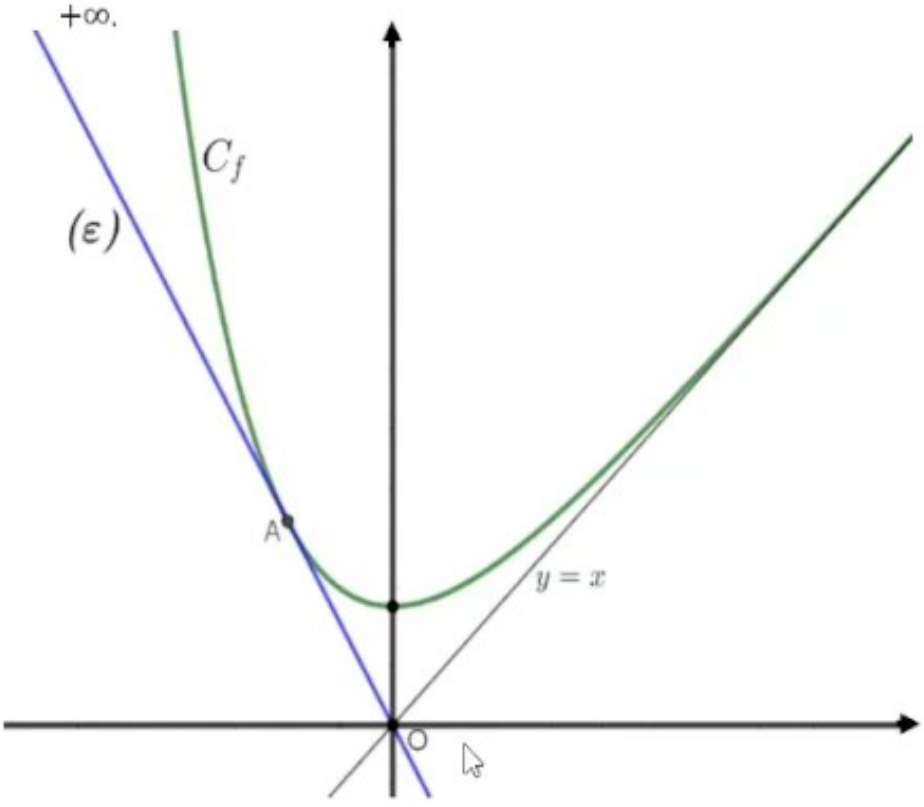
Παράδειγμα 3:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(\alpha-2)x^2+\beta x+5}{3x+\gamma}$. Να βρείτε τις τιμές των α, β, γ ώστε η γραφική παράσταση της f να έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x = 2$ και οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία $y = 4$.

Παράδειγμα 11 (ΘΕΜΑ 23530, ΙΕΠ-ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ):

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο R συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.



α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε).

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$.

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-x^2}{f(x)}$.

Παράδειγμα 4:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x - \ln(e^x - 1)$. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη και οριζόντια ασύμπτωτη.

Παράδειγμα 5:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{(1-e^{-x})\,lnx}{x-2}$.

i. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

ii. Αν η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη την ευθεία (ε), να δείξετε ότι η (ε) τέμνει τη C_f και να βρείτε το σημείο τομής.

Παράδειγμα 6: (4 – 24759, Τράπεζα Θεμάτων, ΙΕΠ)

Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει

$$f(x) \geq x^2 - x + 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

α)

i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες.

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq \frac{3}{4}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Αν επιπλέον $f(1) = 1$ και $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.

ii. η f δεν είναι κοίλη.

Παράδειγμα 2:

Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

Παράδειγμα 3: (2016)

ΘΕΜΑ Β. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, $x \in R$.

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f. ***(Μον. 6)***

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης. ***(Μον. 9)***

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f. ***(Μον. 7)***

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα **Β1,Β2,Β3** να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

(Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό) . ***(Μον. 3)***

Παράδειγμα 1:

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{1}{x}}-1, & x>0 \\ 1-e^{-\frac{1}{x}}, & x<0 \end{cases}$$

i. Να εξετάσετε την f ως προς τη συμμετρία της

ii. Να μελετήσετε την f για $x>0$.

iii. Να παραστήσετε γραφικά την f για κάθε $x \in \mathbb{R}-\{0\}$.

Παράδειγμα 1:

Να μελετήσετε τη συνάρτηση και να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0,2\pi]$.

Στη συνέχεια να παραστήσετε γραφικά την f για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 2:

(Άσκηση 3, σελ. 172, σχολικό βιβλίο, με προσθήκη ερωτήματος)

Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση

$f(x)=x+\eta\mu x$ στο διάστημα [-π, π].

❖ Να χαράξετε τη γραφική παράσταση για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε το πλήθος ριζών τις εξίσωσης $f(x)=\alpha$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα 3:

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{lnx}{x}$.

i. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f.

ii. Αν $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης: $lnx - ax = 0$.

Παράδειγμα 1 (Άσκηση 6 με παραλλαγή στο (iii) ερώτημα, Σχολικό Βιβλίο Β' Ομάδας, σελ.168,):

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x = 0 \\ (1 - e^{-x}) \ln x & , \quad x \in (0,1] \end{cases}$.

(i) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-e^{-x}}{x}$ και $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x$.

(ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

(iii) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Παράδειγμα 2 (Άσκηση 2, Σχολικό Βιβλίο, Γενικές Ασκήσεις Γ' Ομάδας, σελ.173):

Αν f, g είναι παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με $f(0) = g(0)$ και $f'(x) > g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι:

$$f(x) < g(x) \text{ στο } (-\infty, 0) \text{ και } f(x) > g(x) \text{ στο } (0, +\infty).$$

Παράδειγμα 3 (Άσκηση 1, Σχολικό Βιβλίο, Γενικές Ασκήσεις Γ' Ομάδας, σελ.173):

i) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x}$ και $g(x) = x^2 - 3x + 3$, $x \in (0, +\infty)$ έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $A(1,1)$.

ii) Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Παράδειγμα 6 (ΘΕΜΑ 31549, ΙΕΠ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ):

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{lnx}{x}, x>0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να αποδείξετε ότι $2022^{2023}>2023^{2022}$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής.

δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021,2022]$ και $[2022,2023]$ να αποδείξετε ότι $2f(2022)<f(2021)+f(2023)$.

Παράδειγμα 8 (ΘΕΜΑ 27084, ΙΕΠ-ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ):

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x+\frac{1}{x},\ \ x\in(0,+\infty)$$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f.

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

Παράδειγμα 9 (ΘΕΜΑ 4-31793, ΙΕΠ ΤΡΑΠΕΖΑ ΘΕΜΑΤΩΝ):

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=lnx+1-\frac{1}{x}, x>0$ και $g(x)=\ln(lnx)$, $x>1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα την $x=1$.

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $T(e,g(e))$. Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη της (ε).

γ) Υποθέτουμε ότι $g(x)<f(x)$ για κάθε $x>1$. Ένα σημείο $M(x,0)$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $2\ cm/sec$ πάνω στον θετικό ημιάξονα, προς τα δεξιά. Θεωρούμε τα σημεία $B\big(x,f(x)\big)$, $\Gamma(x,g(x))$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $OB\Gamma$ τη χρονική στιγμή που το M βρίσκεται στη θέση $(e^2,0)$.

Ασύμπτωτες και DLH ΨΦ

Θέμα 1

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και ευθεία $y=2x+1$ πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x+1}{xf(x)-2x^2}$.

Θέμα 2

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+1}{e^x}, & x\le 0\\ \dfrac{x^2-1}{x}, & x>0\end{cases}$

Θέμα 3

Αν η ευθεία $y=5x-4$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης C_f της συνάρτησης $f(x)$ στο $+\infty$ να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-5x\right)$ και στη συνέχεια να βρείτε τον αριθμό $\alpha\in\mathbb{R}$ έτσι ώστε $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\alpha f(x)+6x}{xf(x)-5x^2+7x}=-3$.

Θέμα 4

Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια :

i. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}$

ii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^2}$

iii. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{e^x}$

iv) Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:

$\lim\limits_{x\to0^+}(x\cdot\ln x)$

v) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$, με $f(x)=e^x(2-x^2)$

Θέμα 5

i) Να υπολογίσετε το παρακάτω όριο:

$\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln x-x)$

ii) Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, με $f(x)=\sqrt{x+1}-\ln(x+1)$

Θέμα 6

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, με $f(x)=\left(x^2+5\right)^{\frac{1}{x}}$

Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$ με $f(x)=(\varepsilon\phi x)^{\eta\mu x}$.

Μελέτη και χάραξη ΨΦ

Θέμα 1

Να κάνετε μελέτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=\dfrac{x^2-x+4}{x-1}$

Θέμα 2

Να μελετήσετε και να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$f(x)=\ln(x+1)-x+\frac{x^2}{2}$$

Διαγώνισμα Μαθηματικών Ομάδα Α

Θέμα 1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{-x^2+2x-2}{x-1}$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f .

δ) Σχεδιάστε μια πρόχειρη γραφική παράσταση που να φαίνονται τα παραπάνω.

Θέμα 2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

Θέμα 3

Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) + f(x) < f(x+1)$ για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$.

β) Αν $f'(21) = 0$ και $f(21) = 3$, να δείξετε ότι :

$f(x) \cdot f(x+1) > 9$ για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$.

Θέμα 4

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{e}{2}x^2 + x - 1$

ως προς το πρόσημο.

Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x) > 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2. Θεωρήστε τον παρακάτω ισχυρισμό:
«Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής στο x_0, είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.»

α. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό γράφοντας στο τετράδιό σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής. (μονάδα 1)

β. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας στο ερώτημα **α**. (μονάδες 3)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε ζεύγος συναρτήσεων $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$.

β) Αν f, g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού A, B αντίστοιχα, τότε η $g\circ f$ ορίζεται αν $f(A)\cap B\neq\varnothing$.

γ) Για κάθε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που είναι παραγωγίσιμη και δεν παρουσιάζει ακρότατα, ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

δ) Αν $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty}\alpha^x=+\infty$.

ε) Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x-\frac{4}{x^2}$, $x\in\mathbb{R}-\{0\}$.

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα.

Μονάδες 8

Β2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής.

Μονάδες 4

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα παραπάνω ερωτήματα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.
(**Η γραφική παράσταση να σχεδιαστεί με στυλό με μελάνι που δε σβήνει.**)

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2}-x^2-1=0$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που ικανοποιούν την σχέση $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$, $x\in\mathbb{R}$, να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος **Γ3**, να λυθεί η εξίσωση:

$$f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$$

όταν $x\in[0,+\infty)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x^2+1}+x,\ x\in\mathbb{R}$

1. Να δείξετε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

2. Να βρείτε τη μονοτονία της συνάρτησης f στο $[0,+\infty)$.

Μονάδες 3

3. Να δείξετε ότι $f(-x)=\dfrac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 2) και ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ (Μονάδες 5).

Μονάδες 7

4. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $\left(\sqrt{\alpha^2+1}+\alpha\right)\left(\sqrt{\beta^2+1}+\beta\right)=1$ να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=0$.

Μονάδες 5

5. Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Καλή επιτυχία !!!

Θέμα 1

Να βρείτε την παράγωγο της $f(x)=x^2+1$ στο σημείο $x_0=0$.

Θέμα 2

Να βρείτε αν υπάρχει την παράγωγο της $f(x)=\sqrt{x-2}$ στο σημείο $x_0=2$.

Θέμα 3

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x<0\\ x^3, x\geq 0\end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο x_0=0.

Θέμα 4

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2-x+2, x\leq 1\\ 2x^2-3x+3, x>1\end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

Θέμα 5

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\eta\mu(x-1), x\leq 1\\ \sqrt{x+3}-2, x>1\end{cases}$ είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

Θέμα 6

Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x)=|x-1|+3$, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

Θέμα 7

Να βρεθούν οι τιμές των παραμέτρων α και β ώστε η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^2+\alpha x+\beta, x\leq 1\\ 2\alpha x+2\beta-4, 1<x\end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο σημείο $x_0=1$.

Θέμα 8

Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει : $2x^2+5x+3\leq f(x)\leq 3x^2+3x+4$ να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης f στο σημείο $x_0=1$.

Θέμα 9

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x}{\sqrt{x}-1}=4$.

i. Να βρείτε το $f(1)$ ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ και να βρείτε το $f'(1)$.

Θέμα 10

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-x^2+3x-3}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ να βρείτε το $f'(1)$.

Θέμα 11

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 να δείξετε ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-2h)}{h}=3f'(x_0)$.

Θέμα 12

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη στο 0, για την οποία ισχύει : $f^3(x)+x^2f(x)=2x^2\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε : i. το $f(0)$ και ii. το $f'(0)$.

Θέμα 13

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=\alpha$ και για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ είναι $f(x+y)=f(x)\cdot f(y)$ (1) με $f(0)\neq 0$, να δείξετε ότι $f'(x_0)=\alpha f(x_0)$ για κάθε $x_0\neq 0$.

Θέμα 14

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=2005$.

i. Να δείξετε ότι $f(0)=0$.

ii. Να δείξετε ότι $f'(0)=1$.

iii. Να βρείτε το $\lambda\in\mathbb{R}$ έτσι, ώστε : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+\lambda\left(f(x)\right)^2}{2x^2+\left(f(x)\right)^2}=3$.

Θέμα 15

Αν για μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει : $x^2+3x\le f(x)\le 2x^2-x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε το $f'(2)$.

Θέμα 16

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x) = 4x + 5$

ii. $f(x) = x^2 + 5x + 2013$

iii. $f(x) = 7x^3 + 5x^2 - 3x + 1$

iv. $f(x) = 3e^x + 9$

v. $f(x) = 2\ln x + 5x + \frac{1}{x}$

Θέμα 17

Να βρείτε την παράγωγο των παρακάτω συναρτήσεων.

i. $f(x) = 2x^3 \cdot \ln x$

ii. $f(x) = (3x^2 + 5x)(2x + 7)$

Θέμα 18

Να βρείτε την παράγωγο της παρακάτω συνάρτησης : $f(x) = \begin{cases} x^2 - x & , x \le 2 \\ x^3 - 2x^2 - x + 4 & , x > 2 \end{cases}$

Θέμα 19

Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων :

i. $f(x) = \frac{3x+2}{2x-3}$ ii. $f(x) = \frac{\eta\mu x}{x}$ iii. $f(x) = \frac{x^2+10}{x-1}$

Θέμα 20

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \sqrt{3x+1}$

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 3x + 5}$

iii. $f(x) = \sqrt{x \cdot e^x}$

Θέμα 21

Να βρείτε τις παραγώγους των παρακάτω συναρτήσεων

i. $f(x) = e^{2x+2}$

ii. $f(x) = e^{x^2+x}$

iii. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+5x-1}}$

iv. $f(x) = e^{-2x} \cdot (x^2 + 1)$

Θέμα 22

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

i. $f(x) = x^{\ln x}$

ii. $f(x) = 2^{5x-3}$

Θέμα 23

Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων

i. $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

ii. $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$

Θέμα 24

Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)$.

Θέμα 25

Να βρεθεί πολυώνυμο $\mathrm{P}(x)$ τέτοιο ώστε $\mathrm{P}(1) = 0$ και για κάθε $x \in \Re$ να είναι $[\mathrm{P}'(x)]^2 = 4\mathrm{P}(x)$.

Θέμα 26

Δίνεται **παραγωγίσιμη** συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2xf(x) = 4x^2 + 8$ για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε τις τιμές $f(0)$ και $f'(0)$.

Θέμα 27

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 3x + 2$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

ii. Να βρείτε την $\left(f^{-1}\right)'(3)$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Θέμα 28

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $f^3(x) - 2f(x) = 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές $f(1)$ και $f'(1)$.

Θέμα 29

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - x + 5$, $x \in \Re$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(2, f(2))$.

Θέμα 30

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)-2xf(x)=4x^2+8$ για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$.

Θέμα 31

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x^3-3x+2, x\le 2\\ x^2+5x-10, x>2\end{cases}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(2,f(2))$.

Θέμα 32

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}x^2+ax, x\le 2\\ x^3+2ax^2-x+4, x>2\end{cases}$ $\alpha\in\mathbb{R}$

i. Να βρείτε το α
ii. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(2,f(2))$.

Θέμα 33

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση : $f(x)=\begin{cases}x^2+ax+\beta, x\le 1\\ 2ax+2\beta-5, x>1\end{cases}$ $a,\beta\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $M(1,f(1))$.

Θέμα 34

Δίνεται η παραγωγίσημη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα : $f(x^3+x+1)=7x^3-x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι $f'(3)=5$ και στη συνέχεια να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(3,f(3))$.

Θέμα 35

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $2x^2-3x+1\le f(x)\le 3x^2-9x+10$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι για τη C_f ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(3,f(3))$, της οποίας και να βρείτε την εξίσωση.

Θέμα 36

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν : $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1-3h)}{h}=8$ και $f(1)=3$. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο $x_0=1$.

Θέμα 37

Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)-x^2}{\sqrt{x+2}-2}=-4$. Να αποδείξετε ότι για τη C_f ορίζεται εφαπτομένη στο σημείο της $A(2,f(2))$ της οποίας να βρείτε την εξίσωση.

Θέμα 38

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^2+\dfrac{\beta}{x}$. Έστω ότι η C_f διέρχεται από το σημείο A(-2,-5) και η εφαπτομένη της f στο A σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\omega=\dfrac{3\pi}{4}$.

i. Να βρείτε τα α,β.

ii. Για $\alpha=-\dfrac{1}{4}$ και $\beta=8$ να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης της f΄(x) στο σημείο $B\left(-1,f'(-1)\right)$.

Θέμα 39

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^2+3x$, $x\in\mathbb{R}$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f που

i. Έχει συντελεστή διεύθυνσης 5
ii. Είναι παράλληλη στην ευθεία $(\zeta):y=x+5$
iii. Είναι κάθετη στην ευθεία $(\eta):x-3y+12=0$
iv. Είναι παράλληλη στον άξονα x΄x
v. Σχηματίζει γωνία με τον άξονα x΄x 45^0.

Θέμα 40

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2x}{3x-1}$. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της f στα οποία οι εφαπτομένες είναι παράλληλες στην ευθεία $(\zeta):y=-2x-1$. Στη συνέχεια να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων.

Θέμα 41

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ σε οποιοδήποτε σημείο της σχηματίζει με τον άξονα x΄x αμβλεία γωνία.

Θέμα 42

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=3x^2-5x+2$ που διέρχονται από το σημείο A(3,2).

Θέμα 43

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της καμπύλης της συνάρτησης $f(x)=x^2+1$ που διέρχονται από την αρχή των αξόνων.

Θέμα 44

Αν η ευθεία $y = 6x - 2$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 - \alpha x + \beta$ στο σημείο $\mathrm{M}(2, f(2))$,

i. Να βρείτε τα α,β.

ii. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 4$ εφάπτεται στη C_f.

Θέμα 45

Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\eta): x - 2y = 0$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 3}$

Θέμα 46

Αν η ευθεία $y = 2\alpha x - \beta$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x$ στο σημείο $\mathrm{M}(1, f(1))$, να βρείτε τα α,β.

Θέμα 47

Αν η ευθεία $y = 2x - 1$ εφάπτεται στην καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^3 - \beta x - 2$ στο σημείο $\mathrm{M}(-1, f(-1))$, να βρείτε τα α,β.

Θέμα 48

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha \ln x + \beta x^2$ και $g(x) = x^2 + 2\beta x + \alpha$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τις τιμές των α,β ώστε οι C_f, C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

Θέμα 49

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x + 4$ και $g(x) = x^2 - 7x + 16$. Να βρεθούν οι κοινές εφαπτομένες των C_f, C_g.

Θέμα 50

Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = e^x + x^2 - x$ στο σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$, να είναι κάθετη στην ευθεία : $(\zeta): x + y + 2017 = 0$.

Θέμα 51

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + 3x + 2$.

i. Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο $x_0 = 3$, αν θεωρήσουμε γνωστό ότι η f^{-1} είναι παραγωγίσιμη.

Θέμα 52

Να υπολογιστούν τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x^2-1}$ ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\eta\mu x}{x^3}$ iii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu 4x+\eta\mu 2x}{\eta\mu 5x-\eta\mu 2x}$ iv) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\eta\mu x-x^2-x}{x^3-x^2}$

Θέμα 53

Να υπολογιστούν τα όρια :

i) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+e^x}{x^2+e^x}$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{6x+\ln x}{3x+\ln x}$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+\ln x}{e^x}$ iv) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+\ln x}{x}$

Θέμα 54

Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln x)$ ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2\ln x)$ iii) $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x(2-x^2)$

Θέμα 55

Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-x)$ ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln(x+1)-x\right]$ iii) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x-\ln x)$

Θέμα 56

Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$ ii) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)$

Θέμα 57

Να υπολογιστούν τα όρια : i) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^x$ ii) $\lim\limits_{x\to 0^+}x^{\eta\mu x}$

Θέμα 58

Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων Α(4,0) και Β(0,x) ως προς x, όταν x=3.

Θέμα 59

Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις $x(t)=3t^2+9t$ και $y(t)=6t+18$, όπου t ο χρόνος σε sec. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του ορθογωνίου, τη χρονική στιγμή που γίνεται τετράγωνο.

Θέμα 60

Ένα κινητό Μ κινείται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=e^{x-1}+\ln x,\ y\geq 0$, έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνει με ρυθμό $2\,m/\min$. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου Μ, τη χρονική στιγμή που η τεταγμένη του είναι ίση με 1.

Θέμα 61

Να εξετάσετε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις ικανοποιούν τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα που αναφέρεται, και στη συνέχεια, για εκείνες που ισχύει, να βρείτε όλα τα $\xi \in (\alpha, \beta)$ για τα οποία ισχύει $f'(\xi) = 0$.

i. $f(x) = x^2 - 6x + 2$, $[-1,7]$

ii. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 3 & , x < 1 \\ 8x - 2x^2 & , x \geq 1 \end{cases}$ $[-3,3]$

Θέμα 62

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x - \alpha}$ $\alpha \in \Re$ και $\alpha > 2$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον x΄x .

Θέμα 63

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = xe^{x-1} + ax^2 - (a+1)x$, με $x, a \in \Re$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (0,1)

Θέμα 64

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \eta\mu x \cdot \ln(3 - x) + x^3 - 4x + 5$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $\mathrm{M}(\xi, f(\xi))$, με $\xi \in (0,2)$, στο οποίο η γραφική παράσταση της f έχει εφαπτομένη παράλληλη στον άξονα x΄x.

Θέμα 65

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x^2 + \beta x, -1 \leq x < 0 \\ x^3 + \gamma, 0 \leq x < 1 \end{cases}$. Να βρείτε τα α,β,γ ώστε για την f να ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο [-1,1].

Θέμα 66

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-2)\ln x$. Να δείξετε ότι :

i. Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $\mathrm{A}(\xi, f(\xi))$, να είναι παράλληλη στον χ'χ. (η εξίσωση f ΄(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (1,2)).

ii. Η εξίσωση $x^x = e^{2-x}$ έχει μια τουλάχιστον λύση στο (1,2).

Θέμα 67

Αν $\alpha^2 + \alpha = \beta$, να δείξετε ότι υπάρχει στο διάστημα (-1,1) σημείο x_0 τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f, όπου $f(x) = (\alpha^2 - \beta)x^3 + (\beta^2 - \alpha)x^2 + \alpha x + \beta$ στο σημείο με τετμημένη x_0 είναι παράλληλη στον άξονα των x΄x.

Θέμα 68

Να δείξετε ότι η εξίσωση : $4x^3+3x^2-8x=4$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(-1,2)$.

Θέμα 69

Αν $8\alpha+3\beta=0$ να δείξετε ότι η εξίσωση : $4\alpha x^3+3(2\alpha+\beta)x^2+2(2\beta+\alpha)x=\beta$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,2)

Θέμα 70

Να δείξετε ότι η εξίσωση $4x^3-3\alpha x^2=2(\alpha+8)x-4\alpha$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (-2,2)

Θέμα 71

Δίνεται μια συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με $f(2)-f(1)=\ln 2$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $\xi f'(\xi)=2\xi^2-3\xi+1$.

Θέμα 72

Έστω η συνάρτηση f συνεχής στο [0,1] και παραγωγίσιμη στο (0,1) με $f(0)=2f(1)$. Να δείξετε η εξίσωση $f'(x)=-\dfrac{2x}{x^2+1}\cdot f(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

Θέμα 73

Έστω μια συνάρτηση f, συνεχής στο [2,3], παραγωγίσιμη στο (2,3) με $f(3)=2f(2)$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(2,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $\mathrm{M}(\xi,f(\xi))$ να διέρχεται από το σημείο Α(1,0).

Θέμα 74

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:[1,e]\to\Re$ η όποια είναι και παραγωγίσιμη στο (1,e). Αν $f(e)=0$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,e)$ τέτοιο ώστε $\xi\cdot f'(\xi)\cdot\ln\xi=-f(\xi)$

Θέμα 75

Αν η συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2) με $f(2)-f(1)=3-\ln 2$, να δείξετε ότι υπάρχει ένα $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $x_0\cdot f'(x_0)=2x_0^2-1$.

Θέμα 76

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει ότι : $f(1)-f(0)=e$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση : $f'(x)-2x=e^x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,1).

Θέμα 77

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2), με $f(2)=2$ και $f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=\frac{f(x)}{x}$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

Θέμα 78

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο [1,2] και παραγωγίσιμη στο (1,2), με $f(2)=2$ και $f(1)=1$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)\cdot f(x)=x$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο (1,2).

Θέμα 79

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με $f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+xf'(x)=0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0,2).

Θέμα 80

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(1)=f(2)=0$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=-3f(\xi)$.

Θέμα 81

Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και ισχύει $f(\alpha)=f(\beta)=0$, να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε :

i. $f'(\xi)+f(\xi)=0$
ii. $f'(\xi)-f(\xi)=0$
iii. $f'(\xi)+2f(\xi)=0$

Θέμα 82

Δίνεται μια συνάρτηση f με $f'(x)\neq 2x-3$ για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x^2-3x+\alpha$ έχει το πολύ μια πραγματική ρίζα.

Θέμα 83

Έστω $f:\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει : $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και αντιστρέψιμη.
ii. Να λύσετε την εξίσωση : $f(x^2-3x+1)-f(2x-5)=0$.

Θέμα 84

Να δειχθεί ότι εξίσωση : $x^6+x^2=ax+\beta$ με $\alpha,\beta\in\Re$ έχει το πολύ δυο ρίζες στο $\Re$.

Θέμα 85

Αν για τη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ ισχύει $f^2(x)+4f(x)-2x=e^x-3$ για κάθε $x\in(1,+\infty)$ και είναι παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x΄x το πολύ σε ένα σημείο.

Θέμα 86

Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ παραγωγίσιμη με $f'(x)<1$ και $1<f(x)<3$ για κάθε $x\in\Re$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=e^{x_0}+x_0$.

Θέμα 87

Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη για την όποια ισχύει ότι $f(-1)=f(0)=f(1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

Θέμα 88

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

ii. Αν η γραφική παράσταση της f^{-1} διέρχεται από τα σημεία $A(6,1)$ και $B(2,3)$, τότε να λύσετε την εξίσωση : $f^{-1}\left(4+f(x^2-1)\right)=1$.

iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $\dfrac{f(\xi)}{f'(\xi)}=-\xi$.

Θέμα 89

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ με $x\in[0,4]$.

i. Να δείξετε ότι η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0,4]$

ii. Να βρείτε το $\xi\in(0,4)$

Θέμα 90

Έστω $f:[0,1]\to\Re$ παραγωγίσιμη συνάρτηση, με $f(0)=2$, $f(1)=4$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(0,1)$, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(x_1,f(x_1))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία y=2x+2000.

Θέμα 91

Έστω $f:\Re\to\Re$ μια συνάρτηση, η οποία είναι παραγωγίσιμη και η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(-1,2)$ και $B(1,3)$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο Μ της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι κάθετη στην ευθεία $(\varepsilon):2x+y-3=0$.

Θέμα 92

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(4)=f(1)+3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει σημείο $M(\xi,f(\xi))$, με $\xi\in(1,4)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{4}$ με τον άξονα x΄x.

Θέμα 93

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(\alpha)=2\beta+6\alpha$ και $f(\beta)=5\beta+3\alpha$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=3$.

Θέμα 94

Έστω μια συνάρτηση $f:[1,3]\to\Re$ η οποία είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα. Αν η f έχει σύνολο τιμών το [0,2] και είναι παραγωγίσιμη στο (1,3), να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=-2$.

Θέμα 95

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $[0,5]$, παραγωγίσιμη στο $(0,5)$ και ισχύει $f(5)=f(0)+1$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,5)$ τέτοια ώστε $2f'(\xi_1)+3f'(\xi_2)=1$

Θέμα 96

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο $[\alpha,\beta]$ να δείξετε ότι υπάρχουν ξ_1 , $\xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $3f'(\xi_1)+2f'(\xi_2)=0$.

Θέμα 97

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(1)=2$, $f(2)=4$ και $f(4)=3$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δυο τουλάχιστον ξ_1, $\xi_2\in(1,4)$ διαφορετικά μεταξύ τους, ώστε οι εφαπτομένες της C_f στα σημεία $A(\xi_1,f(\xi_1))$ και $B(\xi_2,f(\xi_2))$ να είναι μεταξύ τους κάθετες.

Θέμα 98

Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(1)=f(3)=0$ και $f(2)>0$. Να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχουν ξ_1, $\xi_2\in(1,3)$ με $\xi_1<\xi_2$, ώστε $f'(\xi_1)+f'(\xi_2)=0$
ii. Υπάρχει $\xi\in(1,3)$ ώστε $f''(\xi)<0$.

Θέμα 99

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν οι υποθέσεις του Θ. Rolle στο [0,3] να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(0,3)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)+2f'(\xi_2)=0$

Θέμα 100

Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\Re$, η οποία είναι συνεχής στο [α,β], παραγωγίσιμη στο (α,β) και ισχύει $f(\alpha)=2\beta$ και $f(\beta)=2\alpha$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η εξίσωση $f(x)=2x$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α,β)

ii. Υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=4$.

Θέμα 101

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[\alpha,2\alpha]\to\Re$, με α>0 για την οποία ισχύει $f(\alpha)=\alpha$ και $f(2\alpha)=2\alpha$. Να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχει $x_0\in(\alpha,2\alpha)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=3\alpha-x_0$

ii. Υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2\in(\alpha,2\alpha)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2)=1$.

Θέμα 102

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, για την οποία ισχύει $f(1)=2$ και $f(3)=8$. Να αποδείξετε ότι :

i. Υπάρχει $x_0\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=6$

ii. Υπάρχουν $\xi_1,\ \xi_2\in(1,3)$ διαφορετικά μεταξύ τους τέτοια ώστε $\dfrac{2}{f'(\xi_1)}+\dfrac{1}{f'(\xi_2)}=1$.

Θέμα 103

Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα [α,β] που έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο στο (α,β). Αν ισχύει f(α)=f(β)=0 και υπάρχουν αριθμοί γ∈(α,β), δ∈(α,β), έτσι ώστε f(γ)·f(δ)<0, να αποδείξετε ότι:

i. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x)=0 στο διάστημα (α,β).

ii. Υπάρχουν σημεία $\xi_1, \xi_2 \in (\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f''(\xi_1)>0$ και $f''(\xi_2)<0$.

iii. Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f''(\xi)=0$.

Θέμα 104

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο [3,5] και ισχύουν f(3)=4 και $2\le f'(x)\le 3$ για κάθε $x\in\Re$ να δειχθεί ότι ισχύει η ανισότητα $8\le f(5)\le 10$.

Θέμα 105

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}x\ln x & ,x>0\\ 0 & ,x=0\end{cases}$. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>0$ ισχύει : $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$.

Θέμα 106

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο R. Να δείξετε ότι $f(x+1)-f(x)<f'(x)<f(x)-f(x-1)$ για κάθε $x\in\Re$.

Θέμα 107

Να αποδείξετε ότι: $\ln(x+1)-\ln x<\frac{1}{x}, x>0$.

Θέμα 108

Αν $\alpha<\beta$ με $\alpha,\beta\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, να δείξετε ότι $(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\beta<\eta\mu\beta-\eta\mu\alpha<(\beta-\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$.

Θέμα 109

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο [1,7] και παραγωγίσιμη στο (1,7). Αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο (1,7) να δείξετε ότι $f(1)+f(7)>f(3)+f(5)$ για κάθε $x\in\Re$.

Θέμα 110

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη στο R και η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Αν ισχύει $f(0)=0$ να δείξετε ότι $f'(x)<\frac{f(x)}{x}$ για κάθε x>0.

Θέμα 111

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο IR με f΄(x)≠0 για κάθε x ∈ IR .

i. Να δείξετε ότι η f είναι "1-1".
ii. Αν η γραφική παράσταση C_f της f διέρχεται από τα σημεία A(1,2005) και B(-2,1), να λύσετε την εξίσωση $f^{-1}\left(-2004+f(x^2-8)\right)=-2$.
iii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο M της C_f, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι κάθετη στην ευθεία (ε): $y=-\frac{1}{668}x+2005$.

Θέμα 112

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, για την οποία ισχύει $2f(x)-2x\le f(4)+f(-4)$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(4)-f(-4)=8$
ii. υπάρχει σημείο $M(\xi,f(\xi))$ με $\xi\in(-4,4)$, στο οποίο η εφαπτομένη της C_f να είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon):y=x+2012$
iii. υπάρχει $x_0\in(-4,4)$ ώστε $f(x_0)=f(-4)+4$
iv. υπάρχουν $x_1, x_2\in(-4,4)$, ώστε $\frac{1}{f'(x_1)}+\frac{1}{f'(x_2)}=2$.

Θέμα 113

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει $f(4)=3$ και : $xf'(x)=3x-2f(x)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^2f(x)-x^3$ είναι σταθερή στο $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

Θέμα 114

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει : $\frac{f'(x)}{2}=\frac{f(x)}{x}$ για κάθε x>0.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x^2}$, x>0 , είναι σταθερή.

ii. Αν $f(1)=2$ να βρείτε τον τύπο της f.

Θέμα 115

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta\to\Re$ αν ισχύει : $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}$ όταν $x\in\Delta=(0,+\infty)$ και $f(1)=3$.

Θέμα 116

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta\to\Re$ αν ισχύει : $x\cdot f'(x)\cdot\ln x+f(x)=2x^2$ $x\in\Delta=(1,+\infty)$ και $f(e)=e^2$

Θέμα 117

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f:\Delta\to\Re$ σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις :

i. $(1+x^2)\cdot f'(x)=2x\cdot f(x)$ $x\in\Delta=(0,+\infty)$ και $f(1)=1$

ii. $x\cdot f'(x)-f(x)=2x^3$ $x\in\Delta=(0,+\infty)$ και $f(1)=1$

Θέμα 118

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση : $2f'(x)=e^{x-f(x)}$ για κάθε $x\in\Re$ και $f(0)=0$. Να δειχθεί ότι : $f(x)=\ln\left(\frac{1+e^x}{2}\right)$.

Θέμα 119

Έστω μια συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(x)\cdot f'(x)-\eta\mu x=0$ για κάθε $x\in\Re$. Αν $f(0)=-\sqrt{2}$, να βρείτε τον τύπο της f .

Θέμα 120

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο IR τέτοια, ώστε να ισχύει η σχέση : $f'(x) = 4x^3 e^{-f(x)}$ για κάθε $x \in \Re$ και $f(1) = \ln 3$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Θέμα 121

Έστω μια συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $f'(3x-1) = 2x+1$. Αν f(2)=5 , να βρείτε τον τύπο της f .

Θέμα 122

Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to (0,+\infty)$ παραγωγίσιμη, με $f(0) = 1$. Αν ισχύει : $f'(x) = 2xf(x)$ να βρείτε τον τύπο της f.

Θέμα 123

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει $f(0) = 3$ και : $f'(x) - x^3 = f(x) - 3x^2$ για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Θέμα 124

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο R με $f''(x) = f(x)$ για κάθε $x \in \Re$, $f(0) = 1$ και $f'(0) = 0$. Να αποδείξετε ότι :

i. Η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f'(x) + f(x)}{e^x}$ είναι σταθερή,

ii. $\left(f(x)e^x\right)' = e^{2x}$ για κάθε $x \in \Re$,

iii. ο τύπος της f είναι $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Θέμα 125

Δίνεται συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο, για την οποία ισχύει $f(0) = 2f'(0) = 1$ και : $f''(x)f(x) + \left(f'(x)\right)^2 = f(x)f'(x)$ για κάθε $x \in \Re$. Να βρείτε τον τύπο της f.

Θέμα 126

Δίνεται η συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\Re$, με $f'(0) = f(0) = 0$, η οποία ικανοποιεί τη σχέση: $e^x\left(f'(x) + f''(x) - 1\right) = f'(x) + xf''(x)$ για κάθε $x \in \Re$. Να αποδείξετε ότι : $f(x) = \ln\left(e^x - x\right)$, $x \in \Re$.

Θέμα 127

Έστω $f : \Re \to \Re$ συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη και ικανοποιεί τις συνθήκες : $f(x) \cdot f'(-x) = 1$, για κάθε $x \in \Re$ και $f(0) = 1$. Να δείξετε ότι $f(x) \cdot f(-x) = 1$, $x \in \Re$.

Θέμα 128

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x) = x^2 - 6x + 1$

ii. $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 7$

iii. $f(x) = xe^x$

iv. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

Θέμα 129

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x - 1$.

i. Να εξετάσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f.

Θέμα 130

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x) = 3e^x + x^2 - 3x + 15$

ii. $f(x) = 2ex(\ln x - 1) - x^2$

iii. $f(x) = 6e^x + x^3 - 3x^2 - 6x$

Θέμα 131

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση : $f(x) = \dfrac{x}{\eta\mu x}$ στο διάστημα $(0, \pi)$.

Θέμα 132

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = -2x + 3$

ii. $f(x) = -x^2 + 3x - 1$

iii. $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$

iv. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 1$

v. $f(x) = -x^3 + x^2 - x - 1$

Θέμα 133

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2 - x} - \sqrt{x}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Θέμα 134

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$

ii. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

iii. $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$

iv. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

v. $f(x)=x+\dfrac{1}{x+1}$

vi. $f(x)=x\ln x$

vii. $f(x)=x\cdot e^x$

viii. $f(x)=2e^x-x+1$

ix. $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

Θέμα 135

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=x^2(2\ln x-5)-4x(\ln x-3)$.

Θέμα 136

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=3e^x+x^2-3x+7$.

Θέμα 137

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=e^x+x\ln x-(e+1)x$.

Θέμα 138

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=2e^{x-1}-x^2+3$.

Θέμα 139

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=-\dfrac{2+x^2e^x+2xe^x}{2e^x}$.

Θέμα 140

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x)=-2x^2+4x-(x-1)\ln x$.

Θέμα 141

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = 2e^x - x^2 - 2x$.

Θέμα 142

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = \dfrac{\ln x}{x-2}$.

Θέμα 143

Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση : $f(x) = 6x^2 \ln x - 2x^3 - 3x^2 + 6x$.

Θέμα 144

Να βρείτε τη μονοτονία και το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων :

i. $f(x) = \ln x + x^2 - \dfrac{1}{x}, \quad x \in (0,1]$.

ii. $f(x) = \ln x - \ln(1-x) \ , \ x \in (0,1)$.

iii. $f(x) = \ln(1+x^2)$

Θέμα 145

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
iii. Να δείξετε ότι η f είναι 1-1 και μετά να βρείτε την αντίστροφη της.

Θέμα 146

Δίνεται μια συνάρτηση f, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ με $f(0) = 0$ και $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (0,+\infty)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$, $x > 0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Θέμα 147

Δίνεται μια συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \to \Re$, η οποία είναι δυο φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \dfrac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}$, $x > 0$, είναι γνησίως αύξουσα στο (α, β).

Θέμα 148

Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση $f(x) = 2\ln(x^2 + \alpha^2) + 2\alpha x + 3$ να είναι γνησίως φθίνουσα στο $\Re$.

Θέμα 149

Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+a^2}$ να είναι γνησίως αύξουσα στο $\Re$.

Θέμα 150

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+x+\ln x-1-e$.

Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Να λύσετε την εξίσωση $e^x+x+\ln x=1+e$.

Θέμα 151

Να λύσετε την εξίσωση : $\ln x=x-1$.

Θέμα 152

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\ln(x^2+1),\ x\in\Re$

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση f.

ii. Να λυθεί η εξίσωση : $2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\dfrac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]$.

Θέμα 153

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i. $x^2+6\ln x=4x-3$

ii. $x^2+4x+5=5e^x$

iii. $x\ln x=2x-e$.

Θέμα 154

Να λύσετε τις παρακάτω εξισώσεις :

i. $e^x=1-2x$

ii. $3x^2+2x=5-\ln x$

iii. $e^{x-1}+x^3=3-x$

Θέμα 156

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $\ln\dfrac{x^2+5}{2x^2+1}=x^2-4$.

Θέμα 157

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x + 3x^5 - 2$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λύσετε την ανίσωση $2e^x + 3x^5 < 2$

iii. Να λύσετε την ανίσωση $2e^{x^2-2x} - 2e^{3x-6} > 3(3x-6)^5 - 3(x^2-2x)^5$

Θέμα 158

Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις :

i. $e^{x-1} \le 1 - \ln x$ ii. $e^x + 2x < e^{-x} - x^3$ iii. $x^2 + 4x > \ln\dfrac{1}{x+1}$

Θέμα 159

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - 2x^2 - 5x + 1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να αποδείξετε ότι : $\dfrac{e^3}{3} - \dfrac{\pi^3}{3} > 2e^2 - 2\pi^2 + 5e - 5\pi$

Θέμα 160

Να αποδείξετε ότι : $x^2 - 1 \ge 2\ln x$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$.

Θέμα 161

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^x$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

ii. Αν $\alpha > \beta > 0$, να αποδείξετε ότι $e^{\alpha-\beta} > \dfrac{\beta}{\alpha}$

Θέμα 162

Δίνεται συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \Re$ με $f(1) = 0$ και $xf'(x) - 2\ln x > 0$ για κάθε $x > 0$. Να δείξετε ότι : $f(x) > \ln^2 x$ για κάθε $x > 1$.

Θέμα 163

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : (0,+\infty) \to \Re$ για την οποία ισχύει $f(1) = 1$ και $xf'(x) > 2x^2 + 1$ για κάθε $x > 0$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(x) > x^2 + \ln x$ για κάθε $x > 1$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) - x^2 = \ln x$.

Θέμα 164

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \Re \to \Re$ για την οποία ισχύει : $f'(x) > f(x)$ για κάθε $x \in \Re$ και $f(0) = 0$. Να δείξετε ότι $xf(x) > 0$ για κάθε $x \ne 0$.

Θέμα 165

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\Re$.

i. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις f και f' ως προς τη μονοτονία.

ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(|\eta\mu x|+3)-f(|\eta\mu x|)=f(x+3)-f(x)$, όταν $x\in[0,+\infty)$.

Θέμα 166

Δίνεται συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ με $f(3)=f(2)$ και $f'\uparrow\Re$. Να λύσετε :

i. την εξίσωση : $f(x+1)-f(x)=0$

ii. την ανίσωση : $f(5x+1)>f(5x)$

iii. την εξίσωση : $f(x^2+2)-f(x^2+1)=0$

Θέμα 167

Να δείξετε ότι η εξίσωση : $x^2+2\ln x=2x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $\Delta=(1,2)$.

Θέμα 168

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x+e^{x-1}-1,\ x\in(0,+\infty)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=2017$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

iii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

Θέμα 169

Να δείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις έχουν ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα Δ.

i. $2x+\ln x=1$ στο Δ=(0,1)

ii. $3e^x+x^3=3x^2-3x$ στο $\Delta=(-1,0)$

Θέμα 170

Έστω η συνάρτηση $f(x)=e^{-x}+x\ln x-2$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει εν μόνο σημείο Μ της C_f με τετμημένη $\xi\in(0,1)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f σ' αυτό το σημείο να είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

Θέμα 171

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)=x^3+2x-5$ για κάθε $x\in\Re$. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Θέμα 172

Έστω η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ η οποία είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f^3(x)+f(x)=e^{-x}-1$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

ii. Να λυθεί η εξίσωση : $f(\ln x)=f(1-x)$.

Θέμα 173

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)=8x^3-12x^2+8x-2$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα (0,1)
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $f(x^3+x)-f(2-\ln x)<0$.

Θέμα 174

Δίνεται μια συνάρτηση f, ορισμένη στο R, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις : $f(x)=-f(2-x)$ και $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως μονότονη
ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα
iii. Έστω η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g, στο σημείο στο οποίο αυτή τέμνει τον άξονα x΄x, σχηματίζει με αυτόν γωνία $45°$.

Θέμα 175

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύουν $f(2)=0$, $f'(0)=0$ και $f''(x)<0$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
ii. Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2+1)<0$
iii. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$, ώστε : $f(\xi)+4\xi=\xi^2+3$.

Θέμα 176

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f'(x)-2xf(x)=e^{x^2}$ για κάθε $x\in\Re$ και $f(1)=e$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να λύσετε την ανίσωση : $e^{x-(1-\ln x)^2}\le\dfrac{1-\ln x}{\sqrt{x}}$.

Θέμα 177

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(1,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(e)=\dfrac{1}{e-1}$ και $xf'(x)+f(x)=\dfrac{1}{x}+f'(x)$ για κάθε $x>1$.

i. Να βρείτε τον τύπο της f
ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
iii. Να λύσετε την εξίσωση : $(2e^x+\sqrt{x}+1)^{e^x+1}=(e^x+2)^{2e^x+\sqrt{x}}$

Θέμα 178

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-3x^2+4$, $x\in[-1,2]$.

i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.
ii. Να βρείτε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f.
iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Θέμα 179

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x^3-6x^2+1$, $x\in[-2,2]$.

i. Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της f.
ii. Να βρείτε τις πιθανές θέσεις ακροτάτων της f.
iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Θέμα 180

Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\Re$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=ax^2-\beta x+1$, να παρουσιάζει ακρότατο στο σημείο $x_0=3$ το -1.

Θέμα 181

Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\Re$ ώστε η συνάρτηση $f(x)=a\ln(x-1)-\beta x^2-4x+1$, να παρουσιάζει ακρότατα στα σημεία $x_1=2$ και $x_2=3$.

Θέμα 182

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f^3(x)+f(x)=x^3+2x-5$ για κάθε $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Θέμα 183

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha,\beta,\gamma\in\Re$. Αν ισχύει ότι $\alpha^2<2\beta$, να αποδείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Θέμα 184

Για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι : $\alpha\ln x-x^2\le x-2$ για κάθε $x>0$. Να αποδείξετε ότι α=3.

Θέμα 185

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha^x-\ln(x+1)$, $x>-1$, όπου $\alpha>0$ και $\alpha\neq1$. Αν $f(x)\ge1$ για κάθε $x>-1$, να αποδείξετε ότι $\alpha=e$.

Θέμα 186

Αν για κάθε x>0 ισχύει $\ln x+\frac{a}{x}\ge a$, να βρείτε το α.

Θέμα 187

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\Re$ για την οποία ισχύει : $f(x^2-x+1)-f(1)\geq x-x^2$, για κάθε $x>0$, (1). Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A(1,f(1))$ είναι παράλληλη με την ευθεία $(\zeta):y=-x$.

Θέμα 188

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$, για την οποία ισχύει : $\ln(x^2+1)\geq f(x)-e^x$, για κάθε $x\in\Re$. Να βρείτε την εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο της Α(0,1).

Θέμα 189

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\left(e^x-e\right)^2\cdot(x-2)^2$, $x\in\Re$. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f έχει δυο θέσεις ολικού ελαχίστου και τουλάχιστον μια θέση τοπικού μεγίστου, η οποία βρίσκεται στο διάστημα (1,2).

Θέμα 190

Έστω $f:A\to\Re$, μια συνάρτηση, με $A=[1,2]$ και $f(A)=[-2,5]$. Αν επιπλέον ισχύει $f(1)=2, f(2)=4$ και η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Θέμα 191

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^2-6x+1$

ii. $f(x)=x^3+3x^2-9x+7$

iii. $f(x)=xe^x$

iv. $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$

Θέμα 192

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=-x^2+6x+1$

ii. $f(x)=x^3+3x^2+6x+1$

iii. $f(x)=x^3-x^2$ iv. $f(x)=\dfrac{3x-1}{x-2}$ v. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-1}$ vii. $f(x)=\dfrac{x^2-7x+6}{x-10}$

Θέμα 192

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x)=x^3-6x^2+9x+1$

ii. $f(x)=-x^3+3x^2+1$

Θέμα 193

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x - x + 1$.

i. Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της g

ii. Για τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x}{e^x} + x$ να αποδείξετε ότι $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$ και ότι δεν υπάρχει οριζόντια εφαπτομένη στη καμπύλη της f.

Θέμα 194

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$

ii. $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 7)$

iii. $f(x) = e^x - x$

iv. $f(x) = e^x - ex$

v. $f(x) = \ln x - x$ vi. $f(x) = \ln(8x - x^2)$ vii. $f(x) = \ln(x^2 - 2x)$

viii. $f(x) = \frac{x}{e^x}$ ix. $f(x) = x + \frac{1}{x+1}$ x. $f(x) = x \ln x$

Θέμα 195

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Θέμα 196

Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα στο αντίστοιχο διάστημα οι παρακάτω συναρτήσεις :

i. $f(x) = x^2 - 4x + 1$ στο [1,4] ii. $f(x) = x^2 - 2x + 2$ στο [-2,3]

iii. $f(x) = x^3 - 12x + 7$ στο [0,3] iv. $f(x) = \ln x - x$ στο[1,e]

Θέμα 197

Δίνετε η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + \lambda$, $x, \lambda \in \Re$. Να βρείτε την τιμή της παραμέτρου λ, αν είναι γνωστό ότι το τοπικό ελάχιστο της f είναι αντίθετο από το τοπικό της μέγιστο.

Θέμα 198

Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6\alpha x + \beta$, με $\alpha, \beta \in \Re$. Η f παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο $x_0 = -2$ και είναι $f(-2) = 98$.

i. Να αποδείξετε ότι $\alpha = -6$ και $\beta = 54$

ii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

iii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα (-1,2)

Θέμα 199

Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$.

i. Να βρείτε το ελάχιστο της g

ii. Για τη συνάρτηση $f(x) = x + \frac{1}{2} + \frac{\ln x}{x}$ να δείξετε ότι $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ και ότι η f δεν έχει ακρότατα.

Θέμα 200

Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της συνάρτησης : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 3, x \le 1 \\ x^2 - 6x + 7, x > 1 \end{cases}$

Θέμα 201

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln x - 2x + e$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

Θέμα 202

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x\ln x - x + 1$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

iii. Αν ισχύει $f(\alpha + \beta) = -f(3\alpha + 4\beta)$, να βρείτε τα α,β.

Θέμα 203

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x+1) - x$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$

Θέμα 204

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^{x+1} - 2x - 3$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε το πρόσημο της.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2e^{x+1} - x^2 - 3x$ είναι γνησίως αύξουσα.

Θέμα 205

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - ex$. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα και να βρείτε τις ρίζες f και το πρόσημο της. Στη συνέχεια να μελετήσετε τη $g(x) = 2e^{x-1} - x^2$ ως προς τη μονοτονία.

Θέμα 206

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\ln x - 2x + 1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τα ακρότατα

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = 2x\ln x - x^2 - x$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Θέμα 207

Να αποδειχθούν οι παρακάτω ανισότητες για τις διάφορες τιμές του x.

i. $e^x \geq x+1$ για $x \in \Re$

ii. $e^x - 1 \leq xe^x$ για $x \in \Re$

iii. $e^{x-1} \geq 1 + \ln x$ για $x > 0$

Θέμα 208

Να δείξετε ότι $\ln x \leq x - 1$ για κάθε $x > 0$.

Θέμα 209

Έστω οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το IR . Δίνεται ότι η συνάρτηση της σύνθεσης fog είναι 1-1.

i. Να δείξετε ότι η g είναι 1-1.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση : $g\left(f(x)+x^3-x\right)=g\left(f(x)+2x-1\right)$ έχει ακριβώς δύο θετικές και μία αρνητική ρίζα.

Θέμα 210

Για τις διάφορες τιμές του α να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 3 = \alpha$.

Θέμα 211

Δίνεται η συνάρτηση(x)=x^3–3x–2ημ^{2}θ όπου θ∈ IR μια σταθερά με $\theta \neq \kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, κ∈ Z

i. Να αποδειχθεί ότι η f παρουσιάζει ένα τοπικό μέγιστο και ένα τοπικό ελάχιστο

ii. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση f(x)=0 έχει ακριβώς τρεις πραγματικές ρίζες.

Θέμα 212

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - x - 1 + \frac{1}{x}$ με $x > 0$. Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς ένα τοπικό ακρότατο, και στη συνέχεια να βρείτε το είδος του.

Θέμα 213

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + x^2 - 2x + 3$. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0,1)$, τέτοιο, ώστε η f να παρουσιάζει ελάχιστο.

Θέμα 214

Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x\ln^2 x$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

Θέμα 215

Να βρείτε δυο αριθμούς x,y με σταθερό άθροισμα 10, που να έχουν το μεγαλύτερο γινόμενο.

Θέμα 216

Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x)=x^3+3x^2-6x$

ii. $f(x)=3x^5-10x^3+2x+1$

iii. $f(x)=\dfrac{x^2}{1+x}$

iv. $f(x)=\ln(x^2+1)$

Θέμα 217

Να βρεθούν τα διαστήματα κυρτών – κοίλων και τα σημεία καμπής των συναρτήσεων.

i. $f(x)=e^x(x^2+1)$

ii. $f(x)=x-\ln(e^x+1)$

iii. $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$

iv. $f(x)=\dfrac{x^2}{e^x}$

Θέμα 218

Δίνεται η συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ δυο φορές παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει ότι : $f^2(x)+e^x=3f(x)-\alpha^x$ για κάθε $x\in\Re$ όπου $0<\alpha\neq 1$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Θέμα 219

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\alpha x^5-(4\beta+2)x^3+(\alpha-1)x+1$ με $\alpha,\beta\in\Re$. Να βρείτε τις τιμές των α και β, ώστε η C_f να έχει σημείο καμπής το $\mathrm{A}(1,-4)$.

Θέμα 220

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\lambda x^4+2(\lambda-3)x^3+6\lambda x^2-3x+5$ με $\lambda\in\Re$. Να βρείτε για ποιες τιμές της παραμέτρου λ, η συνάρτηση f είναι κοίλη στο R.

Θέμα 221

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να λύσετε την ανίσωση : $f'\left(x^2+1\right)>e-1$.

iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(1,f(1))$.

iv. Να αποδείξετε ότι $e^x\geq(e-1)x+\ln x+1$ για κάθε $x>0$.

v. Να λύσετε την εξίσωση : $\dfrac{f(x)-1}{e-1}=x$.

vi. Να λύσετε την εξίσωσης : $f\left(e^x\right)+e^x=e^{x+1}+1$

Θέμα 222

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{2x}+x^4$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $\mathrm{A}(0,f(0))$.

iii. Να αποδείξετε ότι $e^{2x}\geq 1+2x-x^4$ για κάθε $x\in\Re$.

Θέμα 223

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x-x+e^x-\frac{x^2}{2}$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει ακριβώς ένα σημείο καμπής.

Θέμα 224

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(e^x-x)$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει δυο, ακριβώς, σημεία καμπής.

Θέμα 225

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln^2 x-x\ln x$. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(1,2)$ στο οποίο συνάρτηση f παρουσιάζει καμπή.

Θέμα 226

Έστω μια κυρτή συνάρτηση $f:\Delta\to\Re$. Να αποδείξετε ότι :

i. $f(\alpha)+f(\beta)\geq 2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ για κάθε $\alpha,\beta\in\Delta$.

ii. $f'(x+1)>f(x+1)-f(x)$.

Θέμα 227

Έστω μια συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\Re$, η οποία είναι κυρτή και ισχύει $f(0)=0$ και $f'(x)>1$ για κάθε $x>0$. Να δείξετε ότι $x<f(x)<xf'(x)$, για κάθε $x>0$.

Θέμα 228

Δίνεται παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\Re\to\Re$ για την οποία ισχύει : $e^{f(x)}+f(x)=x+1$ για κάθε $x\in\Re$.

i. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

ii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $M(0,f(0))$

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και την κυρτότητα.

iv. Να αποδείξετε ότι $xf'(x)\leq f(x)\leq\frac{x}{2}$ για κάθε $x\in\Re$.

v. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(0,2)$, ώστε : $2f(\xi)=(\xi-1)\sqrt{e^{\xi}}$

Θέμα 229

i. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x-x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

ii. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=\ln^2 x+2x\ln x+x^2-3$ είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$.

iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_g στο $x_0=1$

iv. Να δείξετε ότι : $x+\ln x>\sqrt{4x-3}$ για κάθε x>1.

Θέμα 230

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ii. $f(x)=\dfrac{\ln(x-2)}{x-4}$

Θέμα 231

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις κατακόρυφες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{x}{x-1}$ ii. $f(x)=\dfrac{3x-4}{x^2-3x+2}$ v. $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-2x+1}$

iii. $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ iv. $f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{(x-2)^3}$ vi. $f(x)=\dfrac{x-5}{|x-2|}$

Θέμα 232

Να βρείτε (αν υπάρχουν) τις οριζόντιες ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης : $f(x)=\dfrac{2x^4-3x+1}{x^4+1}$.

Θέμα 233

Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{3x^2+7x+13}{x^2+2}$

ii. $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}-\dfrac{x^2-2}{x+1}$

iii. $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{x-1}{4-x}}$

Θέμα 234

Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι πλάγιες – οριζόντιες ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{2x^3-9x+1}{x^2-5x+6}$ ii. $f(x)=\sqrt{x^2+4x+5}$

Θέμα 235

Να βρεθούν (αν υπάρχουν) οι ασύμπτωτες των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων :

i. $f(x)=\dfrac{6x^2+2x+1}{2x-4}$ ii. $f(x)=\sqrt{x^2-2x+4}$ iii. $f(x)=\dfrac{\eta\mu x}{x}$ iv) $f(x)=\dfrac{\ln(9-x^2)}{x^2}$

Θέμα 236

Να δείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 4$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της $f(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 13}{x - 1}$ όταν $x \to -\infty$.

Θέμα 237

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\alpha x^2 - \beta x + 9}{x - 3}$. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \Re$ ώστε η ευθεία $(\varepsilon): y = 3x - 2$ να είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_f όταν $x \to +\infty$.

Θέμα 238

Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 3x + 6$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί το όριο : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xf(x) - 3x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} + x}$.

Θέμα 239

Αν η ευθεία $(\varepsilon): y = 5x - 2$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου $\lambda \in \Re$, ώστε να ισχύει : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xf(x) - 5x^2 - \lambda x + 4}{\lambda f(x) + 10x - 2} = \dfrac{1}{4}$.

Θέμα 240

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^{-2x}$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
ii. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι κυρτή ή κοίλη και τα σημεία καμπής.
iii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.
iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Θέμα 241

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha\sqrt{x} + \beta \ln x + \beta x$.

i. Να βρείτε τα α,β ώστε το Α(1,3) να είναι σημείο καμπής της C_f.

Για α=4 και β=-1 ,

ii. Να βρείτε τα διαστήματα που η f είναι κυρτή ή κοίλη.
iii. Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f στο σημείο καμπής της.
iv. Να δείξετε ότι $4\sqrt{x} - \ln x \le x + 3$ για κάθε $x \ge 1$.

Θέμα 242

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x-2}+x-3$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

2. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ και το σύνολο τιμών της f.

Θέμα 243

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x^3+2(\lambda-1)x-\lambda$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $(0,1)$.

Θέμα 244

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f.

ii. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii. Να τη μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Θέμα 245

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{4}{x}, x\neq 0$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x_0,f(x_0))$ με $x_0\neq 0$.

ii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.

iii. Αν Α και Β τα σημεία που η εφαπτομένη στο Μ τέμνει τους άξονες, να δείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

Θέμα 246

Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} x^4+5x, x\geq 0 \\ 5\cdot\eta\mu x, x<0 \end{cases}.$$

Θέμα 247

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+1$. Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

i. να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

ii. να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x'x.

iii. να είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

iv. να είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

Θέμα 248

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

i. $x^{\eta\mu x}, x>0$

ii. $2^{x\cdot\ln x}, x>0$

iii. $\sqrt{5x^8+1}$

Θέμα 249

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$-2x+1\leq f(x)\leq x^4-2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}, \qquad \textbf{(1)}$$

τότε

i. να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$

ii. να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και ισχύει $f'(0)=-2$.

Θέμα 250

Έστω $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0>0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-{x_0}^2}$

ii. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}$

Θέμα 251

Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $O(0,0)$, δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y=-\dfrac{1}{4}x+2$.

Να βρείτε τις διαστάσεις του α,β ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

Θέμα 252

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2.$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

Θέμα 253

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot\eta\mu x$. Να δείξετε ότι:

$$f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2f''(x)$$

Θέμα 254

Να δείξετε ότι:

$2\ln(x-1)\le x-3+\ln 4$ για κάθε $x>1$.

Θέμα 255

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A(1,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2+7x$.

Θέμα 256

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Θέμα 257

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+7$.

ii. Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $O(0,0)$.

iii. Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο $A(2,0)$;

Θέμα 258

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+k\cdot x-1$, όπου $k\in\mathbf{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$, να βρείτε την τιμή του k.

ii. Αν $k=2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$.

Θέμα 259

i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+2\alpha x^3+24x^2+5x-7$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του α, ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$

ii. Για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbf{R}$ η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A(1,f(1))$

Θέμα 260

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

   i. $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

   ii. $e^{x^2} \geq 1-x$, για κάθε $x \geq 0$.

2. Να δείξετε ότι $e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

Θέμα 261

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + 5x$.

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5$.

Θέμα 262

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x): \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ με $f'(0) = 1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x) \cdot e^y + f(y) \cdot e^x \text{ για κάθε } x, y \in \mathbf{R}.$$

i. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

Θέμα 263

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R},$$

να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = e^5$.

Θέμα 264

Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ με

$f(0)=f(1)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

i. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $h(x)=f^2(x)\cdot e^{g(x)}$ στο διάστημα $[0,1]$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Θέμα 265

Αν η ευθεία $y=3x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε

i. να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$

ii. να βρείτε το $\lambda\in\mathbf{R}$ ώστε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f(x)-3x^2-\lambda^2x+2}{f(x)+\lambda x+1}=-1$$

Θέμα 266

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)<0, f(1)>2$ και $f'(x)\neq 2$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\xi\in(0,1)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\xi)=2\xi$.

Θέμα 267

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)=2011$.

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}$$

Θέμα 268

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$.

Θέμα 269

Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,3]$. Να δείξετε ότι

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3).$$

Θέμα 270

Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0), B(x,\ln x)$ και

$\Gamma(x,0), x>1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το $x=2cm$.

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0,5cm/\sec$.

Θέμα 271

i. Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho)=P'(\rho)=0$.

ii. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x-1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

Θέμα 272

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x)\geq e^{x-1}+\ln x+x^2 \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=2.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$.

Θέμα 273

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \text{ για κάθε } x\in(-3,3) \qquad \textbf{(1)}$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Θέμα 274

Δίνεται η συνεχής και πραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$f\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)=2\cdot e^x$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

i. Να δείξετε ότι $f'(0)=2$.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A\left(0,f(0)\right)$ είναι η $y=2x+2$.

iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2cm/\sec$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

Θέμα 275

1. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

   i. αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.

   ii. αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

2. Έστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\left(x^5+\sigma\upsilon\nu x\right)\cdot e^{f(x)}+\eta\mu x+x\,.$$

   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

   ii. Να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.

Θέμα 276

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ii. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi\dfrac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$.

Θέμα 277

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Θέμα 278

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+24x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbf{R}$.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

Θέμα 279

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(1)=2 \text{ και}$$

$$x\cdot f'(x)=-3\cdot f(x) \text{ για κάθε } x\neq 0.$$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^3\cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Θέμα 280

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$\left[P'(x)\right]^2=P(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R} \text{ και } P'(1)=2.$$

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

Θέμα 281

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma$ ισχύει $f(\alpha)<f(\beta)>f(\gamma)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Θέμα 282

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-}x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

Θέμα 283

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,6]\to \mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ με $f(1)=f(6)$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο

$A(x_0,f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,6)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$.

Θέμα 284

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\eta\mu x$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Θέμα 285

Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, για την οποία ισχύουν: $f(2)=5$, $f(1)=3$ και $f(x)\le 2x+1$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Θέμα 286

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x)<x^2$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

1. η $g(x)=3f(x)-x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$
2. $f(2)-f(1)<3$
3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)<3$.

Θέμα 287

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)=x-\ln x$.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Θέμα 288

1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1 \text{ για κάθε } x>0.$$

2. Να δείξετε ότι η $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot\ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

Θέμα 289

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0)=2$ και

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x=f(x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

τότε να βρείτε τον τύπο της.

Θέμα 290

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}, x>-1$ και $\lambda>0$.

i. Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Θέμα 291

Α. Να αποδείξετε ότι: $e^x \le 1+xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. Να λυθεί η εξίσωση $e^x = 1+xe^x$

Γ. Να βρείτε το σύνολο των τιμών της συνάρτησης $h(x)=2\left|1+xe^x\right|$

Θέμα 292

1. Να λύσετε την εξίσωση $3^x+2^x=5^x$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με $f'(x)=-2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{2x}\cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

   ii. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0)=1$.

   iii. Αν h,φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbf{R}$, με

   $$h'(x)+2h(x)=\varphi'(x)+2\varphi(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}$$

   και $h(0)=\varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι $h=\varphi$.

Θέμα 293

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f, αν υπάρχουν.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0,f\left(0\right)\right)$.

v. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x \geq 7x+3 \text{ για κάθε } x\geq -4+\sqrt{3}.$$

Θέμα 294

Δίνεται συνάρτηση $f\left(x\right)=e^x-\ln\left(x+1\right)-1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=0$.

iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ με $2\alpha+\beta>0$ και $\alpha+2\beta-1>0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln\left(2\alpha+\beta\right)+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln\left(\alpha+2\beta-1\right)\leq 2$$

να υπολογίσετε τους α,β.

Θέμα 295

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^{\frac{1}{2x}},\ x>0$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι:

$$\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$$

Θέμα 296

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln\left(x^2+1\right)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $x-4=\ln 17-\ln\left(x^2+1\right)$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3-x^2>\ln\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$.

Θέμα 297

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x) \text{ για κάθε } x>0.$$

Θέμα 298

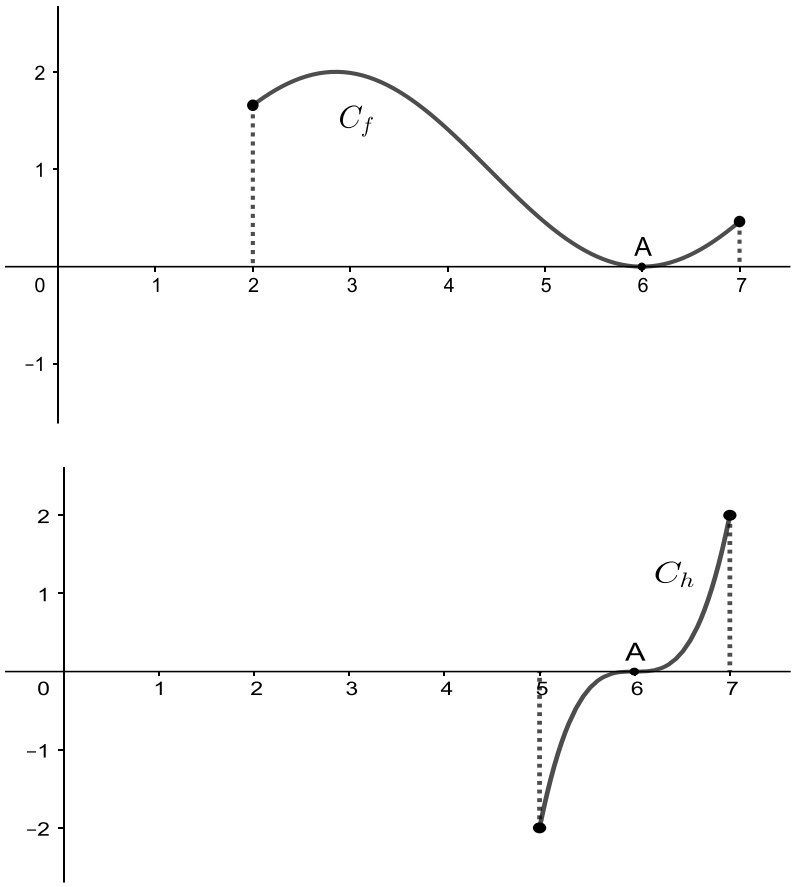
Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ και $f(3)=12$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A\left(\xi,f(\xi)\right)$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B\left(\gamma,f(\gamma)\right)$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

1. ΘΕΜΑ 2 – 36840

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 2 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f και h. Και οι 2 γραφικές παραστάσεις εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του Α(6,0). Γνωρίζουμε ότι η f παίρνει θετικές τιμές κοντά στο 6 και η h παίρνει αρνητικές τιμές αριστερά του 6 και θετικές τιμές δεξιά του 6.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f και h. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια, δικαιολογώντας την απάντησή σας.

i. $\lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{f(x)}$ (Μονάδες 07)

ii. $\lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{h(x)}$ (Μονάδες 07)

iii. $\lim\limits_{x\to 6} \frac{f(x)}{x-6}$ (Μονάδες 05)

Παρατήρηση :

Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 6} \frac{h(x)-h(6)}{x-6}$, κατόπιν την εξίσωση της εφαπτομένης της C_h στο σημείο της Α και να διαπιστώσετε ότι οι C_f και C_h έχουν κοινή εφαπτομένη τον άξονα $x'x$, ο οποίος όμως τη δεύτερη τη ''διαπερνά''.

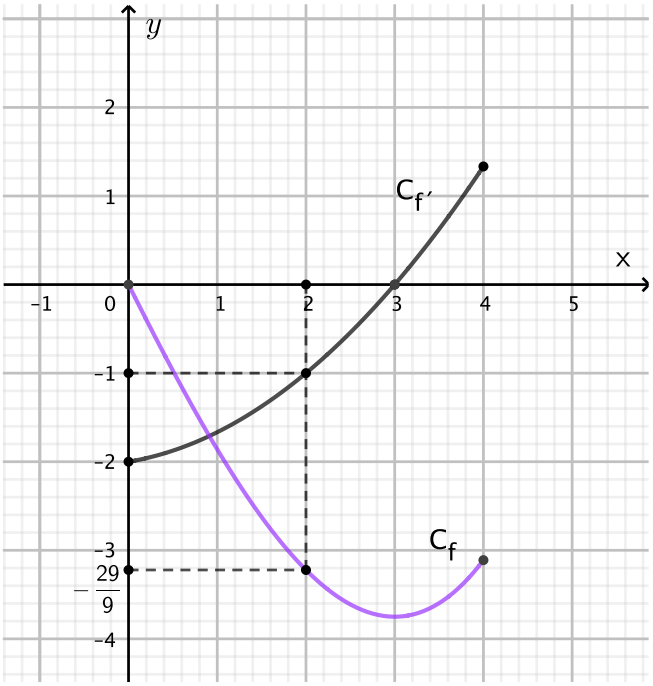
2. ΘΕΜΑ 2 – 26712

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού, η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$, και της παραγώγου της, f'.

α) Να βρείτε την κλίση της συνάρτησης f στο $x_o = 2$. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f στο $x_o = 2$. (Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 09)



3. ΘΕΜΑ 2

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} e^x & , \text{αν } x < 0 \\ 1 & , \text{αν } x = 0 \\ \text{συν}x & , \text{αν } x > 0 \end{cases}$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 9)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης, της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της με τετμημένη $x = \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 7)

4. ΘΕΜΑ 2 – 25762

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} -x^2+x, & x \le 0 \\ \eta\mu x, & x > 0 \end{cases}$.

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_o = 0$. (Μονάδες 8)

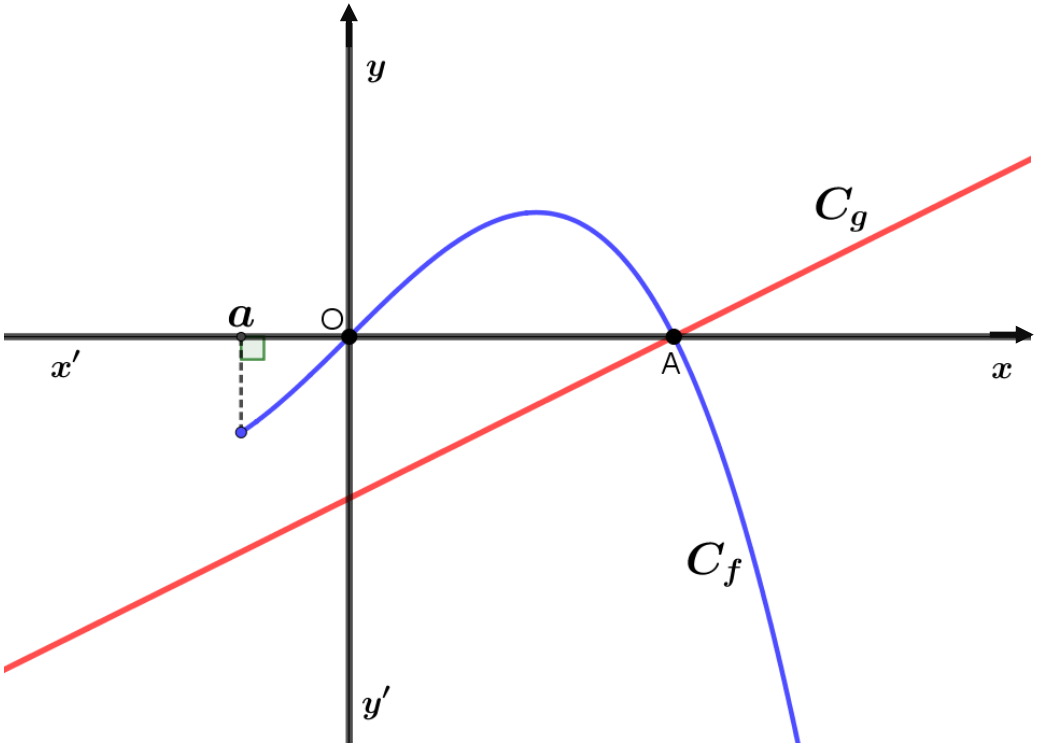
β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_o = 0$ και $f'(0) = 1$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $O(0, 0)$. (Μονάδες 7)

5. ΘΕΜΑ 2 – 25234

Θεωρούμε την παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:[a,+\infty)\to R$ και την συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$, $x\in R$. Οι γραφικές παραστάσεις C_f, C_g των συναρτήσεων f, g αντίστοιχα, φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Γνωρίζουμε ότι:

- οι C_f, C_g τέμνονται στο σημείο $A(1,0)$.
- η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η C_f δεν έχει άλλα κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$ εκτός από τα σημεία O και A.



α) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{1}{g(x)}$. (Μονάδες 8)

β) Αν είναι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$, να υπολογίσετε το $f'(0)$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{g(x)}{f(x)}$. (Μονάδες 9)

6. ΘΕΜΑ 2 – 24757

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ σχηματίζει με τον xx' γωνία 45°.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$. (Μονάδες 8)

β) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A(0,1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-1}{x}=1$. (Μονάδες 9)

Επιπλέον ερώτημα :

Δίνεται $h(x)=e^x$. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,1)$ εφάπτεται και της C_h.

7. ΘΕΜΑ 2 – 24756

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(0)=0$ και για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=2$.

α) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=2$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}$. (Μονάδες 8)

8. ΘΕΜΑ 2 – 24755

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}1-\dfrac{\eta\mu x}{x}, & x\neq 0\\ \alpha, & x=0\end{cases}$, η οποία είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha=0$. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $f'(0)=0$. (Μονάδες 10)

γ) Να γράψετε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(0,f(0))$. (Μονάδες 5)

9. ΘΕΜΑ 2 – 33816

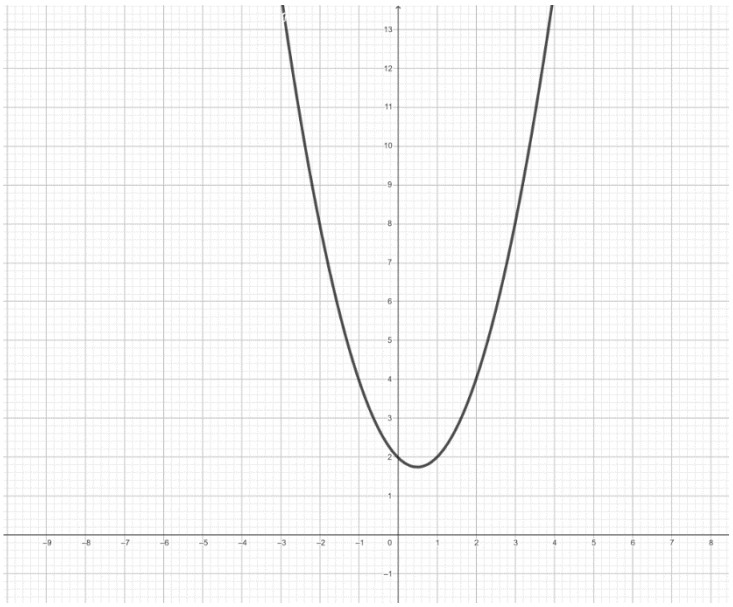
Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=x^2-x+2$.

α) Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{A}(0,1)$. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι η ευθεία $y=x+1$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της g

στο σημείο της $\mathrm{B}(1,2)$. (Μονάδες 8)

γ) Αφού αντιγράψετε στην κόλλα σας το παρακάτω σχήμα, στο οποίο φαίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης g, να γίνει πρόχειρη γραφική παράσταση στο ίδιο σύστημα αξόνων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f και της ευθείας $y=x+1$. (Μονάδες 9)



10. ΘΕΜΑ 2 – 33632

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} e^x, & x\le 0 \\ -x^2+1, & x>0 \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι είναι συνεχής στο $x_o=0$ και να σχεδιάστε τη γραφική της παράσταση. (Μονάδες 13)

β) Να εξετάσετε αν ορίζεται η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης στο σημείο $A(0, f(0))$. (Μονάδες 12)

11. ΘΕΜΑ 2 – 34437

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln x+2x$, $x>0$ και $g(x)=e^{x+2}$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να ορίσετε τη συνάρτηση $f\circ g$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης g και να αποδείξετε ότι η g είναι 1-1. (Μονάδες 8)

γ) Να ορίσετε την αντίστροφο συνάρτηση της g. (Μονάδες 8)

12. ΘΕΜΑ 2 – 31743

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=x\eta\mu x+4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την παράγωγο της f και να υπολογίσετε τις τιμές $f'(0)$ και $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι για τη συνάρτηση φ, με $\varphi(x)=f'(x)-\frac{1}{3}$, $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν

$\varphi(0)<0$ και $\varphi(\frac{\pi}{2})>0$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\varphi(x)=0$, έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(0, \frac{\pi}{2})$. (Μονάδες 9)

13. ΘΕΜΑ 4 – 28340

Έστω μια συνάρτηση $f:(-\infty,0)\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=-1$ και η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $g(x)=-x+1$. Δίνεται ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(-1, f(-1))$, έχει εξίσωση $y=g(x)$.

α) Να βρείτε το $f(-1)$ και το $f'(-1)$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε:

i. το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων fog και gof, (Μονάδες 6)

ii. τις παραγώγους $(fog)'(2)$ και $(gof)'(-1)$. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της C_{fog} στο σημείο της με τετμημένη $x_1=2$ και η εφαπτομένη της C_{gof} στο σημείο της με τετμημένη $x_0=-1$, ταυτίζονται. (Μονάδες 6)

14. ΘΕΜΑ 2 – 28302

Έστω $\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση με $\mathrm{f}(0)=-2$ και $\mathrm{f}'(0)=0$.

Έστω επίσης οι συναρτήσεις $\mathrm{g}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $\mathrm{g}(\mathrm{x})=-\mathrm{x}$ και $\mathrm{gof}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την τιμή $(\mathrm{gof})(0)$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε την παράγωγο $\mathrm{g}'(-2)$. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε την παράγωγο της gof στο $\mathrm{x}_0=0$. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της gof στο σημείο με τετμημένη $\mathrm{x}_0=0$. (Μονάδες 7)

15. ΘΕΜΑ 2 – 27315

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{αν } x<2\\ ax^2-4, & \text{αν } x\geq 2\end{cases}$ με α ∈ R.

α) Να βρείτε τα πλευρικά όρια της f στο $x_0=2$, δηλαδή τα $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την τιμή του α, ώστε η συνάρτηση f να είναι συνεχής στο $x_0=2$. (Μονάδες 07)

γ) Αν α = 2, να βρείτε όπου ορίζεται την παράγωγο της συνάρτησης f. (Μονάδες 06)

16. ΘΕΜΑ 4 – 36815

Έστω f μια συνεχής συνάρτηση στο διάστημα $[-2,2]$, για την οποία ισχύει

$$f^2(x)+x^2=4 \text{ για κάθε } x\in[-2,2]$$

α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$. (Μονάδες 06)

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,2)$, τότε να βρείτε τον τύπο της f. (Μονάδες 09)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 04)

δ) Ένα κινητό κινείται κατά μήκος της καμπύλης της f. Καθώς περνάει από το σημείο $B(-1,\sqrt{3})$, η τεταγμένη του y αυξάνεται με ρυθμό 2 μονάδες το δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης x του κινητού τη χρονική στιγμή που περνάει από το B. (Μονάδες 06)

17. ΘΕΜΑ 4 – 36787

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x$.

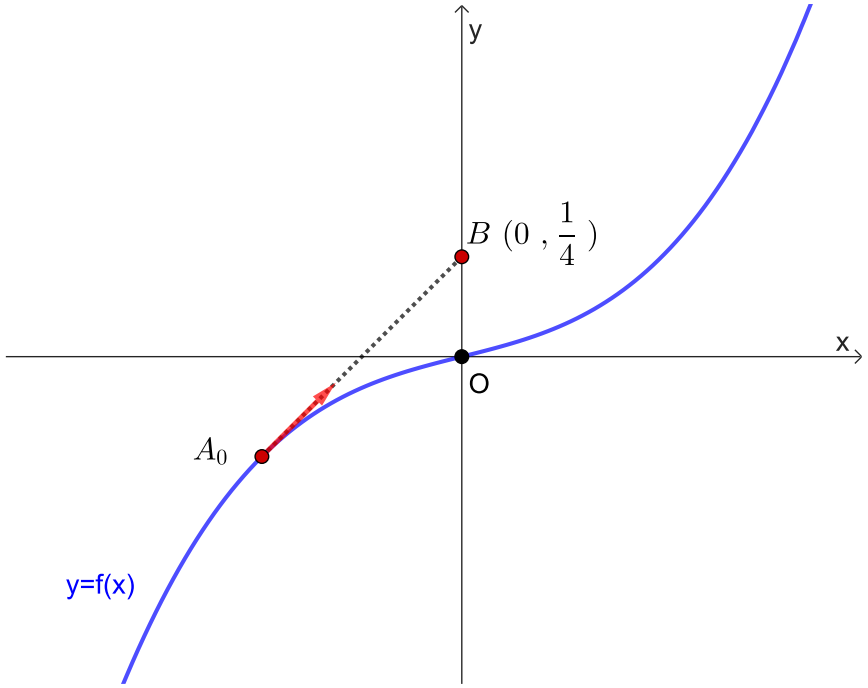
α) Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$

έχει εξίσωση $y = \left(3\alpha^2 + \frac{1}{4}\right)x - 2\alpha^3$. (Μονάδες 8)

β) Ένα αυτοκίνητο κινείται τη νύχτα, κατά μήκος ενός επίπεδου δρόμου. Θεωρήστε το αυτοκίνητο ως σημείο στο επίπεδο Oxy και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, ως τον δρόμο που αυτό κινείται, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Σε μια συγκεκριμένη χρονική στιγμή t_o, που το αυτοκίνητο βρίσκεται στο σημείο A_0, οι προβολείς του φωτίζουν μια πινακίδα που βρίσκεται στο σημείο $B\left(0, \frac{1}{4}\right)$.

i. Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου A_0. (Μονάδες 8)

ii. Αν ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του αυτοκινήτου τη χρονική στιγμή t_o, είναι 2, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του αυτοκινήτου, τη χρονική στιγμή t_o. (Μονάδες 9)



Επιπλέον ερωτήματα :

γ) Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f οι οποίες είναι παράλληλες

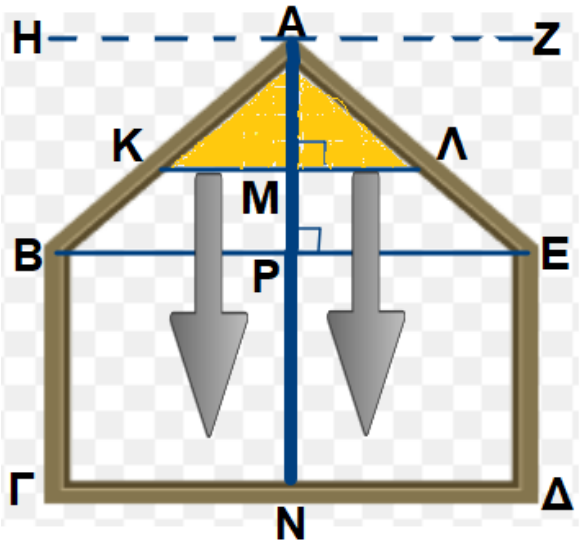
στην ευθεία $13x - 4y + 4 = 0$.

δ) Εξετάστε αν υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

ε) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \eta\mu x$. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης g

έχει ένα τουλάχιστον σημείο τομής με τον $x'x$ με τετμημένη $x_0 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

18. ΘΕΜΑ 4 – 25257



Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα παράθυρο το οποίο αποτελείται από το ορθογώνιο ΒΓΔΕ και το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΕ. Είναι $\text{ΑΡ} = 0{,}8\,\text{m}$, $\text{ΒΕ} = 1{,}6\,\text{m}$, $\text{ΑΜ} = x\,\text{m}$, $\text{ΒΓ} = 1\,\text{m}$.

Το ορατό κάτω μέρος ΚΛ μιας ηλεκτροκίνητης σίτας, κατεβαίνει παράλληλα προς την αρχική της θέση ΗΖ, με σταθερό ρυθμό, ώστε το Μ να διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα ΑΝ (με $\text{ΑΜ} \neq 0$).

Αν $\text{Ε} = \text{Ε}(x)$ είναι το εμβαδό του παραθύρου που καλύπτει η σίτα, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδό Ε, ισχύει

$$\text{Ε}(x) = \begin{cases} x^2 \quad , \text{ αν } x \in \left(0, \dfrac{4}{5}\right) \\ \dfrac{8}{5}x - \dfrac{16}{25}, \text{ αν } x \in \left[\dfrac{4}{5}, \dfrac{9}{5}\right] \end{cases}, \text{ σε } \text{m}^2 .$$

(Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού Ε ως προς x, όταν $x = \dfrac{4}{5}\,\text{m}$, είναι ίσος με $\text{Ε}'\left(\dfrac{4}{5}\right) = \dfrac{8}{5}\,\text{m}^2/\text{m}$.

(Μονάδες 09)

γ) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού Ε ως προς τον χρόνο t, τη χρονική στιγμή για την οποία ισχύει $x = \dfrac{4}{5}\,\text{m}$, αν δίνεται επιπλέον ότι $x'(t) = 0{,}08\,\text{m/s}$ για κάθε $t \geq 0$.

(Μονάδες 08)

Επιπλέον ερωτήματα :

δ) Μια εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $E(x)$ διέρχεται από το σημείο $\Theta\left(0, -\frac{1}{4}\right)$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης.

ε) Να βρείτε $x_0 \in \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$ για το οποίο ισχύει $E'(x_0) = \frac{E\left(\frac{4}{5}\right) - E\left(\frac{2}{5}\right)}{\frac{4}{5} - \frac{2}{5}}$.

[8]

19. ΘΕΜΑ 2 – 36827

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x) = lnx,\ x > 0$ και $g(x) = e^{-x},\ x \in R$.

α) Να δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση g έχει αντίστροφη και να αποδείξετε ότι $g^{-1} = -f$. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0, +\infty)$. (Μονάδες 8)

γ) Έστω $h(x) = (g \circ f)(x)$.

Να βρείτε τον μοναδικό αριθμό ξ ο οποίος ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος Μέσης Τιμής για την συνάρτηση h στο διάστημα $[2, 8]$. (Μονάδες 8)

20. ΘΕΜΑ 2 – 36851

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \begin{cases} -5x^2 - 3x + 1, & \alpha\nu\ x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 1, & \alpha\nu\ x > 0 \end{cases}$

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. (Μονάδες 7)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 0. (Μονάδες 7)

γ) Να δικαιολογήσετε γιατί μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα Rolle στο διάστημα [-1,1] και να βρείτε ένα τουλάχιστον $x_0 \in$ (-1,1) για το οποίο ισχύει $f'(x_0) = 0$. (Μονάδες 11)

21. ΘΕΜΑ 2 – 31643

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 3x^3 - x^2 + 9x$, $x \in [1,2]$.

α) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα $[1,2]$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $4x^3 - 9x^2 - 2x + 9$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(1,2)$. (Μονάδες 13)

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \in [0,1] \\ x^2, & x \in (1,4] \end{cases}$

α) Εξετάστε αν η συνάρτηση ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θ.Μ.Τ. στο $[0,4]$.

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις τιμές του $\xi \in (0,4)$ για τις οποίες ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(4)-f(0)}{4-0}$

γ) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

δ) Η εφαπτομένη (ε) της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία ω με $\varepsilon\varphi\omega = 6$.

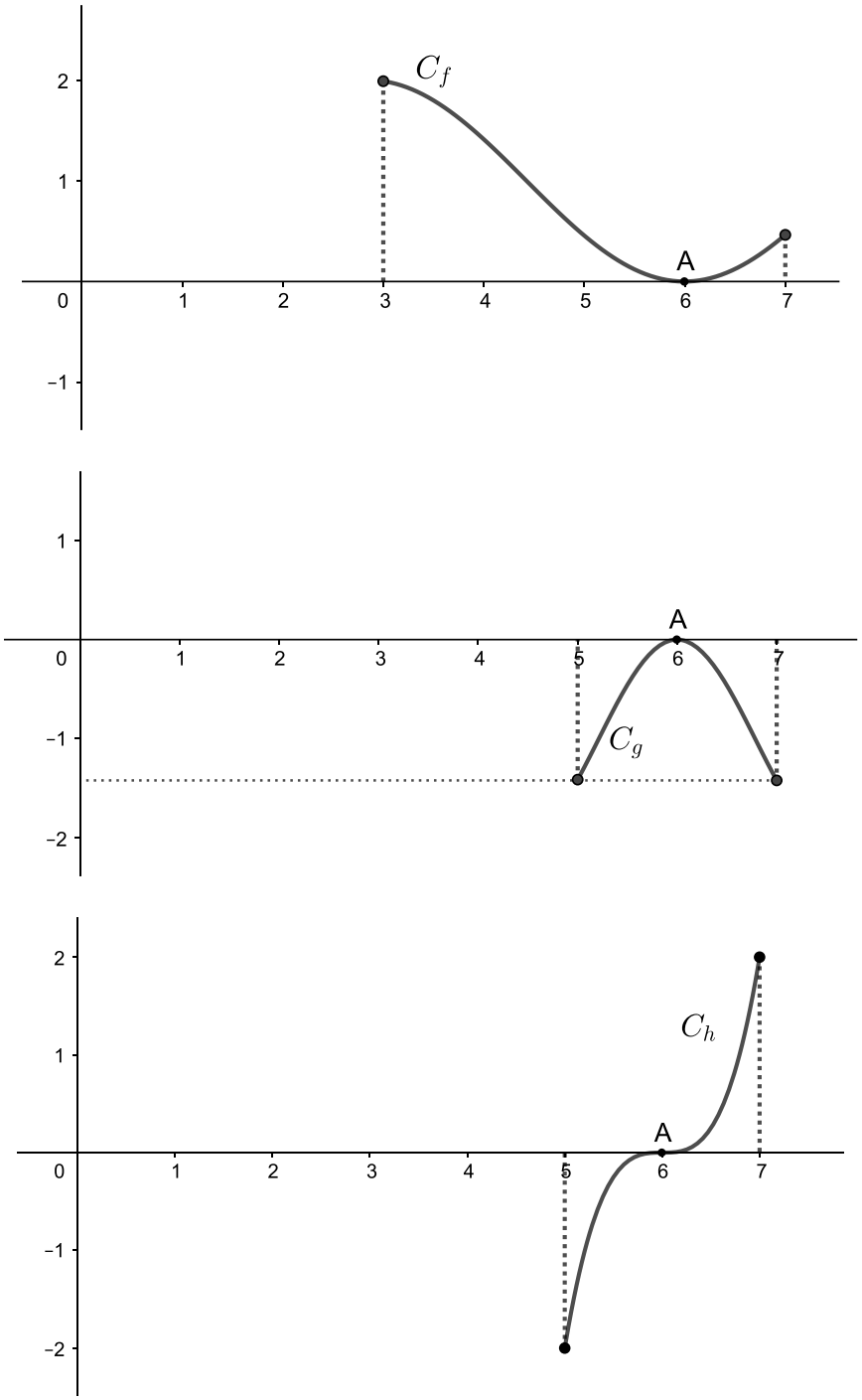
Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε).

ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) \cdot \eta\mu x + (f(x) - 4) \cdot \sigma\upsilon\nu x = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(2, \pi)$.

στ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $ln\, x + f(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

23. ΘΕΜΑ 2 – 36842

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις 3 παραγωγίσιμων συναρτήσεων των f, g και h, οι οποίες εφάπτονται του άξονα $x'x$ στο σημείο του $A(6,0)$.



α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού κάθε μίας από τις συναρτήσεις f, g και h. (Μονάδες 06)

β) Να εξετάσετε για ποια ή ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις:

i. Ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο πεδίο ορισμού τους. (Μονάδες 10)

ii. Υπάρχει μία τουλάχιστον ρίζα της παραγώγου της. (Μονάδες 09)

Επιπλέον ερώτημα :

γ) Εξετάστε αν υπάρχουν τα όρια : $\lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{f(x)}$, $\lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{g(x)}$, $\lim\limits_{x\to 6} \frac{1}{h(x)}$

[10]

24. ΘΕΜΑ 4 – 29150

Η συνάρτηση $x(t)=(t-2)(t-1)^2$ (σε m), για κάθε χρονική στιγμή t (σε sec), καθορίζει τη θέση ενός κινητού Α, που κινήθηκε πάνω στον άξονα $x'x$ στο χρονικό διάστημα από 0 sec έως 3 sec.

α) i. Να βρείτε πότε το κινητό Α είχε ταχύτητα μηδέν. (Μονάδες 05)

ii. Να βρείτε τα χρονικά διαστήματα κατά τα οποία το κινητό Α κινήθηκε προς τα δεξιά και αυτά που κινήθηκε προς τα αριστερά. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε το συνολικό διάστημα S που διήνυσε το κινητό Α. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι κατά τη διάρκεια της κίνησης του κινητού Α, από τη χρονική στιγμή 1 sec έως τη χρονική στιγμή $\frac{5}{3}$ sec, υπάρχει τουλάχιστον μια χρονική στιγμή κατά την οποία η στιγμιαία ταχύτητα του Α ήταν ίση με τη μέση ταχύτητα που είχε το Α στο διάστημα αυτό. (Μονάδες 06)

25. ΘΕΜΑ 2 – 24283

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2-3, & \text{αν } x\in[-1,2] \\ x-1, & \text{αν } x\in(2,5] \end{cases}$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στη θέση $x_0=2$. (Μονάδες 09)

γ) Να εξετάσετε ποιες από τις υποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής, ικανοποιεί η συνάρτηση f στο διάστημα $[-1,5]$. (Μονάδες 06)

Επιπλέον ερωτήματα :

δ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $f'(x)=\frac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)}$

ε) Εξετάστε αν ισχύουν για την f οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-1,0]$.

στ) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις λύσεις της εξίσωσης $f(x)=0$.

26. ΘΕΜΑ 4 – 31793

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f(x)=lnx+1-\frac{1}{x}, x>0$ και $g(x)=\ln(lnx), x>1$.

α) Να αποδείξετε ότι η f έχει μοναδική ρίζα την $x=1$. (Μονάδες 7)

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g στο σημείο $T(e,g(e))$. Να εξετάσετε αν υπάρχει σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη της (ε). (Μονάδες 8)

γ) Υποθέτουμε ότι $g(x)<f(x)$ για κάθε $x>1$. Ένα σημείο $M(x,0)$ κινείται με σταθερή ταχύτητα $2\ cm/sec$ πάνω στον θετικό ημιάξονα, προς τα δεξιά. Θεωρούμε τα σημεία $B(x,f(x))$, $\Gamma(x,g(x))$. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου $OB\Gamma$ τη χρονική στιγμή που το M βρίσκεται στη θέση $(e^2,0)$.

(Μονάδες 10)

27. ΘΕΜΑ 2 – 26366

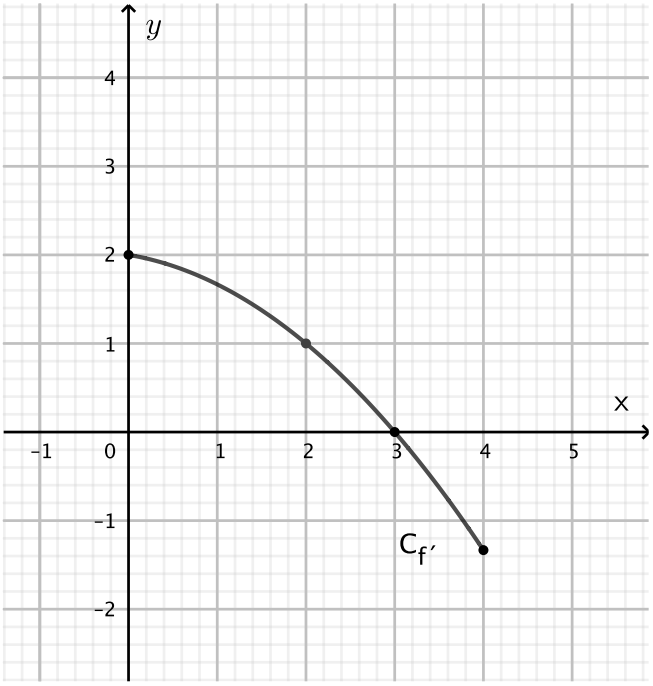
Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,4]$.

α) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_o = 2$; (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,3]$. (Μονάδες 08)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f(1)$ και $f(2)$. (Μονάδες 06)

δ) Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_0^3 f''(x)dx$. (Μονάδες 05)



28. ΘΕΜΑ 2 – 33633

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x + 3x + 2$, $x > 0$.

α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 9)

β) i. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 10)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση $f(x) + 2023 = 0$ έχει θετική λύση. (Μονάδες 6)

Επιπλέον ερωτήματα :

γ) Αν x_1 η λύση της εξίσωσης $f(x) + 2023 = 0$ και x_2 η λύση της εξίσωσης $f^3(x) + f(x) = 0$ τότε

i) Να δείξετε ότι $x_1 < x_2 < 1$

ii) Αν F μια παράγουσα της f , να δείξετε ότι η F παρουσιάζει ελάχιστο στο x_2 .

δ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(3x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 12x + 1) = 5$ έχει 2 λύσεις .

ε) Ένα σημείο κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό 2 μονάδες/s . Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου , τη στιγμή που θα έχει τεταγμένη 5 .

29. ΘΕΜΑ 4 – 33388

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x+\eta\mu x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται. (Μονάδες 5)

β) i. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\left(\frac{\pi}{2},\pi+1\right)$. (Μονάδες 7)

ii. Να δείξετε ότι η ευθεία $y=2x+1$ εφάπτεται της C_f σε άπειρα σημεία. (Μονάδες 6)

γ) Να δείξετε ότι:

i. $|f'(x)|\le 3$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 3)

ii. $|f(\beta)-f(\alpha)|\le 3|\beta-\alpha|$, για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta$. (Μονάδες 4)

30. ΘΕΜΑ 4 – 29927

Δίνεται η συνάρτηση f : (0, 1) ∪(1, +∞) → $\mathbb{R}$ με f(x) = $\frac{x}{\ln x}$.

α) Να βρείτε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (Μονάδες 6)

β) i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 5)

γ) Δίνεται η εξίσωση $e^x = x^a$ (1) με x >0. Να αποδείξετε ότι η (1) είναι ισοδύναμη με την εξίσωση f(x) = α και να βρείτε το πλήθος των λύσεων της εξίσωσης αυτής, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α. (Μονάδες 9)

31. ΘΕΜΑ 4 – 27319

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=(x-2)e^x+(x-1)lnx$, x∈(0, +∞)

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα x'x σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη x_0 στο διάστημα (1,2). (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε την παράγωγο συνάρτηση f' (Μον. 3) και να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι οριζόντια (Μον. 8) (Μονάδες 11)

γ) Ένας μαθητής σχεδίασε σε ένα λογισμικό τη γραφική παράσταση της f και διαπίστωσε ότι η γραφική της παράσταση τέμνει τον x'x στο σημείο x_0 του α) ερωτήματος αλλά και σε ένα ακόμη σημείο. Βοηθήστε το μαθητή να αποδείξει ότι πράγματι η C_f τέμνει τον άξονα x'x σε δύο ακριβώς σημεία. (Μονάδες 09)

32. ΘΕΜΑ 4 – 27455

Δίνονται οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} -1, & x < 2 \\ e^{x-2} - 2, & x \geq 2 \end{cases}$ και

$g: \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ με $g(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 3$

α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία:

i. τη συνάρτηση f και να αποδείξετε ότι $f(x) \geq -1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii. τη συνάρτηση g και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 14)

β) Να δικαιολογήσετε γιατί η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της g για κάθε $x \neq 2$. (Μονάδες 04)

γ) Δίνεται ο ισχυρισμός: «Αν $f(x) > g(x)$ κοντά στο x_0, τότε και $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) > \lim\limits_{x \to x_0} g(x)$.»

Να εξετάσετε αν είναι αληθής ή ψευδής ο παραπάνω ισχυρισμός και να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

33. ΘΕΜΑ 2 – 27082

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^3 - 3x, \ x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f. (Μονάδες 09)

β) Να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της f στο διάστημα $[2, +\infty)$ είναι το διάστημα $[-5, +\infty)$. (Μονάδες 09)

γ) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μια ακριβώς πραγματική ρίζα στο διάστημα $[2, +\infty)$. (Μονάδες 07)

34. ΘΕΜΑ 2 – 25124

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = -x^3, \ x \in (-\infty, 0]$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα. (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης. (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τον τύπο της αντίστροφης συνάρτησης f^{-1}. (Μονάδες 7)

Επιπλέον ερώτημα :

δ) Ένα σημείο κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του έχει ρυθμό μεταβολής 3 μονάδες το δευτερόλεπτο. Δίνονται τα σημεία $O(0,0)$, $A(2,0)$ και $M\big(x, f(x)\big)$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΑΜ τη στιγμή που το σημείο Μ βρίσκεται στο σημείο (-1,1).

35. ΘΕΜΑ 4 – 26605

Δίνεται συνεχής συνάρτηση f : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν :

- f^2(x) - 5 = x^2 για κάθε x $\in \mathbb{R}$
- $f(2) = 3$

α) Να αποδείξετε ότι :

i. f(x) ≠ 0 για κάθε x $\in$ R . (Μονάδες 4)

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 5}$ για κάθε x $\in \mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η συνάρτηση g με g(x) = x^2– συνx, με x $\in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, +\infty)$. (Μονάδες 7)

ii. Η εξίσωση f^2(x) = 5 + συνx έχει ακριβώς δυο ρίζες, αντίθετες μεταξύ τους, οι οποίες ανήκουν στο διάστημα (-π, π). (Μονάδες 9)

Επιπλέον ερώτημα :

γ) Υπολογίστε το όριο : $\lim\limits_{x\to 2} \frac{f^2(x)-9}{\eta\mu(x-2)}$

36. ΘΕΜΑ 4 – 32524

Έστω η συνάρτηση $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ με $g(x)=\frac{e}{x}-\ln x$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e(1-x)=x\ln x$ έχει ακριβώς μία λύση την $x=1$. (Μονάδες 06)

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2+x}{e-x\ln x-ex}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. (Μονάδες 06)

ii. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=-\infty$. (Μονάδες 07)

Επιπλέον ερωτήματα :

δ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης : $g(x-\ln x)=g(2)$

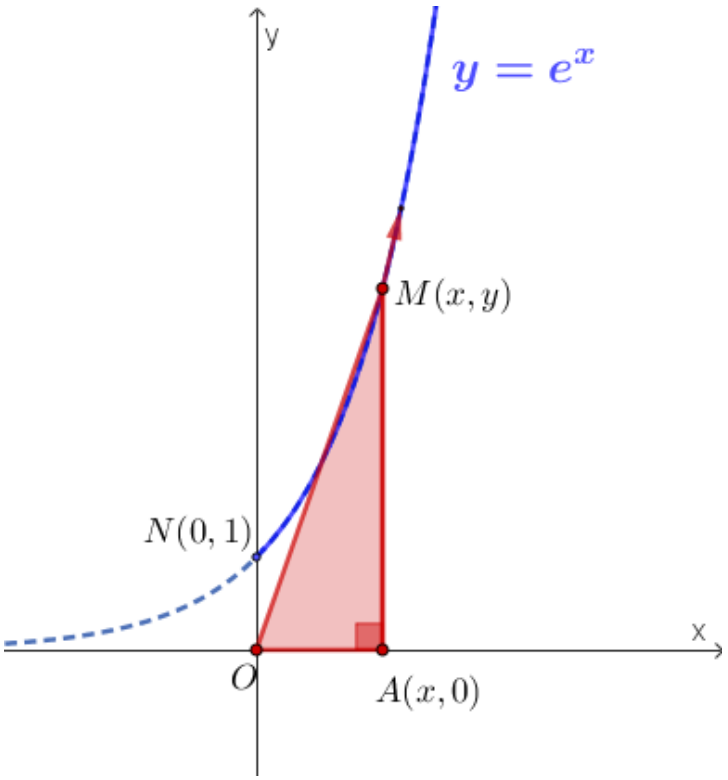
ε) Να λύσετε την ανίσωση : $e^{1-x}-x > g(1)$

στ) Να δείξετε ότι για κάθε x > 0 ισχύει : $2\cdot g(x+1) < g(x)+g(x+2)$

37. ΘΕΜΑ 4 – 28685

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + xe^x = 3e^2, x \in (0, +\infty)$ έχει μοναδική ρίζα την $x = 2$. (Μονάδες 08)

β) Ένα κινητό Μ ξεκινά από το σημείο $\mathrm{N}(0,1)$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = e^x,\ x \geq 0$ έτσι ώστε η τετμημένη του να αυξάνεται με ρυθμό $2cm/sec$.



i. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν E του τριγώνου ΟΑΜ, όπου $O(0,0), A(x,0)$ και $M(x,y)$ είναι $E(x) = \frac{1}{2}xe^x$, $x \geq 0$. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε τη θέση του κινητού, τη χρονική στιγμή t_0, κατά την οποία ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού E είναι $3e^2 cm^2/sec$. (Μονάδες 10)

38. ΘΕΜΑ 2 – 23937

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 + x - 1,\ x \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 08)

γ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f, στο σημείο της $\mathrm{A}(1, f(1))$. (Μονάδες 09)

39. ΘΕΜΑ 2 – 29211

Δίνεται η συνάρτηση f, με $f(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$, $x < 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της. (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 08)

γ) i) Να αποδείξετε ότι η f είναι "1 – 1". (Μονάδες 05)

ii) Να βρείτε την αντίστροφη της συνάρτησης f, την f^{-1}. (Μονάδες 07)

40. ΘΕΜΑ 4 – 23376

Δίνονται οι συναρτήσεις:

- $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$, $x\in\mathbb{R}$ και
- $g(x)=\ln x$, $x\in(0,+\infty)$.

Αν γνωρίζουμε ότι η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε:

α) Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση $h=g\circ f$. (Μονάδες 07)

β) Να αποδείξετε ότι:

iii. η συνάρτηση h είναι περιττή. (Μονάδες 04)

iv. η συνάρτηση h είναι "1-1". (Μονάδες 06)

γ) Να λυθεί η εξίσωση $h(x-1)+h\left(\ln\frac{1}{x}\right)=0$, $x>0$. (Μονάδες 08)

41. ΘΕΜΑ 4 – 23200

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια γνησίως μονότονη συνάρτηση της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο με τεταγμένη 3 και διέρχεται από το σημείο $A(1,\ln 2)$.

α) Να βρείτε τη μονοτονία της. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει $f(\alpha\ln\alpha)\le f(\ln\alpha)$ (Μονάδες 7)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f\left(e^{x-1}+\ln x\right)=\ln 2$. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)+(3-\ln 2)x-3$, $x\in\mathbb{R}$. Να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση g δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 7)

Επιπλέον ερωτήματα :

ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=x^3$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

στ) Αν x_0 η ρίζα της εξίσωσης $f(x)=x^3$, να δείξετε ότι $ln\, f(x_0)<0$.

42. ΘΕΜΑ 4 – 23375

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδειχθεί ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ είναι $f'(x)=-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. (Μονάδες 06)

β) Αφού πρώτα δικαιολογήσετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται, να αποδειχθεί ότι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης είναι το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

γ) Να λυθεί η ανίσωση $f^{-1}\left(x+f\left(x\right)\right)>x$, $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

43. ΘΕΜΑ 4 – 23199

Έστω $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση ώστε για κάθε $x>1$ να ισχύει

$$xf(x)f'(x)=\frac{1}{2} \text{ και } f(e)=1.$$

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-\ln x$, $x>1$ είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της f. (Μονάδες 9)

Έστω $f(x)=\sqrt{\ln x}$, $x>1$.

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $A(-e,0)$ και $B(e,1)$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο Β. (Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x>1$ ισχύει $\dfrac{1}{x+1}<f^2(x+1)-f^2(x)<\dfrac{1}{x}$. (Μονάδες 8)

44. ΘΕΜΑ 3 – 34026

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=1-2\ln x$, $x>0$.

α) Να βρείτε:

i. Την μονοτονία της συνάρτησης f. (Μονάδες 5)

ii. Το πρόσημο της f. (Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g\left(x\right)=\dfrac{\ln x}{x^2}$, $x>0$,έχει μέγιστη τιμή την $g\left(e^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{1}{2e}$. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης g. (Μονάδες 6)

45. ΘΕΜΑ 2 – 34025

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$, $x\in(1,+\infty)$.

α) i. Να δείξετε ότι $f'(x)<0$ με $x\in(1,+\infty)$. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 6)

β) i. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της f. (Μονάδες 9)

46. ΘΕΜΑ 4 – 23215

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1. (Μονάδες 5)

Δίνεται επιπλέον ότι

- η συνάρτηση f' είναι συνεχής,
- $f(0)=-1$ και $f(2)=1$.

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχει εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$. (Μονάδες 5)

γ)

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα (Μονάδες 4)

ii.Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_o\in(0,2)$. (Μονάδες 5)

δ) Αν g είναι μια συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $g'(x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι η g παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο x_o. (Μονάδες 6)

47. ΘΕΜΑ 4 – 36814

Ένας αγρότης θέλει να περιφράξει σε ένα χωράφι μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις x, y ώστε να έχει εμβαδόν $800\ m^2$. Η μία πλευρά της περιοχής, μήκους x, θα είναι πέτρινη, ενώ για τις υπόλοιπες πλευρές θα χρησιμοποιήσει συρμάτινο φράχτη. Αν το κόστος περίφραξης για την πέτρινη πλευρά είναι 6 ευρώ ανά m και για τον συρμάτινο φράχτη είναι 2 ευρώ ανά m, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος της περίφραξης, συναρτήσει του x, είναι:

$$K(x)=8x+\frac{3200}{x}, x>0$$ (Μονάδες 08)

β) Να βρείτε ποιες θα πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κτήματος ώστε το συνολικό κόστος περίφραξης να είναι ελάχιστο, και να προσδιορίσετε την ελάχιστη τιμή του. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους αυξάνεται για κάθε $x>0$. (Μονάδες 07)

48. ΘΕΜΑ 4 – 33596

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln x$ και το σημείο $\mathrm{A}(0,2)$. Αν $\mathrm{K}(x,\ln x)$ με $x>0$ τυχαίο σημείο της C_f και $\mathrm{M}(x_o,\ln x_o)$ με $x_o>0$ το σημείο εκείνο της C_f που απέχει την ελάχιστη απόσταση από το σημείο A, να αποδείξετε ότι:

α) η απόσταση AK συναρτήσει του $x>0$ είναι $d(x)=\sqrt{x^2+\ln^2 x-4\ln x+4}$. (Μονάδες 5)

β) $x_o^2+\ln x_o-2=0$. (Μονάδες 7)

γ) η εφαπτομένη της C_f στο Μ

i. είναι κάθετη στην ΑΜ. (Μονάδες 6)

ii. τέμνει τον άξονα xx' στο σημείο $(x_o^3-x_o,0)$. (Μονάδες 7)

49. ΘΕΜΑ 4 – 27092

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f'

μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού.

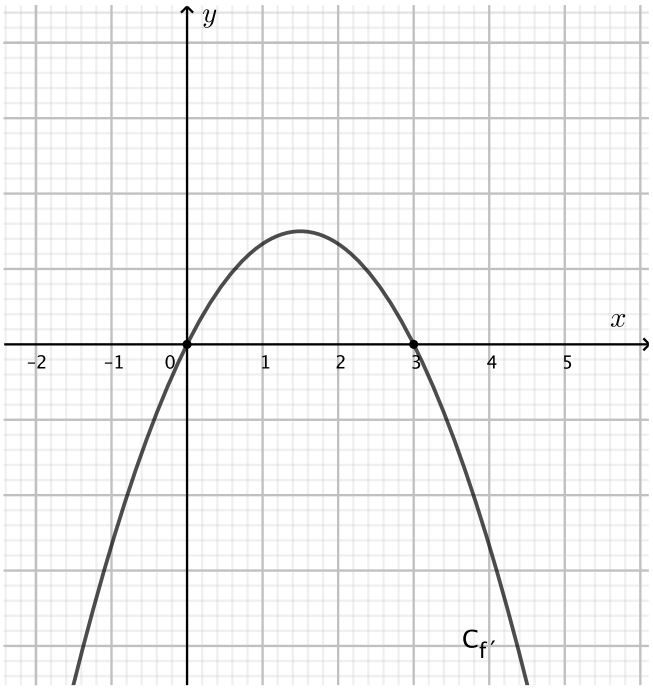
α) Με τη βοήθεια του σχήματος, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 06)

β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(0,-1)$ και $B(3,2)$,

τότε να βρείτε τα ακρότατα της f. (Μονάδες 04)

γ) Να προσδιορίσετε τον τύπο της f. (Μονάδες 08)

δ) Να βρείτε το πλήθος ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$, στο διάστημα $(0,3)$. (Μονάδες 07)



Επιπλέον ερώτημα :

ε) Αν $f(x)=-\frac{2}{9}x^3+x^2-1$ και $g(x)=f(\eta\mu x)$, $x\in[0\,,2\pi]$.

Μελετήστε την g ως προς τα ακρότατα.

50. ΘΕΜΑ 4 – 33642

Έστω f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία $f(0)=1$

και για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x)+2x=f'(x)+x^2$

α) Να αποδείξετε ότι αν $g(x)=f(x)-x^2$, τότε ισχύει

i. $g'(x)=g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 5)

ii. $f(x)=e^x+x^2$, $x\in\mathbb{R}$ (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι

i. Υπάρχει μοναδικό σημείο $M(x_o, f(x_o))$, $x_o\in(-1, 0)$ στο οποίο η εφαπτομένη της C_f είναι οριζόντια. (Μονάδες 7)

ii. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_o και για την ελάχιστη τιμή m της συνάρτησης ισχύει $e^{-1}<m<2$. (Μονάδες 7)

51. ΘΕΜΑ 4 – 29149

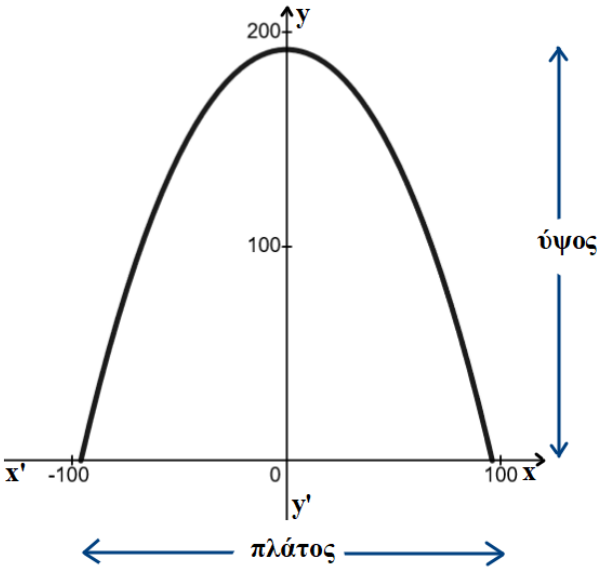
Δίνεται η συνάρτηση $g:[-96,96]\to\mathbb{R}$ με $g(x)=e^{\frac{x}{96}}+e^{-\frac{x}{96}}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 12)

β) Αν $\alpha>0$ και $f(x)=2\alpha\left[g(96)-g(x)\right]$, $x\in[-96,96]$ τότε:

i. Να αποδείξετε ότι $f(x)>0$, για κάθε $x\in(-96,96)$. (Μονάδες 06)

ii. Να προσδιορίσετε τον αριθμό α όταν επιπλέον, είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, παριστάνει την αψίδα του Σεντ Λούις η οποία έχει την ιδιότητα το πλάτος της να ισούται με το ύψος της. (Μονάδες 07)



Επιπλέον ερώτημα :

γ) Δίνεται η $h(x)=g(x)-e^{\frac{x}{96}}-x$. Να βρείτε το σύνολο τιμών της h.

52. ΘΕΜΑ 4 – 34441

Μία βιοτεχνία που ράβει ρούχα πρόκειται να ετοιμάσει μία παραγγελία για 600 παντελόνια σε μία ημέρα. Για το λόγο αυτό θα απασχολήσει ράφτες (άνδρες και γυναίκες), από το εργατικό δυναμικό της, που ράβουν 6 παντελόνια την ώρα και θα αμείβονται με 12 ευρώ την ώρα. Για τον συντονισμό και την εποπτεία των ραφτών, οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα απασχολήσουν και μία από τις γυναίκες μόδιστρους της βιοτεχνίας ως επιστάτρια, την οποία θα πληρώνουν 20 ευρώ την ώρα. Επιπλέον οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας θα πληρώνουν ασφαλιστικές εισφορές, 20 ευρώ την ημέρα για κάθε εργαζόμενο, συμπεριλαμβανομένης και της γυναίκας επιστάτριας. Αν x είναι ο αριθμός των ραφτών (άνδρες και γυναίκες) που θα απασχολήσει η βιοτεχνία για την διεκπεραίωση της παραγγελίας τότε:

α) Να αποδείξετε ότι το συνολικό κόστος για την εκτέλεση της παραγγελίας είναι:

$$\mathrm{K}(x) = 20x + \frac{2000}{x} + 1220 \quad \text{ευρώ με } x > 0 \ . \qquad \text{(Μονάδες 10)}$$

β) Να αποδείξετε ότι αν οι ιδιοκτήτες της βιοτεχνίας απασχολήσουν για την εν λόγω παραγγελία, 10 ράφτες, η παραγγελία αυτή θα εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε το ελάχιστο κόστος. (Μονάδες 3)

δ) Πόσες ώρες θα απασχοληθούν οι ράφτες, πέραν του οκταώρου (υπερωρία), ώστε η παραγγελία να εκτελεστεί με το ελάχιστο κόστος; (Μονάδες 5)

53. ΘΕΜΑ 4 – 26633

Με συρματόπλεγμα μήκους 400 μέτρων, έχουμε περιφράξει μια περιοχή σχήματος ορθογωνίου, από τις τρείς πλευρές της, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η τέταρτη πλευρά, με μήκος x μέτρα, είναι ευθυγραμμισμένη κατά μήκος της όχθης ενός ποταμού.

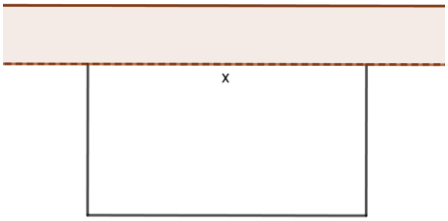
α) Να αποδείξετε ότι το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής συναρτήσει του μήκους x, δίνεται από τον τύπο:

$$\mathrm{E}(x) = 200x - \frac{1}{2}x^2 \text{ με } 0 < x < 400 . \qquad \text{(Μονάδες 8)}$$

β) Να υπολογίσετε την τιμή του x, για την οποία το εμβαδό $\mathrm{E}(x)$ της περιφραγμένης περιοχής γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

γ) Να υπολογίσετε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού $\mathrm{E}(x)$ της περιφραγμένης περιοχής. (Μονάδες 5)

δ) Ο Ιάσωνας ισχυρίζεται ότι υπάρχει μοναδική τιμή του x, που ανήκει στο διάστημα (0, 200) για την οποία το εμβαδό της περιφραγμένης περιοχής, ισούται με 300·π τετραγωνικά μέτρα. Είναι αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός του Ιάσωνα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



54. ΘΕΜΑ 4 – 34440

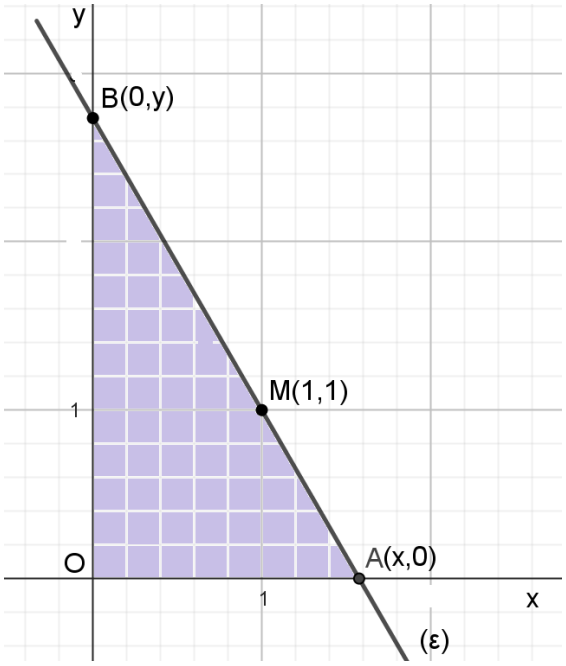
Σε ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων με αρχή των αξόνων το O(0,0), δίνεται το σημείο $\mathrm{M}(1,1)$. Μια ευθεία (ε) που διέρχεται από το Μ τέμνει τους θετικούς ημιάξονες $\mathrm{O}x$ και $\mathrm{O}y$ στα σημεία $\mathrm{A}(x,0),\ x>0$ και $\mathrm{B}(0,y),\ y>0$ αντιστοίχως, όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.

α) Για $x \in (1, +\infty)$ να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ συναρτήσει του x δίνεται από τον τύπο: $\mathrm{E}(x)=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$. (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι για $x=2$ το εμβαδό του τριγώνου ΟΑΒ παίρνει την ελάχιστη τιμή, η οποία και να βρεθεί . (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την εφαπτομένη (ζ) της γραφικής παράστασης της E, στο σημείο $(3,\mathrm{E}(3))$ και τα σημεία Γ, Δ στα οποία αυτή τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)

δ) Ένα σημείο $\mathrm{K}(x,y)$ κινείται πάνω στην ευθεία (ζ), και η τεταγμένη του αυξάνεται με ρυθμό μεταβολής 3 μονάδες/sec. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του. (Μονάδες 6)



Επιπλέον ερωτήματα :

ε) Δίνεται συνάρτηση $f(x)=E(x)$, $x \in (1,3]$

i) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\frac{5}{2}$

ii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=3$

iii) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha$.

iv) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f'(x)+f(x)=0$.

v) Εξετάστε αν υπάρχει σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη είναι παράλληλη στην ευθεία $2y-x=0$.

Στη συνέχεια δείξτε ότι η εξίσωση $f(x)-\frac{1}{2}x=0$ έχει το πολύ μια ρίζα.

vi) Να βρείτε την εφαπτομένη της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $2y+3x=0$.

55. ΘΕΜΑ 4 – 29644

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνεχούς συνάρτησης f στο διάστημα [-3,2] η οποία παρουσιάζει μέγιστο στο 0 το 3 και τέμνει τον άξονα x'x στα σημεία Α και Β.

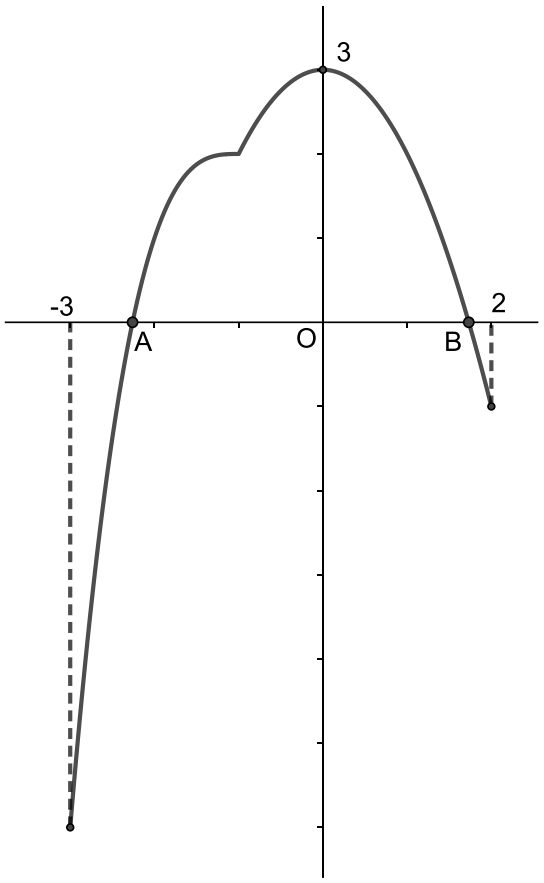
Έστω g η συνάρτηση με $g(x) = f(x) + x, x \in [-3,2]$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο [-3,2]. (Μονάδες 05)

ii. Η εξίσωση $g(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα. (Μονάδες 10)

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο (-1,2), να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο που η f παρουσιάζει μέγιστο, έχει εξίσωση $y = x + 3$. (Μονάδες 10)



Επιπλέον ερωτήματα :

Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της παραγωγίσιμης συνάρτησης f τότε :

γ) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha)(x-\beta)}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο.

δ) Υπολογίστε τα όρια : i) $\lim\limits_{x \to \alpha^-} \frac{1}{f(x)}$ ii) $\lim\limits_{x \to \beta} \frac{n\mu(f(x))}{f(x)}$

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) \cdot \eta\mu\xi + f(\xi)\sigma\upsilon\nu\xi = 0$.

στ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x) \cdot \eta\mu x + f(x)\sigma\upsilon\nu x = 0$ έχει τουλάχιστον δυο ρίζες.

56. ΘΕΜΑ 4 – 28337

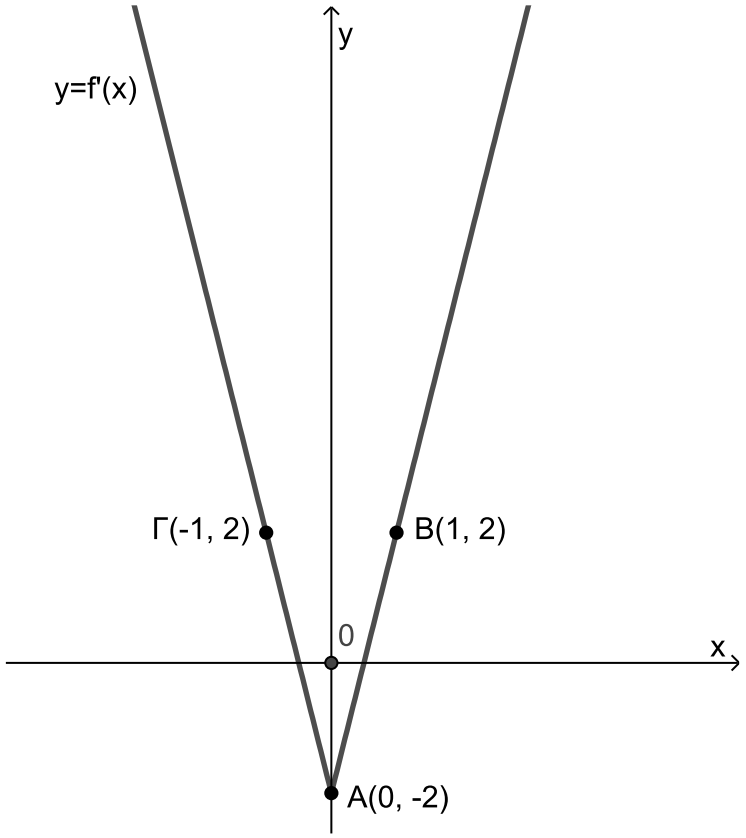
Έστω $\mathrm{f}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία παραγωγίσιμη συνάρτηση. Η γραφική παράσταση C της παραγώγου f', είναι οι δύο ημιευθείες που φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. Αυτές έχουν κοινή αρχή το σημείο $\mathrm{A}(0\,,-2)$ και διέρχονται η μία από το σημείο $\mathrm{B}(1\,,2)$ και η άλλη από το $\Gamma(-1\,,2)$.

α) Να βρείτε τα σημεία τομής της C με τον άξονα $\mathrm{x}'\mathrm{x}$. (Μονάδες 6)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 6)

γ) Να προσδιορίσετε τις θέσεις και το είδος των τοπικών ακροτάτων της f. (Μονάδες 6)

δ) Έστω ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $\Delta(1,0)$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\mathrm{A}\Delta$ εφάπτεται της γραφικής παράστασης της f. (Μονάδες 7)



Επιπλέον ερωτήματα :

ε) Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της δεύτερης παραγώγου της f.

στ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x^3-3x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

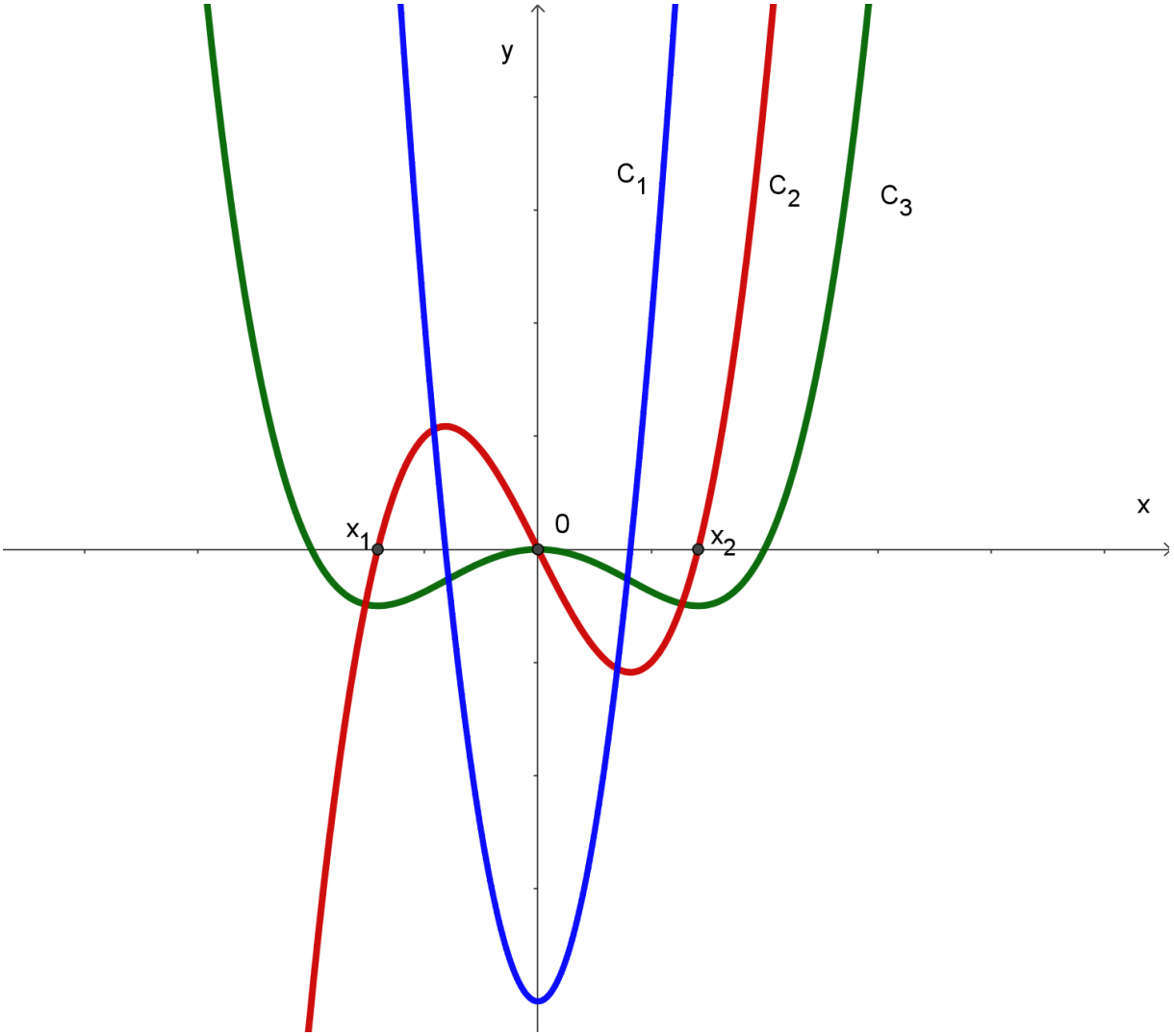
i) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ii) Για τις διάφορες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x)=\alpha$.

iii) Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x)+4x=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα x_0 για την οποία ισχύει $1<e^{x_0}<e$

57. ΘΕΜΑ 2 – 32694

Στο παρακάτω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_2 , C_3 τριών συναρτήσεων f , f' και F , όπου F μία αρχική της f στο $\mathbb{R}$. Με δεδομένο ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι η C_2,



α)

i. Να μεταφέρετε τον παρακάτω πίνακα στην κόλλα σας και να τον συμπληρώσετε με το πρόσημο της f καθώς και την μονοτονία της F . (Μονάδες 10)

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	$+\infty$
$F'=f$		0	0	0	
F					

ii. να βρείτε το πλήθος καθώς και το είδος των τοπικών ακροτάτων της F . (Μονάδες 08)

β) να δικαιολογήσετε γιατί οι γραφικές παραστάσεις C_1, C_3 με την σειρά που δίνονται αντιστοιχούν στις συναρτήσεις f' και F . (Μονάδες 07)

Επιπλέον ερώτημα :

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-4x$. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{n\mu x}$

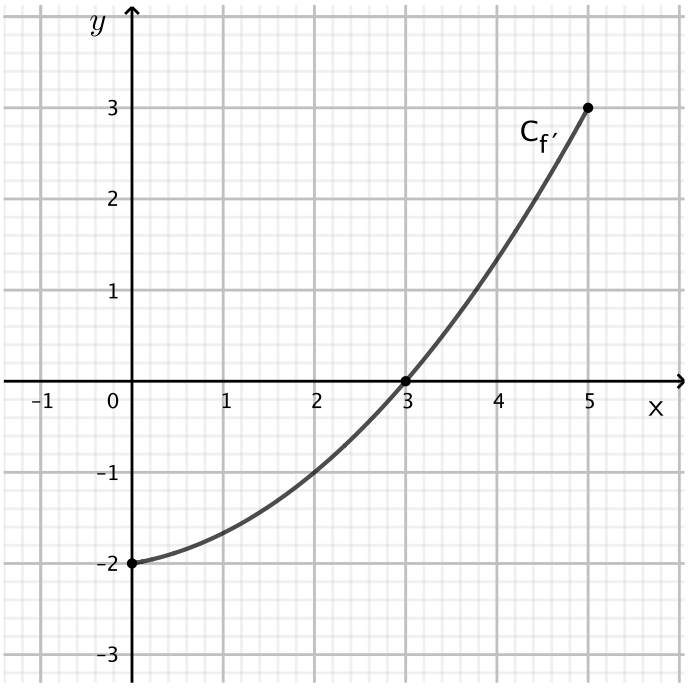
58. ΘΕΜΑ 2 – 26707

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[0,5]$.

α) Ποιες είναι οι ρίζες της εξίσωσης $f'(x) = 0$; (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,3]$ και γνησίως αύξουσα στο $[3,5]$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το είδος ακροτάτου που παρουσιάζει η f στο $x_o = 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 09)



Επιπλέον ερωτήματα :

δ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 27x + 46$, $x \in [0,5]$

i) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

iii) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

iv) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = e^x - e^5 - 8$.

Εξετάστε αν έχουν κοινά σημεία οι γραφικές παραστάσεις των f και g .

59. ΘΕΜΑ 2

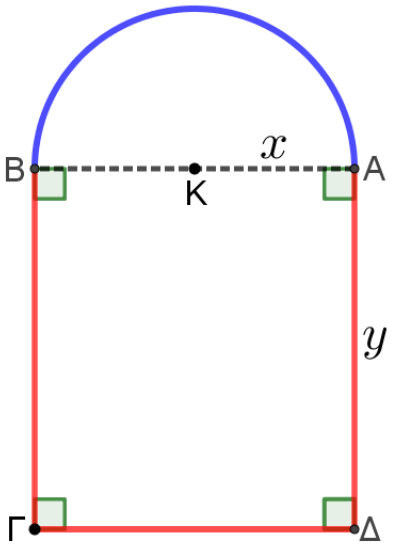
Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 - 4x + 2,\ x \in [0,2]$.

α) Να βρείτε τα κρίσιμα σημεία της συνάρτησης. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 13)

60. ΘΕΜΑ 4 – 28534

Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα παράθυρο σε μια εκκλησία, το οποίο να αποτελείται από έναν ημικυκλικό δίσκο και από ένα ορθογώνιο, όπως δείχνει το παρακάτω σχήμα. Η συνολική περίμετρος του παραθύρου θέλουμε να είναι σταθερή ίση με $4\ m$, αλλά το συνολικό εμβαδό του παραθύρου να είναι το μεγαλύτερο δυνατό. Έστω ότι η ακτίνα του ημικυκλίου είναι $(AK) = x\ m$ και το ύψος του ορθογωνίου είναι $(A\Delta) = y\ m$. Ονομάζουμε $E(x)$ το συνολικό εμβαδόν του παραθύρου.



α) Να αποδείξετε ότι $y = -\frac{\pi+2}{2} \cdot x + 2$ και $E(x) = -\frac{\pi+4}{2} \cdot x^2 + 4x$, με $x \in \left(0, \frac{4}{\pi+2}\right)$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή του συνολικού εμβαδού του παραθύρου. (Μονάδες 9)

γ) Ονομάζουμε x_0 την τιμή του x που μεγιστοποιεί το εμβαδόν $E(x)$ και $E(x_0)$ το μέγιστο εμβαδό.

Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{ln(E(x))}{E(x)-E(x_0)}$. (Μονάδες 8)

61. ΘΕΜΑ 2 – 25764

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ x^3, & x < 0 \end{cases}$.

α) Να εξετάσετε αν είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 13)

62. ΘΕΜΑ 2 – 25761

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x(\ln x - 1) + 1,\ x > 0$.

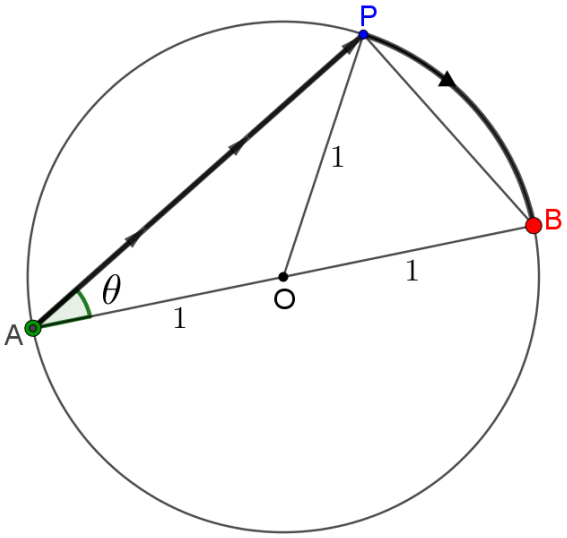
α) Να την μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 13)

β) Να λύσετε την εξίσωση $x\ln x + 1 = x$. (Μονάδες 12)

63. ΘΕΜΑ 4 – 28532

Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο Α μια κυκλικής λίμνης ακτίνας $1\ Km$ και θέλει να φτάσει στο σημείο Β της λίμνης ώστε η AB να είναι διάμετρος του κύκλου. Θέλει να τα καταφέρει συνδυάζοντας δύο είδη κινήσεων: να κωπηλατήσει αρχικά με βάρκα κατά μήκος του ευθυγράμμου τμήματος AP έχοντας ταχύτητα $3\ Km/h$ και στη συνέχεια τρέχοντας πάνω στην κυκλική περιφέρεια κατά μήκος του τόξου PB με ταχύτητα $6\ Km/h$.

Έστω ότι η μεταβλητή γωνία $P\hat{A}B$ είναι $\theta\ rad$.



α) Να αποδείξετε ότι $(AP) = 2συνθ$ και ότι ο συνολικός χρόνος που θα χρειαστεί ο άνδρας για να κάνει τη μετάβαση από το Α στο Β είναι $f(\theta) = \frac{1}{3} \cdot (2συνθ + \theta)$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε την τιμή της γωνίας θ για την οποία ο συνολικός χρόνος μετάβασης γίνεται μέγιστος. (Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(\theta)$ είναι $f\left(\left(0, \frac{\pi}{2}\right)\right) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi+6\sqrt{3}}{18}\right]$. (Μονάδες 7)

Δίνονται: το μήκος S ενός τόξου που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία $x\ rad$ σε κύκλο ακτίνας R, είναι $S = x \cdot R$ και ότι (απόσταση) = (χρόνος) x (ταχύτητα).

64. ΘΕΜΑ 4 – 24587

Δίνεται η συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$ και η ευθεία $\varepsilon: y = x$. Γνωρίζουμε ότι η απόσταση ενός σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f από την ευθεία ε,

είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2}\ |x_0 - lnx_0|$.

α) Να αποδείξετε ότι η απόσταση του σημείου $M(x_0, y_0)$ της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f

από την ευθεία $\varepsilon: y = x$, είναι $d(M, \varepsilon) = \sqrt{2}\ (x_0 - lnx_0)$. (Μονάδες 05)

β) i) Να βρείτε το σημείο της C_f, το οποίο απέχει την ελάχιστη απόσταση από την ευθεία ε. (Μονάδες 12)

ii) Να βρείτε την ελάχιστη απόσταση. (Μονάδες 03)

γ) Να βρείτε το σημείο της C_f στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη με την ευθεία $y = x$

και στη συνέχεια να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης. (Μονάδες 05)

65. ΘΕΜΑ 4 – 27650

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = lnx, x > 0$ και τα σημεία $A(0,1)$ και $B(1,3)$.

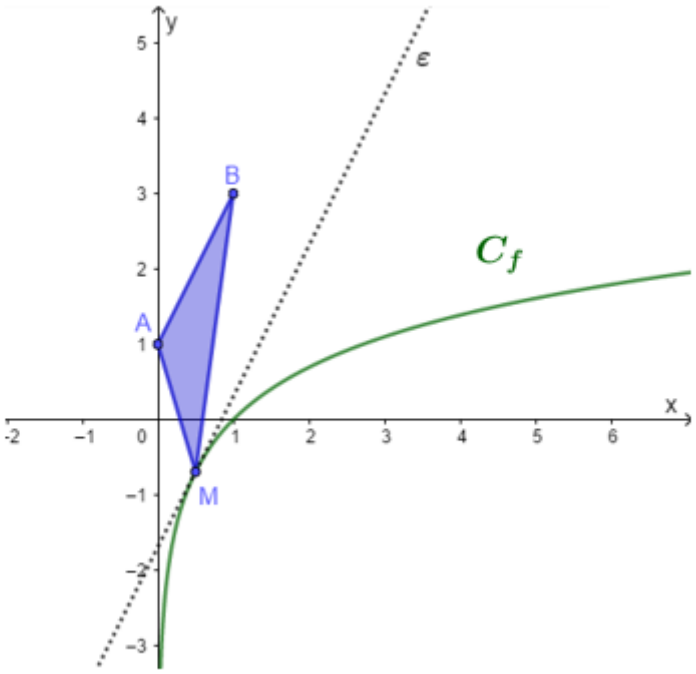
α)

i. Να βρείτε σημείο M_0 της C_f τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη να είναι παράλληλη προς την ευθεία AB.

(Μονάδες 06)

ii. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο M_0. (Μονάδες 02)

β) Έστω $E(x) = \frac{1}{2}(2x + 1 - lnx), x > 0$ η συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου ABM, όπου M ένα τυχαίο σημείο της γραφικής παράστασης της f. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τριγώνου γίνεται ελάχιστο όταν το σημείο M ταυτίζεται με το M_0 του α) ερωτήματος. (Μονάδες 10)



γ) Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο M_1 της C_f με τετμημένη $x_1 \in (1,2)$ τέτοιο, ώστε το τρίγωνο ABM_1 να είναι ορθογώνιο στην κορυφή A. (Μονάδες 07)

Επιπλέον ερώτημα :

δ) Ένα σημείο Μ κινείται πάνω στη γραφική παράσταση της f και η τετμημένη του μεταβάλλεται με ρυθμό $\frac{1}{8}$ μον/s. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΑΒΜ τη στιγμή κατά την οποία το Μ βρίσκεται πάνω στον άξονα x'x.

66. ΘΕΜΑ 4 – 23311

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο με άθροισμα καθέτων πλευρών ίσο με 1.

Αν η μία κάθετη πλευρά του έχει μήκος x , τότε:

α) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει το εμβαδόν του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 06)

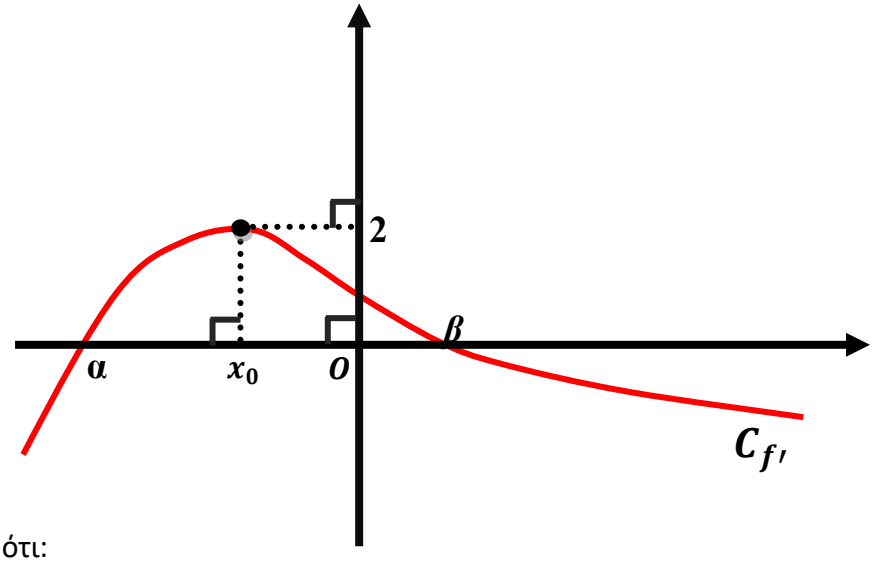
β) Να βρείτε την συνάρτηση που εκφράζει την υποτείνουσα του τριγώνου συναρτήσει του x και να την εξετάσετε ως προς τα ακρότατα. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η μέγιστη τιμή του ύψους $υ$ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα του τριγώνου είναι ίση με $\frac{\sqrt{2}}{4}$, όταν $x = \frac{1}{2}$. (Μονάδες 07)

δ) Αν θ η οξεία γωνία που βρίσκεται απέναντι από την πλευρά x, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της θ τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x(t_0) = \frac{1}{2}$, δεδομένου ότι η πλευρά x αυξάνεται με σταθερό ρυθμό $0{,}1\ m/sec$. (Μονάδες 05)

67. ΘΕΜΑ 4 – 23210

Θεωρούμε συνάρτηση $f: R \to R$ δύο φορές παραγωγίσιμη στο R και στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.



Γνωρίζουμε ότι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$,
- τα $α, β$ είναι οι τετμημένες των μοναδικών δύο σημείων στα οποία τέμνει τον άξονα $x'x$ η γραφική παράσταση της παραγώγου συνάρτησης $f'(x)$.
- $f(α) < 0,\ f(β) > 0$.
- η γραφική παράσταση της $f'(x)$ παρουσιάζει ολικό ακρότατο στη θέση x_0.

α) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα τοπικά ακρότατα η $f(x)$. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει τρεις ακριβώς πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in R$, ισχύει $f(x+1) - f(x) \leq 2$. (Μονάδες 8)

68. ΘΕΜΑ 2 – 23197

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-2x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε δυο διαφορετικούς αριθμούς α, β ώστε $f(\alpha)=f(\beta)$. Κατόπιν να αιτιολογήσετε γιατί η συνάρτηση f δεν αντιστρέφεται. (Μονάδες 9)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση, με τη βοήθεια της παραγώγου ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 8)

γ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση C_f της f. (Μονάδες 8)

Επιπλέον ερωτήματα :

Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=e^{x-1}-x+1$

δ) Μελετήστε την g ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ε) Να δείξετε ότι $f(x)+g(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

69. ΘΕΜΑ 3 – 33994

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ τέτοια, ώστε:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\right)=0.$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$. (Μονάδες 08)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ με $f'(0)=0$. (Μονάδες 08)

γ) Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)\cdot\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$.

i. Να προσδιορίσετε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g, στο σημείο $(0,g(0))$. (Μονάδες 04)

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g δεν είναι κυρτή. (Μονάδες 05)

70. ΘΕΜΑ 2 – 35172

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\ln(1+x^2)$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της. (Μονάδες 12)

β) Να προσδιορίσετε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή ή κοίλη και να βρείτε τα σημεία καμπής της. (Μονάδες 13)

Επιπλέον ερώτημα :

γ) Να δείξετε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(x+1)+f(x)>0$.

71. ΘΕΜΑ 2 – 34438

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+24x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την πρώτη και δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης f και να λύσετε τις εξισώσεις:

$f'(x)=0$ και $f''(x)=0$. (Μονάδες 8)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 9)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τις θέσεις των σημείων καμπής.

(Μονάδες 8)

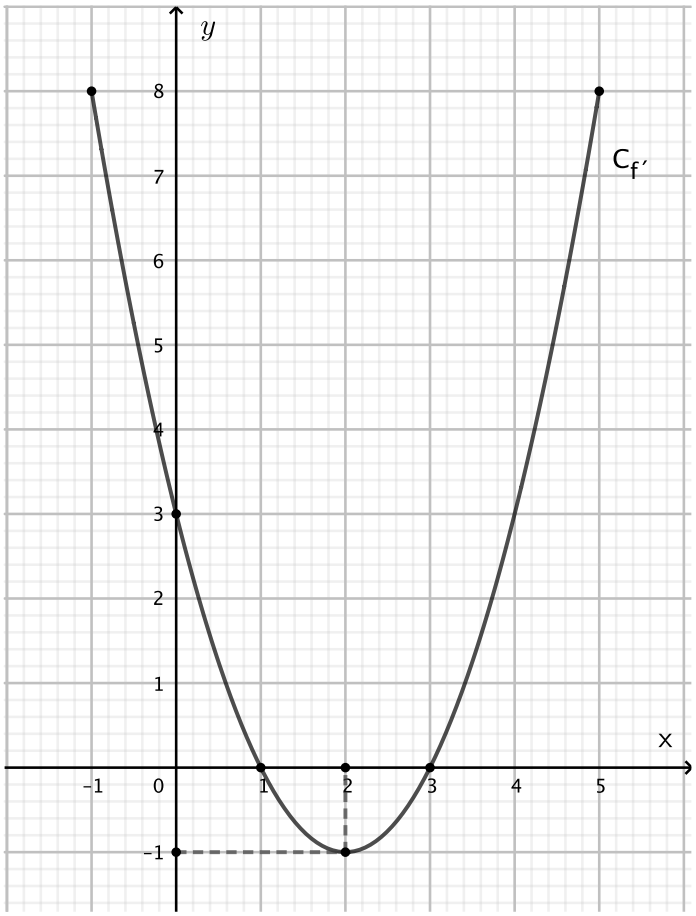
72. ΘΕΜΑ 2 – 26736

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας πολυωνυμικής συνάρτησης f τρίτου βαθμού η οποία είναι ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[-1,5]$.

α) Αν η κορυφή της παραβολής της γραφικής παράστασης της παραγώγου f' είναι το σημείο $A(2,-1)$, με τη βοήθεια του σχήματος να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο $[-1,2]$ και κυρτή στο $[2,5]$. (Μονάδες 10)

β) Ποια είναι η κλίση της f στο $x_o=2$; (Μονάδες 06)

γ) Αν επιπλέον ισχύει ότι $3f(2)-1=0$, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της με τετμημένη $x_o=2$. (Μονάδες 09)



Επιπλέον ερωτήματα :

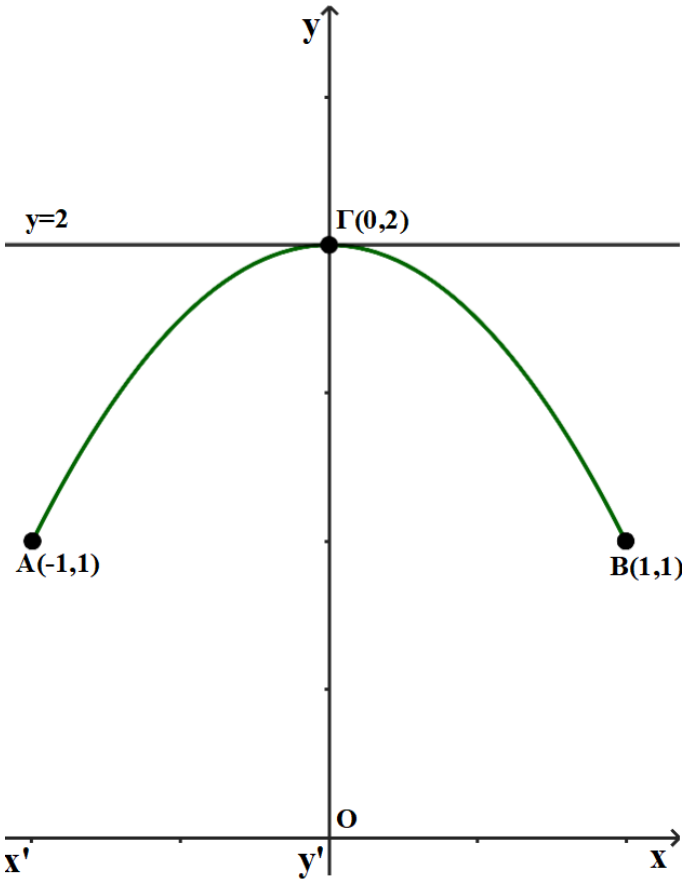
δ) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=(x-1)\cdot(x-3)\cdot f'(x)$. Μελετήστε την h ως προς το πρόσημο.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)+\xi f''(\xi)=0$.

στ) Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi\in(1,3)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)>0$.

73. ΘΕΜΑ 2 – 32799

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της παραγώγου μιας συνάρτησης $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ και η ευθεία $y=2$. Αν η γραφική παράσταση της f' διέρχεται από τα σημεία $\Α(-1,1)$, $\Β(1,1)$ και $\Γ(0,2)$ τότε με βάση το παρακάτω σχήμα:



α) Να εξηγήσετε γιατί ισχύει: $1\le f'(x)\le 2$, για κάθε $x\in[-1,1]$. (Μονάδες 07)

β) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία. (Μονάδες 08)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 10)

74. ΘΕΜΑ 4 – 31550

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x$. Να αποδείξετε ότι

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο σε κάποιο $x_o\in(\frac{1}{2},1)$ το οποίο είναι μοναδικό. (Μονάδες 7)

γ) το ολικό ελάχιστο είναι το $\frac{1}{x_o}+x_o$. (Μονάδες 6)

δ) η εξίσωση $f(x)=2$ είναι αδύνατη. (Μονάδες 6)

75. ΘΕΜΑ 4 – 31549

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $x>0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $2022^{2023}>2023^{2022}$. (Μονάδες 6)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τα κοίλα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)

δ) Εφαρμόζοντας το Θεώρημα Μέσης Τιμής για την f σε καθένα από τα διαστήματα $[2021,2022]$ και $[2022,2023]$ να αποδείξετε ότι $2f(2022)<f(2021)+f(2023)$. (Μονάδες 7)

Δίνεται $e\simeq 2,71$.

76. ΘΕΜΑ 2 – 31527

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+3x^2-8,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να την μελετήσετε ως προς την κυρτότητα. (Μόρια 10)

β) Έστω (ε) η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης C_f της f στο σημείο A(1, f(1)).

i. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε). (Μόρια 7)

ii. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της C_f, διαφορετικό από το Α, στο οποίο η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην (ε). (Μόρια 8)

77. ΘΕΜΑ 4 – 27667

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+\dfrac{x^2}{2}+2023, x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

i) η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$. (Μονάδες 05)

ii) το σύνολο τιμών της f' είναι το $\mathbb{R}$. (Μονάδες 06)

β) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η εξίσωση $e^x+x=\alpha$ έχει μοναδική ρίζα ρ. (Μονάδες 05)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού α, η συνάρτηση $g(x)=\alpha x-f(x)$ με $x\in\mathbb{R}$, έχει μέγιστη τιμή την $\rho f'(\rho)-f(\rho)$. (Μονάδες 09)

Επιπλέον ερωτήματα :

δ) Αν η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_0 να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f ισούται με $\frac{x_0^2}{2}-x_0+2023$

ε) Να δείξετε ότι ισχύει $f(x)>2023$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

78. ΘΕΜΑ 4 – 25745

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο [0,2], δύο φορές παραγωγίσιμη στο (0,2) και ισχύουν $f(1)=1$, $f'(1)=0$, $f(0)=f(2)$ και

$$(f'(x))^2+f(x)\cdot f''(x)<0\text{, για κάθε } x\in(0,2)$$

α) Να αποδείξετε ότι:

i. $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,2)$. (Μονάδες 5)

ii. $f(x)>0$ για κάθε $x\in(0,2)$. (Μονάδες 5)

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία και να βρείτε τις θέσεις των ακροτάτων. (Μονάδες 8)

Επιπλέον ερωτήματα :

Δίνεται ότι ισχύει $f^2(x)+x^2-2x=0$ για κάθε $x\in[0,2]$.

δ) Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της f είναι ημικύκλιο .

ε) Να δείξετε ότι $f(x)=\sqrt{-x^2+2x}$, για κάθε $x\in[0,2]$.

στ) Να δείξετε ότι $0\le f(x)\le 1$ για κάθε $x\in[0,2]$.

79. ΘΕΜΑ 4 – 24760

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln x-\lambda x,\ x>0$ όπου $\lambda\in\mathbb{R}$. Αν ισχύει $e-\lambda=e^e-1-\lambda e$, να αποδείξετε ότι :

α) η f είναι κυρτή. (Μονάδες 6)

β) υπάρχει ακριβώς ένα $x_o\in(1,e)$ με $f'(x_o)=0$. (Μονάδες 6)

γ) για την f' ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο $[1,e]$. (Μονάδες 6)

δ) η f παρουσιάζει ολικό ακρότατο στο x_o που είναι το $e^{x_o}(1-x_o)+1-\ln x_o$. (Μονάδες 7)

Επιπλέον ερωτήματα :

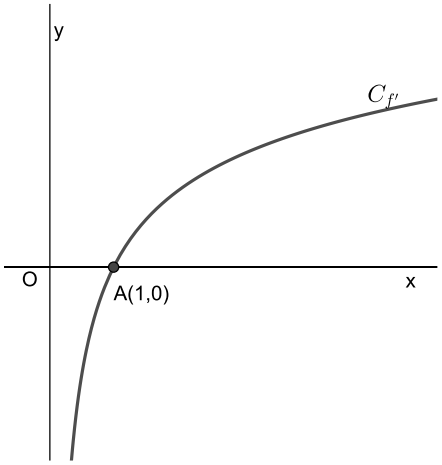
i) Μελετήστε την $h(x)=f(x+1)-f(x)$ ως προς τη μονοτονία .

ii) Μελετήστε την $g(x)=f(x_0+e^x)$ ως προς τη μονοτονία .

iii) Μελετήστε την $k(x)=f^3(x)$ ως προς τη μονοτονία .

80. ΘΕΜΑ 4 – 27320

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται στο (0,+ ∞) η γραφική παράσταση της παραγώγου f' μιας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το (0,+ ∞). Δίνεται επίσης ότι η f' είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο (0,+ ∞) με $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = +\infty$.



α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα τοπικά ακρότατα της συνάρτησης f. (Μονάδες 09)

β) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι:

1ον: «Η γραφική παράσταση της f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη στο σημείο με τετμημένη 1».

2ον: «Υπάρχει μοναδικό κ∈(0,+ ∞) τέτοιο, ώστε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C_f στο σημείο Μ(κ, $f(\kappa)$) να ισούται με 2».

Ποιοι από τους παραπάνω ισχυρισμούς του μαθητή είναι σωστοί;

Να δικαιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 10)

γ) Τι μπορούμε να πούμε για την κυρτότητα της f στο πεδίο ορισμού της;

Να δικαιολογήσετε την όποια απάντησή σας. (Μονάδες 06)

81. ΘΕΜΑ 4 – 23312

Δίνεται η συνάρτηση f ορισμένη στο $[-2,2]$ τέτοια ώστε:

f συνεχής στο $[-2,2]$, δύο φορές παραγωγίσιμη στο $(-2,2)$ και

$f^2(x) - 2f(x) + x^2 - 3 = 0$, για κάθε $x\in[-2,2]$.

α) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει σημεία καμπής. (Μονάδες 08)

β) Αν $f(0) = 3$,

i. Να αποδείξετε ότι $(f(x)-1)^2 = 4 - x^2$, για κάθε $x\in[-2,2]$ και κατόπιν ότι $f(x) = 1 + \sqrt{4-x^2}$, $x\in[-2,2]$. (Μονάδες 09)

ii. Να βρείτε τα ολικά ακρότατα της f και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση $f(x) = συνx$.

(Μονάδες 08)

82. ΘΕΜΑ 4 – 23531

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - lnx - 3$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $(0, +\infty)$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η $f(x)$ παρουσιάζει θέση ολικού ελαχίστου σε κάποιο $x_0 \in (0,1)$ με $f(x_0) < 0$.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{(f(x))^{2023}}{f(x) - f(x_0)}$. (Μονάδες 9)

83. ΘΕΜΑ 4 – 33999

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\frac{1}{x} \le f(x) \le 1 + \frac{1}{x}, \text{ για κάθε } x \in (0,+\infty).$$

α) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$. (Μονάδες 07)

β) Αν επιπλέον ισχύει $(x+1)f'(x) \cdot \ln(x+1) = -f(x)$, για κάθε $x \in (0,+\infty)$, τότε:

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) \cdot \ln(x+1)$, $x > 0$ είναι σταθερή. (Μονάδες 08)

ii. Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (0,+\infty)$ ισχύει $\frac{\ln(x+1)}{x} \le g(x) \le \ln(x+1) + \frac{\ln(x+1)}{x}$ και έπειτα να βρείτε τον τύπο της f. (Μονάδες 10)

84. ΘΕΜΑ 2 – 33995

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2+1}$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $\varepsilon: y = x$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$. (Μονάδες 10)

β) Να προσδιορίσετε τα κοινά σημεία της $\varepsilon: y = x$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f. (Μονάδες 06)

γ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν είναι "1−1". (Μονάδες 09)

Επιπλέον ερωτήματα :

δ) Να δείξετε ότι η f παρουσιάζει τοπικά ακρότατα σε δυο θέσεις .

ε) Να μελετήσετε την $g(x) = x - f(x)$ ως προς τη μονοτονία .

στ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = f(\xi)$

85. ΘΕΜΑ 2 – 35602

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$ με $x\neq 1$.

α) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε): $y=x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

(Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε'): $x=1$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.

(Μονάδες 7)

γ) Να μελετήσετε την συνάρτηση f ως προς την μονοτονία. (Μονάδες 10)

86. ΘΕΜΑ 2 – 27084

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=x+\frac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι η f είναι κυρτή. (Μονάδες 07)

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο $+\infty$.

(Μονάδες 08)

87. ΘΕΜΑ 2 – 34439

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{1}{x-1}, x\neq 1$ και $g(x)=\dfrac{1}{e^x}, x\in\mathbb{R}$.

α)

i. Να ορίσετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $h(x)=(f\circ g)(x)$. (Μονάδες 6)

ii. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $h(x)=(f\circ g)(x)$. (Μονάδες 6)

Αν $h(x)=\dfrac{e^x}{1-e^x},\ x\in\mathbb{R}^*$ τότε:

β) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση h είναι '1-1'. (Μονάδες 7)

γ) να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)$. (Μονάδες 6)

88. ΘΕΜΑ 4 – 31746

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2-4x+6)e^x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο σημείο της $M(0,f(0))$.

(Μονάδες 5)

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 6)

δ) Να αποδείξετε ότι: $f(x)\geq 2x+6$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

89. ΘΕΜΑ 4 – 28342

Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΑΒΓΔ έχει τις κορυφές Α και Δ πάνω στον άξονα $x'x$ και τις κορυφές Β και Γ πάνω στις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$, $x < 1$ και $g(x) = \frac{e}{x}$, $x > 1$, αντίστοιχα. Έστω $A(\alpha\,, 0)$ με $\alpha < 1$.

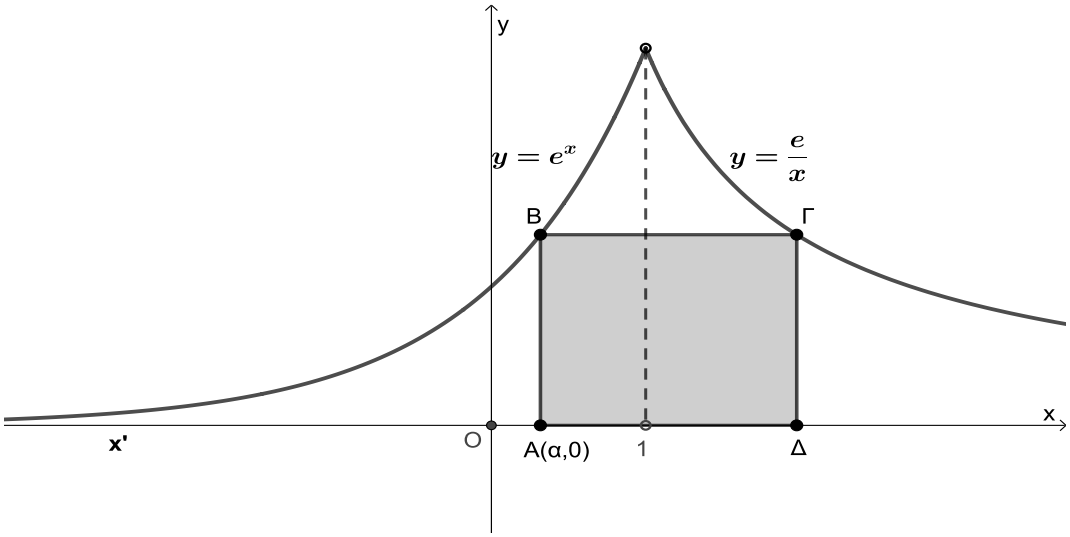
α) Να αποδείξετε ότι:

i. η τετμημένη της κορυφής Δ είναι $x_\Delta = e^{1-\alpha}$, (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι $E(\alpha) = e - \alpha e^{\alpha}$, $\alpha < 1$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του εμβαδού του ορθογωνίου ΑΒΓΔ . (Μονάδες 7)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν και πόσες τιμές του α, για τις οποίες το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται ίσο με 1. (Μονάδες 6)



Επιπλέον ερώτημα :

δ) Το Α κινείται πάνω στον x'x με ταχύτητα $\alpha'(t) = 2$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του ΑΒΓΔ τη στιγμή που το Α έχει τετμημένη $\frac{1}{2}$.

90. ΘΕΜΑ 4 – 28314

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: $[1\,, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{\lambda x+1}} & , x > 1 \\ 0 & , x = 1 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\lambda = -1$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε, όπου ορίζεται, την παράγωγο της f. (Μονάδες 8)

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 6)

δ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f. (Μονάδες 5)

91. ΘΕΜΑ 2 – 31547

Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ μία συνάρτηση για την οποία ισχύει $f(x)=\dfrac{3-2x}{(x-2)^2}$ για κάθε $x\neq 2$.

α) Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη τη $x=2$. (Μονάδες 10)

β) Να εξετάσετε αν η f είναι

i. συνεχής στο 2. (Μονάδες 8)

ii. παραγωγίσιμη στο 2. (Μονάδες 7)

Επιπλέον ερώτημα :

γ) Αν $f(x)=\begin{cases}\frac{3-2x}{(x-2)^2} & , \quad x\neq 2\\ 3 & , \quad x=2\end{cases}$ να βρείτε τη μέγιστη τιμή της f.

92. ΘΕΜΑ 4 – 29130

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x\eta\mu x,\ x\in\mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι:

v. Η ευθεία $y=x$ εφάπτεται της C_f στο σημείο $\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{2},f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$. (Μονάδες 04)

vi. Η C_f έχει άπειρα κοινά σημεία με την εφαπτομένη της $y=x$ τα οποία και να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 06)

β) Για τη συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει $g(x)-x=\ln\left(1+\dfrac{1}{e^x}\right)$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i. Η $y=x$ είναι ασύμπτωτη της C_g στο $+\infty$. (Μονάδες 05)

ii. Στο διάστημα $(0,+\infty)$, η C_g βρίσκεται πάνω από την $y=x$. (Μονάδες 04)

γ) Να αποδείξετε ότι στο διάστημα $(0,+\infty)$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης g του ερωτήματος (β) βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της f. (Μονάδες 06)

93. ΘΕΜΑ 2 – 25748

Έστω f συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση έχει την ευθεία $(\varepsilon):y=3x-2$ πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$. (Μονάδες 8)

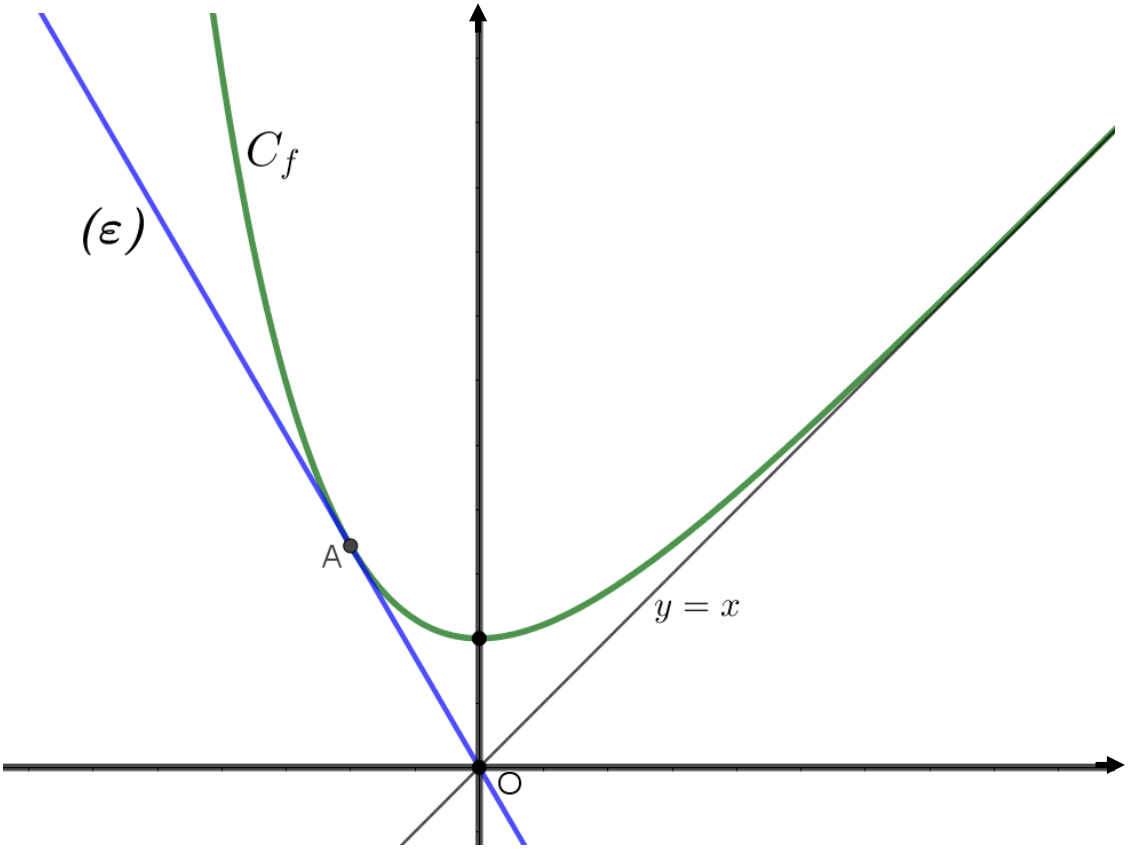
β) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$. (Μονάδες 8)

γ) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{xf(x)-3x^2}$. (Μονάδες 9)

94. ΘΕΜΑ 2 – 23530

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας παραγωγίσιμης στο R συνάρτησης $f(x)$ για την οποία γνωρίζουμε τα εξής:

- στο σημείο $A(-1, f(-1))$ της γραφικής παράστασης της f έχει σχεδιασθεί η εφαπτομένη ευθεία (ε), η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
- η ευθεία $y = x$ είναι ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της $f(x)$ στο $+\infty$.



α) Αν γνωρίζουμε ότι $f(-1) = e - 1$, να αποδείξετε ότι το $f'(-1) = 1 - e$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε). (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right) = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x) - x) = 0$. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf(x)-x^2}{f(x)}$. (Μονάδες 8)

95. ΘΕΜΑ 4 – 24579

Δίνεται συνάρτηση $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$, με τύπο $f(x) = 2\ln x - x$.

α)

i. Να μελετήσετε την συνάρτηση ως προς την μονοτονία της. (Μονάδες 07)

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης. (Μονάδες 07)

iii. Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης. (Μονάδες 04)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 07)

96. ΘΕΜΑ 4 – 24759

Έστω συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, για την οποία ισχύει $f(x)\geq x^2-x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α)

i. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$. (Μονάδες 4)

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f δεν έχει ασύμπτωτες. (Μονάδες 6)

iii. Να αποδείξετε ότι $f(x)\geq\dfrac{3}{4}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (Μονάδες 5)

β) Αν επιπλέον $f(1)=1$ και $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ να αποδείξετε ότι:

i. $f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$. (Μονάδες 5)

ii. η f δεν είναι κοίλη. (Μονάδες 5)

97. ΘΕΜΑ 4 – 33648

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln^2 x$ και $g(x)=\ln x$ με κοινό πεδίο ορισμού το $(0,+\infty)$.

α) Να μελετήσετε την f

i. ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα. (Μονάδες 4)

ii. ως προς την κυρτότητα και τα σημεία καμπής. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε, αν υπάρχουν, τις ασύμπτωτές της C_f και να σχεδιάσετε τις C_f, C_g στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων. (Μονάδες 8)

γ) i. Να βρείτε τα κοινά σημεία των C_f, C_g. (Μονάδες 4)

ii. Η ευθεία $x=\alpha$, $1<\alpha<e$ τέμνει τις C_f, C_g στα σημεία Α, Β. Να βρείτε για ποια τιμή του α το μήκος του τμήματος ΑΒ γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 5)

98. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=ln(x^2)$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f.

β) Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να τη μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

99. α) Να λύσετε την εξίσωση $e^{x-2}+x-3=0$.

β) Δίνεται η $f(x)=e^{x-2}+\frac{1}{2}x^2-3x$.

Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς δυο ρίζες στο $(0,4)$.

100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{4}{x}$. Η εφαπτομένη της C_f στο τυχαίο σημείο της Μ τέμνει τους άξονες x'x και y'y στα σημεία Α , Β αντίστοιχα .

α) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ έχει σταθερό εμβαδό ανεξάρτητα από τη θέση του Μ.

β) Να δείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του ΑΒ .

101. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+1$. Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

α) να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$

β) να σχηματίζει γωνία 135^0 με τον άξονα x'x

γ) να είναι παράλληλη στον άξονα x'x

δ) να είναι κάθετη στην ευθεία $2y-x=0$

102. Αν για τη συνάρτηση f ισχύει: $-2x+1\le f(x)\le x^4-2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, **(1)** τότε

α) να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0 .

β) να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0 και ισχύει $f'(0)=-2$.

103. Έστω $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση . Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-{x_0}^2} \qquad \lim_{x\to x_0}\frac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}$$

104. Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $O(0,0)$, δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες Οx και Oy και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2$. Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

105. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-5}{x}=2$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

106. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot\eta\mu x$. Να δείξετε ότι: $f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2f''(x)$.

107. Να δείξετε ότι: $2\cdot ln(x-1)\le x-3+ln\,4$ για κάθε $x>1$.

108. Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A(1,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2+7x$.

109. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

110. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 21$.

β) Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $O(0,0)$.

γ) Υπάρχουν εφαπτόμενες της C_f που διέρχονται από σημείο $A(2,0)$;

111. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + kx - 1$, όπου $k \in \mathbb{R}$.

α) Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\big(0, f(0)\big)$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 5$,

να βρείτε την τιμή του k .

β) Αν $k = 2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$.

112. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 24x^2 + 5x - 7$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του α, ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.
Για ποια τιμή του α , η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A\big(1, f(1)\big)$

113. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

α) $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

$\beta)$ $e^{x^2} \geq 1 - x$, για κάθε $x \geq 0$.

γ) $e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

114. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + 5x$.
Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση:

$$e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5 \ .$$

115. Δίνεται μια συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο 0 με $f'(0) = 1$
για την οποία για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$f(x+y) = f(x) \cdot e^y + f(y) \cdot e^x \ .$$

α) Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.

β) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με
$f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

γ) Αν $f(0) = 2$ να βρείτε την f .

δ) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα την $f(x) = e^x(x+2)$.

116. Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει: $\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$,
να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = e^5$.

117. Αν η ευθεία $y = 3x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε
να βρείτε το $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 - \lambda^2 x + 2}{f(x) + \lambda x + 1} = -1$$

118. Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ με $f(0) = f(1) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

α) Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle στο $[0,1]$

για τη συνάρτηση $h(x) = f^2(x) \cdot e^{g(x)}$

β) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}$$

119. Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 2024$. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x}$

120. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$.

121. Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,3]$. Να δείξετε ότι $f(1) + f(2) > f(0) + f(3)$.

122. Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x, \ln x)$ και $\Gamma(x, 0)$, $x > 1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία $x = 2\ cm$. Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0{,}5\ cm / sec$.

123. Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho) = P'(\rho) = 0$.
Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 - 3x - 1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

124. Έστω $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$f(x) \geq e^{x-1} + \ln x + x^2$ για κάθε $x > 0$ και $f(1) = 2$.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$.

125. Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ η οποία ικανοποιεί τη

σχέση: $f^2(x) + 4f(x) + x^2 - 5 = 0$ για κάθε $x \in (-3,3)$ **(1)**

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

126. Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f , για την οποία ισχύει: $f(e^x \cdot \eta\mu x) = 2 \cdot e^x$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

α) Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A\big(0, f(0)\big)$ είναι η $y = 2x + 2$.

γ) Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2cm / sec$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

127. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.

β) αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

128. Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3\cdot \eta\mu\frac{1}{x} & ,\ x\neq 0 \\ 0 & ,\ x=0 \end{cases}$

α) Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

β) Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2\pi}\ ,\ \frac{1}{\pi}\right]$.

γ) Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi\frac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2\pi}\ ,\ \frac{1}{\pi}\right)$.

129. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0+} x^x \qquad\qquad \lim_{x\to 0+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$$

130. Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

$f(1)=2$ και $x\,f'(x)=-3\,f(x)$ για κάθε $x\neq 0$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^3\cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα

από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

131. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+24x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

δ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

132. Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:
$\big(P'(x)\big)^2=P(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $P'(1)=2$. Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

133. Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο.
Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma$ ισχύει $f(\alpha)<f(\beta)>f(\gamma)$,
να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$.

134. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\lim_{x\to 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}} \qquad\qquad \lim_{x\to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

135. Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,6]\to\mathbb{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ με $f(1)=f(6)$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο $A\big(x_0,f(x_0)\big)$ οριζόντια εφαπτομένη.

β) Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,6)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$.

136. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-n\mu x$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

137. Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν:

$f(2)=5$, $f(1)=3$ και $f(x)\leq 2x+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

138. Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x)<x^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να δείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $g(x)=3f(x)-x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) $f(2)-f(1)<3$

γ) υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)<3$.

139. α) Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)=x-\ln x$.

β) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x$.

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

140. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^{\lambda x}}{x+1}$, $x>-1$ και $\lambda>0$.

α) Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.

β) Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

141. α) Να δείξετε ότι: $ln\,x + \frac{1}{x} \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

β) Να δείξετε ότι η $g(x) = ln\,x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$.

γ) Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot ln\,x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

δ) Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

142. α) Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 2^x = 5^x$

β) Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 4^x = 5^x$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $3^x - 2^{-x} = \frac{5}{2}$

143. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f'(x) = -2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{2x} \cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = 1$.

γ) Αν h, φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$, με $h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $h(0) = \varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι $h = \varphi$.

144. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.

β) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f, αν υπάρχουν.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

δ) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\big(0, f(0)\big)$.

ε) Να αποδείξετε την ανισότητα: $(x^2 + 4x + 3) \cdot e^x \geq 7x + 3$ για κάθε $x \geq -4 + \sqrt{3}$.

145. Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - ln(x + 1) - 1$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

δ) Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$, ισχύει:

$e^{2\alpha+\beta-1} - ln(2\alpha + \beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - ln(a + 2\beta - 1) \leq 2$, να υπολογίσετε τους a, β.

146. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{2x}}$, $x > 0$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι: $\sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[6]{3}$.

147. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2 + 1) \cdot ln\, x$, $x > 0$.

α) Να δείξετε ότι $2x\, ln\, x + \frac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$.

β) Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$

να είναι σημείο καμπής της C_f .

δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

148. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + ln(x^2 + 1)$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $x - 4 = ln\, 17 - ln(x^2 + 1)$.

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $x^3 - x^2 > ln\frac{x^4+1}{x^6+1}$.

149. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

β) Να αποδείξετε ότι: $f'(x + 1) > f(x + 1) - f(x)$ για κάθε $x > 0$.

150. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ και $f(3) = 12$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A\left(\xi, f(\xi)\right)$

να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 21$.

β) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B\left(x_0, f(x_0)\right)$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

151. α) Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ.

Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$ ισχύει :

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq 2 \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2-x^2}{x+1}$, $x > -1$.

i) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii) Αν $\alpha > \frac{1}{e}$, $\beta > \frac{1}{e}$, να δείξετε ότι:

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1} + \frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1} \geq 2 \cdot \frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1}$$

152. Για την $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύουν $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 2$ και $f(x+y) = f(x) + f(y) + 5xy$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και στη συνέχεια να βρείτε την f .

153. Δίνεται η $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

Να βρείτε την εφαπτομένη στην C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 0$.

154. Δίνεται η $f(x) = \sqrt{x}$. Να βρείτε την εφαπτομένη στην C_f στο σημείο της με τεταγμένη 4.

155. Δίνεται η f με $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ 2x-1, & x > 1 \end{cases}$.

Να βρείτε τις εφαπτόμενες στην C_f στα σημεία της με τεταγμένη 9.

156. Δίνεται η f με $f(x) = \begin{cases} 3x^2-5x+6, & x \leq 1 \\ 2\sqrt{x^2+3}, & x > 1 \end{cases}$.

Να βρείτε την εφαπτομένη στην C_f στο σημείο της με τετμημένη 1.

157. Δίνεται η $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που περνάνε από το M(1,-2) .

158. Δίνεται η $f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$. Δείξτε ότι υπάρχει μία και μόνον εφαπτομένη στην C_f που περνά από την αρχή των αξόνων.

159. Αν g συνεχής στο [0,α], α>0 και παραγωγίσιμη στο (0,α) με g(α)=0 , να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0,\alpha)$ ώστε $g'(\xi) = -\frac{g(\xi)}{\xi}$.

160. α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $xe^x = e^x - 1$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

β) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(2-x)e^x = x+2$ έχει ακριβώς μια ρίζα.

161. Δίνεται συνάρτηση f με $f(1)=f(3)=0$ και $f''(x)>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

α) Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα σημείο $A(\xi,f(\xi))$ με $\xi\in(1,3)$, στο οποίο η C_f δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

β) Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή της f είναι αρνητικός αριθμός.

162. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f(x)=-x+\dfrac{1}{x-2}$

163. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $f(0)=1$.

Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει η σχέση $f'(x)=(2x+2)f(x)$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=e^{x^2+2x}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

γ) Να βρεθεί το πλήθος των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της f με την ευθεία $y=\dfrac{3}{2}$.

δ) Δίνεται η $h(x)=(x^2-1)f(x)$. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(-1,1)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\dfrac{2\xi f(\xi)}{1-\xi^2}$.

164. Έστω η συνάρτηση f που είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(1,f(1))$ έχει εξίσωση $(\varepsilon):y=2x+1$. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της $g(x)=f(e^x)+1$ στο σημείο $B(0,g(0))$.

165. Έστω συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι γνωστό επίσης ότι: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=5$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-2$, $f(0)>0$.

α) Δείξτε ότι η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο.

β) Να δείξετε ότι η f έχει ακριβώς μία ρίζα η οποία είναι θετική.

γ) Να μελετήσετε την $g(x)=xf(x)$ ως προς το πρόσημο αν είναι γνωστό ότι η ρίζα του ερωτήματος β) είναι το 1975.

δ) Αν είναι γνωστό ότι η ρίζα του ερωτήματος β) είναι το 1975 να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1975)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$.

ε) Αν $f(1)+f'(1)=f(10)+10f'(10)$ να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,10)$ τέτοιο ώστε: $-\dfrac{2}{x_0}=\dfrac{f''(x_0)}{f'(x_0)}$

166. Δίνεται η $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x-1}$ με $x\in(-\infty,1)$.

Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

167. Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει :

$f(x)<0$ για $x<0$ και $f(x)>0$ για $x>0$.

α) Να υπολογίσετε το $f(0)$.

β) Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο $(0,f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $y=30x+2005$,

να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$

168. Έστω f συνάρτηση παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει :
$f^4(x)+f^3(x)-f(x)=ax^3+\beta x+\gamma$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$,
όπου a και β ομόσημοι πραγματικοί αριθμοί .
Να δείξετε ότι η f δεν έχει ακρότατα .

169. Δίνεται συνάρτηση $f:(0\,,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$f'(x)=(x-2)\ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(1)=\dfrac{7}{4}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A\left(1\,,\dfrac{7}{4}\right)$.

β) Να δείξετε ότι $f(x)\le\dfrac{7}{4}$ για κάθε $x\in(0,2)$.

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει το πολύ ένα $\xi\in(2,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=\dfrac{7}{4}$.

δ) Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0)=0$.

170. Δίνεται συνάρτηση f με $f''(x)=\dfrac{x\ln x+x-1}{x}$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Η γραφική παράσταση της f στο σημείο της $A(1\,,f(1))$ έχει εφαπτομένη την ευθεία $y=\dfrac{3}{4}$.

α) Να δείξετε ότι : $f'(x)=(x-1)\ln x$

β) Να δείξετε ότι : $f(x)=\left(\dfrac{x^2}{2}-x\right)\ln x-\dfrac{1}{4}x^2+x$

γ) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

δ) Να υπολογίσετε τα όρια : $\lim\limits_{x\to 0^+}f''(x)$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)$

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική λύση της εξίσωσης $\dfrac{(f''(x)-1975)(x^2+1)}{x^2+2004}=0$ στο $(0,+\infty)$.

στ) Να δείξετε ότι $4\cdot f\left(\frac{x^2+9}{x^2+8}\right)>3$

171. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, h για τις οποίες ισχύει :

$f(0)=f'(0)=0$, $g(x)=\left[f(x)\right]^2+\left[f'(x)\right]^2$, $h(x)=2x\ln\left(x^2+2\right)$,

$f''(x)+f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις C_g και C_h έχουν ακριβώς ένα κοινό σημείο .

γ) Δείξτε ότι η C_h δεν έχει ασύμπτωτες .

172. Μια μετοχή εισήχθη στο Χρηματιστήριο Αθηνών πριν από ακριβώς δέκα μήνες .

Η τιμή της μετοχής σε ΕΥΡΩ , t μήνες μετά την εισαγωγή της στο Χρηματιστήριο , δίνεται από την συνάρτηση $f(t)=t^2-6t+10$, $0\le t\le 10$.

α) Ποια ήταν η χαμηλότερη τιμή της μετοχής , από την μέρα εισαγωγής της στο Χρηματιστήριο ;
β) Πόσους μήνες μετά την εισαγωγή της , παρουσίασε την χαμηλότερη τιμή ;
γ) Να δείξετε ότι σήμερα η μετοχή έχει πενταπλάσια τιμή , από την τιμή εισαγωγής της στο Χρηματιστήριο .
δ) Για πόσο χρονικό διάστημα , η μετοχή είχε τιμή μικρότερη ή ίση , από την τιμή εισόδου της ;

173. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^3-3x+2$.

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να βρείτε το πλήθος των σημείων τομής της C_f με τον άξονα x'x .

174. Δίνεται συνάρτηση f παραγωγίσιμη σ' όλο το $\mathbb{R}$ με $f(1)=0$.

Για την f είναι γνωστό ότι : $f(x)\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(1)=0$.

β) Αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, να δείξετε ότι υπάρχει

μοναδικό $x_0\in(3,9)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=\dfrac{2f(3)+6f(9)}{8}$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^{x^2-2x}-e^{-1}$.

Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα .

175. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x+x-1$ ως προς το πρόσημο .

176. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο ρίζες .

177. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x}{e^x}$.

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα .

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι : για κάθε x>2017 ισχύει $e^{2017-x} < \dfrac{2017}{x}$.

178. Έστω $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ και για κάθε $x > 0$ ισχύει $x^\alpha \leq \alpha^x$. Να αποδείξετε ότι $\alpha = e$.

179. Δίνεται $f : (0\,,\,+\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(1)=2$ και

$x^2 f'(x) + 2x f(x) = e^{x-1}$ για κάθε $x \in (0\,,\,+\infty)$. Να βρείτε την f .

180. Έστω f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $6f(2)=2f(6)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (2,6)$ τέτοιο ώστε : η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $A\left(\xi\,,\,f(\xi)\right)$ να διέρχεται από την αρχή των αξόνων .

181. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 6 \cdot ln\, x$ και η ευθεία (ε) : $y = 4x - 3$.

α) Να βρείτε (αν υπάρχουν) τα κοινά σημεία της C_f και της ευθείας (ε) .

β) Είναι η ευθεία (ε) εφαπτομένη της C_f ;

182. Να λύσετε την εξίσωση $x\, ln\, x = 2x - e$

183. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$, $x \in [-2\,,\,2\,]$

Να δείξετε ότι η f έχει 4 θέσεις τοπικών ακροτάτων .

184. Έστω $f: (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $x\, f'(x)\, ln\, x + f(x) = 2x^2$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$ και $f(e) = e^2$.

α) Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{x^2}{ln\, x}$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

β) Να δείξετε ότι $f(x) \geq 2e$ για κάθε $x \in (1, +\infty)$.

γ) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = -ex^2 + 2ex + e$.

Να δείξετε ότι οι C_f και C_g δεν έχουν κοινό σημείο .

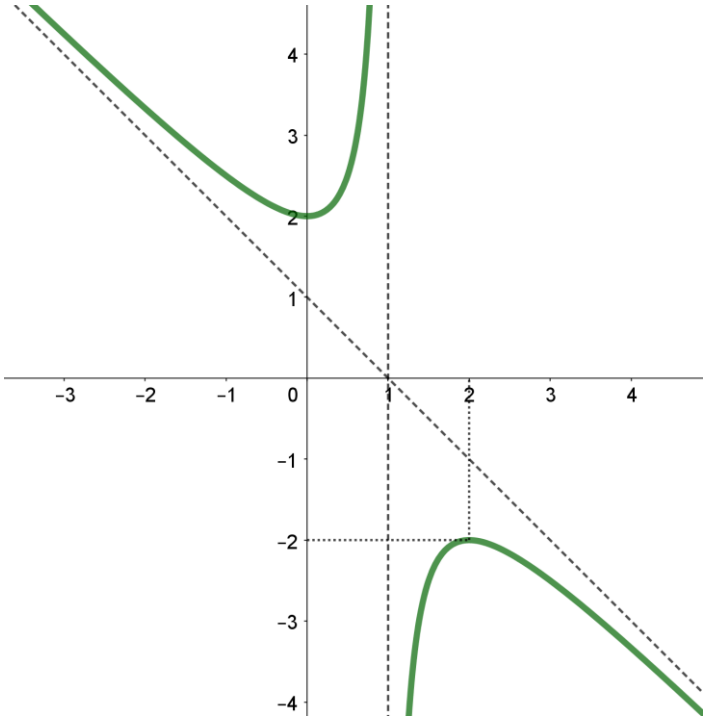
185.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{-x^2+\alpha x+\beta}{x-1}$

Η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(2,-2)$ όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τα α και β .
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
γ) Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα
δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
ε) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Επαληθεύστε τα αποτελέσματά σας με το διπλανό σχήμα



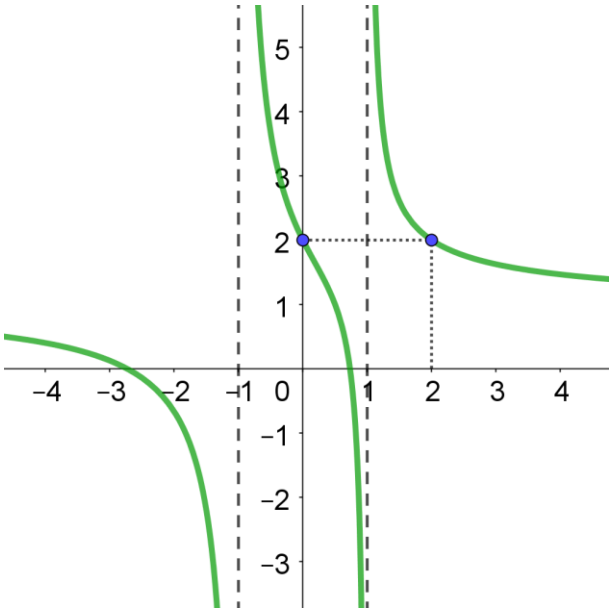
186.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2+\alpha x+\beta}{x^2-1}$

Η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(0,2)$ και $B(2,2)$ όπως φαίνεται και στο διπλανό σχήμα.

α) Να βρείτε τα α και β .
β) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.
γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
δ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .
ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

Επαληθεύστε τα αποτελέσματά σας με το διπλανό σχήμα



187. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{-x^2+2x-2}{x-1}$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Μελετήστε την f ως προς τα ακρότατα.

γ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

δ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν ασύμπτωτες της C_f .

ε) Σχεδιάστε μια πρόχειρη γραφική παράσταση που να φαίνονται τα παραπάνω.

188. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -2x^2 + 3x + 1 + ln\, x$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Μελετήστε την f ως προς τα ακρότατα.

γ) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

δ) Βρείτε το σύνολο τιμών της f .

ε) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

189. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-3)^2 - 1$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο της $A\big(4, f(4)\big)$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία y= $-4x$.

190. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = (x-3)\, ln\, x - 1$ και $g(x) = \frac{\alpha}{x} + \beta$

α) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = -2x + 1$ εφάπτεται στην C_f .

β) Να βρείτε τα α και β ώστε η ευθεία $y = -2x + 1$ να εφάπτεται της C_g στο $A\big(-1, g(-1)\big)$.

191. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha e^x}{x+\beta}$

Να βρείτε τα α και β ώστε η ευθεία $y = -2x - 1$ να εφάπτεται της C_f στο σημείο της $A\big(0, f(0)\big)$

192. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 2$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της f .

193. Δίνεται συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f''(x) > 0$ για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι $f'(x) + f(x) < f(x+1)$ για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$.

β) Αν $f'(21) = 0$ και $f(21) = 3$, να δείξετε ότι :

$f(x) \cdot f(x+1) > 9$ για κάθε $x \epsilon \mathbb{R}$.

194. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x - \frac{e}{2}x^2 + x - 1$

ως προς το πρόσημο.

195. Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με περίμετρο 20 μέτρα.

Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου που μεγιστοποιούν το εμβαδόν του.

196. Έστω ότι έχουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με εμβαδόν 36 τετραγωνικά μέτρα.

Να βρείτε τις διαστάσεις του ορθογωνίου που ελαχιστοποιούν την περίμετρο του.

197. Να βρείτε τα σημεία της παραβολής $y = x^2$ που βρίσκονται πιο κοντά στο σημείο Α(0,1).

198. Έστω ότι ένα σημείο κινείται κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$. Ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του σημείου είναι σταθερός και ίσός με 3 μονάδες ανά δευτερόλεπτο. Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου τη στιγμή που αυτό βρίσκεται στη θέση Α(2,4).

199. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x+1}$

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

β) Μελετήστε την f ως προς την κυρτότητα.

γ) Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f .

δ) Σχεδιάστε την C_f .

ε) Για κάθε x>0 δείξετε ότι $f(x+1) + f(x+2) < f(x+3) + f(x)$

200. Δίνεται η παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) = e^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α) Μελετήστε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Μελετήστε την f ως προς το πρόσημο.

Δίνεται η συνάρτηση $f^{-1}(x) = ln(x^3 + x)$, x > 0 .

γ) Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδική ρίζα της εξίσωσης $f^{-1}(x) = 0$.

δ) Μελετήστε την f^{-1} ως προς την κυρτότητα.

ε) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της $A\left(1, f^{-1}(1)\right)$.

στ) Να δείξετε ότι $f^{-1}(x) - 2x \leq ln\frac{2}{e^2}$ για κάθε x >0 .

7ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f , η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα [α, β]. Αν

- η f είναι συνεχής στο [α, β] και
- f(α) ≠ f(β)

να αποδείξετε ότι για κάθε ζ μεταξύ των f (α) και f (β) υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \zeta$.

Μονάδες 6

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σ' ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Rolle.

Μονάδες 5

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f , g είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού Α ,Β αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της f με τη g , δηλαδή η συνάρτηση $g \circ f$, ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

β) Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

γ) Ισχύει $(\sigma\varphi x)' = \frac{1}{\eta\mu^2 x}, x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$.

δ) Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό της μέγιστο.

ε) Έστω f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ. Αν f γνησίως αύξουσα στο Δ τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \epsilon \Delta$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x)=e^{-x}+\lambda$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, η οποία έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία y=2.

Β1. Να αποδείξετε ότι λ = 2.

Μονάδες 3

Β2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) - x = 0 έχει μοναδική ρίζα, η οποία βρίσκεται στο διάστημα (2, 3).

Μονάδες 7

Β3. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι 1-1 (μονάδες 2) και στη συνέχεια να βρείτε την αντίστροφή της (μονάδες 4) .

Μονάδες 6

Β4. Έστω $f^{-1}(x) = -\ell n(x-2),\ x > 2$. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής της παράστασης (μονάδες 3) και στη συνέχεια να κάνετε μια πρόχειρη γραφική παράσταση των συναρτήσεων f και f^{-1} στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων (μονάδες 6).

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} -2x+4+e^{\lambda} \ , & 0\le x<2 \\ -x^2+4x-3+\lambda \ , & x\ge 2 \ , \end{cases}$$

με $\lambda\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι λ = 0.

Μονάδες 5

Γ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

Μονάδες 6

Γ3. i) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα [0, 3] .

(μονάδες 4)

ii) Να βρείτε, αν υπάρχει, $\xi\in(0,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο Γ (ξ, f(ξ)) να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Δ(0, f(0)) και Ε(3, f(3)).

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Κινητό σημείο M ξεκινά από το σημείο Α(2, 0) και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 0{,}5$ μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία $\hat{\omega}=\mathrm{A\hat{O}M}$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο M θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η συνάρτηση f : (0, +∞) → $\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{\ln x+\alpha x}{x}$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $f((0,+\infty))=(-\infty\ ,\ 1+\frac{1}{e}\ ]$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι α = 1.

Μονάδες 4

Δ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 0 έχει μοναδική ρίζα, x_0 , η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Μονάδες 6

Δ3. i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = f(4) έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.

(μονάδες 3)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $2^x \le x^2$ στο διάστημα (0, + ∞).

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

Δ4. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f και στη συνέχεια να τη σχεδιάσετε .

Μονάδες 7

Καλή επιτυχία !

7ο διαγώνισμα – Απαντήσεις

ΘΕΜΑ Α

Α4.

α) Σωστό

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Λάθος

ε) Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Οριζόντια ασύμπτωτη της f στο $+\infty$ είναι η y=2. Άρα,

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda)=2 \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{1}{e}\right)^x+\lambda\right]=2$, $\Leftrightarrow \lambda=2$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e}\right)^x=0 \quad \left(0<\frac{1}{e}<1\right)$.

Β2. Έστω η συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$, με $x\in R$.

Η $g(x)$ είναι συνεχής στο [2,3] ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων με

$g(2)=f(2)-2=e^{-2}=\frac{1}{e^2}>0$ και $g(3)=f(3)-3=e^{-3}+2-3=\frac{1}{e^3}-1=\frac{1-e^3}{e^3}<0$. Επομένως, $g(2)g(3)<0$. Άρα από Θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-x_0=0$.

Επιπλέον $g'(x)=f'(x)-1=e^{-x}(-x)'=-\frac{1}{e^x}<0$, άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο R, οπότε η g(x) είναι συνάρτηση 1-1. Άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Β3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=-\frac{1}{e^x}<0$, δηλαδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R , άρα και 1-1. Έτσι, η f είναι αντιστρέψιμη.

Έστω $f(x)=y \Leftrightarrow e^{-x}+2=y \Leftrightarrow e^{-x}=y-2 \underset{\ln x\ 1-1}{\overset{y>2}{\Leftrightarrow}} \ln e^{-x}=\ln(y-2) \Leftrightarrow -x=\ln(y-2) \Leftrightarrow x=-\ln(y-2)$, με y>2.

Οπότε $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$ με x>2.

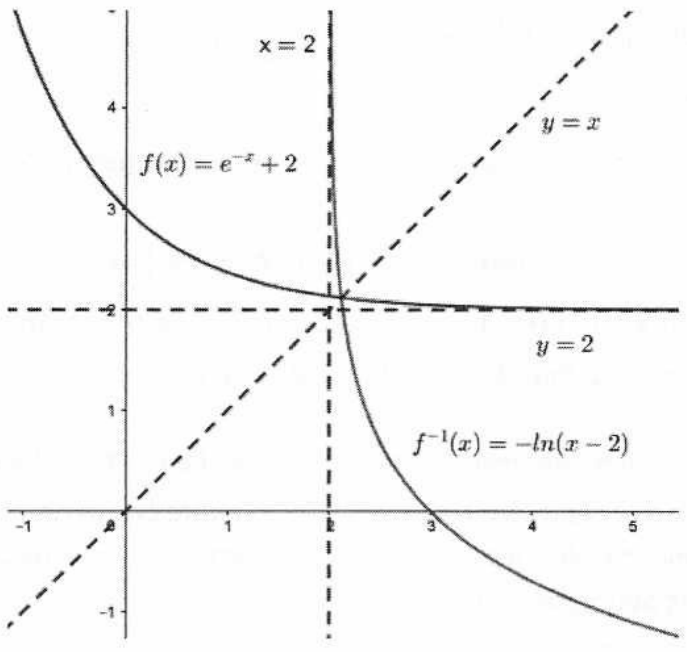
Β4. Είναι $\lim\limits_{x\to2^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left[-\ln(x-2)\right]$.

Θέτω x-2=u οπότε $\lim\limits_{x\to2^+}(x-2)=0$

Άρα, $\lim\limits_{x\to2^+} f^{-1}(x)=\lim\limits_{x\to2^+}\left[-\ln(x-2)\right]=$

$\lim\limits_{u\to0^+}[-\ln u]=-(-\infty)=+\infty$ οπότε η x=2 κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f^{-1}.

Η γραφική παράσταση της f προκύπτει ως συμμετρική της γραφικής παράστασης της f^{-1} ως προς την ευθεία y=x.



ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Επειδή η f είναι συνεχής συνάρτηση, έχουμε ότι είναι συνεχής και στο $x_0=2$, δηλαδή ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2)$.

Είναι:

- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\left(-2x+4+e^{\lambda}\right) = e^{\lambda}$
- $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+}\left(-x^2+4x-3+\lambda\right) = \lambda+1$
- $f(2) = -2^2+4\cdot 2-3+\lambda = \lambda+1$

Επομένως, πρέπει $e^{\lambda} = \lambda+1$

Από τη γνωστή ανισότητα $e^{\lambda} \geq \lambda+1$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι η ισότητα ισχύει μόνο για λ=0. Έτσι η εξίσωση $e^{\lambda} = \lambda+1$ έχει μοναδική λύση τη λ=0.

Γ2. Για λ=0, η συνάρτηση γράφεται:

$$f(x) = \begin{cases} -2x+5, 0\leq x<2 \\ -x^2+4x-3, x\geq 2 \end{cases}$$

Η f είναι συνεχής στο [0,2] και παραγωγίσιμη στο (0,2) με $f'(x) = -2$.

Η f είναι συνεχής στο $[2,+\infty)$ και παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ με $f'(x) = -2x+4$.

Επίσης

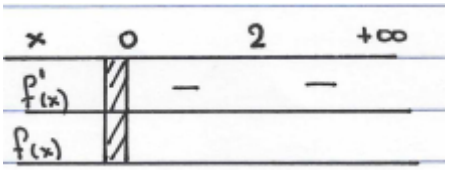
- $\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-2x+5-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{-2(x-2)}{x-2} = -2$

- $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-x^2+4x-3-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{-\left(x^2-4x+4\right)}{x-2} = -\lim\limits_{x\to 2^+}(x-2) = 0$

Επομένως, η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$

Έτσι, $f'(x) = \begin{cases} -2, 0\leq x<2 \\ -2x+4, x>2 \end{cases}$

Επομένως, η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$. Επίσης, η f έχει (ολικό) μέγιστο για x=0 το f(0)=5.



Γ3. i) Έχουμε δείξει στο ερώτημα Γ2 ότι η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$. Άρα, η f δεν ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα [0,3].

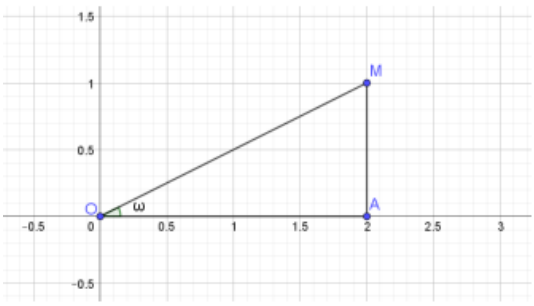
ii) Βρίσκουμε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0,f(0)), E(3,f(3))$

$\lambda_{\Delta E} = \dfrac{y_E-y_\Delta}{x_E-x_\Delta} = \dfrac{f(3)-f(0)}{3-0} = \dfrac{0-5}{3} = -\dfrac{5}{3}$ Ψάχνουμε $\xi\in(0,3)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -\dfrac{5}{3}$.

- Αν $\xi\in(0,2)$ είναι $f'(\xi) = -2 \neq -\dfrac{5}{3}$. Άρα, δεν υπάρχει $\xi\in(0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -\dfrac{5}{3}$
- Αν $2<\xi<3$ τότε $f'(\xi) = -\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi+4 = -\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow -6\xi+12 = -5 \Leftrightarrow -6\xi = -17 \Leftrightarrow \xi = \dfrac{17}{6}$ δεκτό γιατί $2 = \dfrac{12}{6} < \dfrac{17}{6} < \dfrac{18}{6} = 3$

Επομένως, η εφαπτομένη της C_f στο Γ(ξ, f(ξ)) με $\xi = \dfrac{17}{6}$ είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0,f(0))$ και $E(3,f(3))$.

Γ4. Ισχύει ότι $y'(t)=0,5=\frac{1}{2}$. Έστω t_0 η χρονική στιγμή κατά την οποία το σημείο Μ συναντά τη C_f. Είναι $x(t_0)=2$ και $y(t_0)=f(2)=1$. Από το Πυθαγόρειο Θεώρημα τη χρονική στιγμή t_0 έχουμε $OM^2=OA^2+AM^2 \Leftrightarrow OM=\sqrt{x^2(t_0)+2^2} \Leftrightarrow$.



$\Leftrightarrow OM=\sqrt{1^2+4} \Leftrightarrow OM=\sqrt{5}$

Ισχύει ότι $\varepsilon\varphi\omega(t)=\frac{y(t)}{2}$, άρα

$$(\varepsilon\varphi\omega(t))'=\frac{y'(t)}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\cdot\omega'(t)=\frac{y'(t)}{2} \Leftrightarrow \omega'(t)=\frac{y'(t)\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}{2}.$$

Ισχύει επίσης, $\sigma\upsilon\nu\omega(t_0)=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Άρα $\omega'(t_0)=\frac{y'(t_0)\cdot\sigma\upsilon\nu^2\omega(t_0)}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{5}}{2}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}\,\text{rad/sec}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Για x>0 έχουμε $f(x)=\frac{\ln x+\alpha x}{x}=\frac{\ln x}{x}+\frac{\alpha x}{x}=\frac{\ln x}{x}+\alpha$

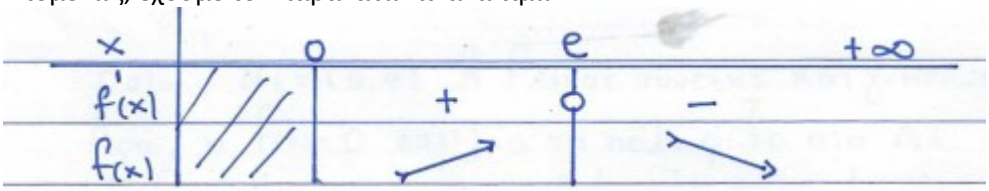
Η f συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}+\alpha\right)'=\frac{(\ln x)'x-\ln x(x)'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$$

Έχουμε:

- $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Leftrightarrow 1-\ln x=0 \Leftrightarrow \ln x=\ln e \overset{\ln x\,1-1}{\Leftrightarrow} x=e$
- $f'(x)>0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}>0 \Leftrightarrow 1-\ln x>0 \Leftrightarrow \ln x<1 \Leftrightarrow \ln x<\ln e \overset{\ln x\uparrow}{\Rightarrow} x<e$
- $f'(x)<0 \Leftrightarrow \frac{1-\ln x}{x^2}<0 \Leftrightarrow 1-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow \ln x>\ln e \overset{\ln x\uparrow}{\Rightarrow} x>e$

Επομένως, έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών



Έτσι, η f είναι γνησίως αύξουσα στο (o,e], γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ και έχει (ολικό) μέγιστο για x=e το $f(e)=\frac{\ln e}{e}+\alpha=\frac{1}{e}+\alpha$.

Από το σύνολο τιμών της f έχουμε ότι η μέγιστη τιμή της f είναι η $1+\frac{1}{e}$. Άρα, υποχρεωτικά ισχύει ότι

$\frac{1}{e}+\alpha=1+\frac{1}{e} \Leftrightarrow \alpha=1$.

Β΄ τρόπος

Επειδή η f έχει στο $(0,+\infty)$ μέγιστη τιμή το $1+\frac{1}{e}$ υπάρχει $\kappa\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(\kappa)=1+\frac{1}{e}$.

Ισχύει λοιπόν ότι $f(x)\le f(x)$ για κάθε x>0. Άρα, η συνάρτηση f παρουσιάζει στη θέση κ (ολικό) μέγιστο, είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$, άρα και στο κ και το κ είναι εσωτερικό σημείο του $(0,+\infty)$. Επομένως, από το Θεώρημα Fermat ισχύει ότι $f'(\kappa)=0$.

Άρα, $f'(\kappa)=0\Leftrightarrow\frac{1-\ln\kappa}{\kappa^2}=0\Leftrightarrow 1-\ln\kappa=0\Leftrightarrow\ln\kappa=1$

$\Leftrightarrow\ln\kappa=\ln e\overset{\ln x\text{1-1}}{\Leftrightarrow}\kappa=e$. Έτσι, $f(\kappa)=1+\frac{1}{e}\overset{\kappa=e}{\Leftrightarrow}f(e)=1+\frac{1}{e}$

$\Leftrightarrow\frac{\ln e+\alpha\cdot e}{e}=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow\frac{1+\alpha\cdot e}{e}=\frac{e+1}{e}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1+\alpha\cdot e=e+1\Leftrightarrow\alpha e=e\Leftrightarrow\alpha=1$

Δ2. Για α=1 έχουμε $f(x)=\frac{\ln x+x}{x}=\frac{\ln x}{x}+\frac{x}{x}=\frac{\ln x}{x}+1$

Έστω $\Delta_1=(0,e)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ1.

Άρα, η έχει μία το πολύ ρίζα στο Δ1.

Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]\subseteq\Delta_1$. Ισχύουν ότι:

- $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}+1\quad\frac{\ln1-\ln2}{\frac{1}{2}}+1=\frac{-\ln2}{\frac{1}{2}}+1=-2\ln2+1=\ln e-\ln4=$

$=\ln\frac{e}{4}<0$ γιατί $0<\frac{e}{4}<1$.

- $f(1)=\frac{\ln1}{1}+1=1>0$. Άρα, $f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot f(1)<0$.

Από το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)\subseteq\Delta_1$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_1, το x_0 είναι μοναδικό.

Έστω $\Delta_2=[e,+\infty)$. Η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο Δ2.

Είναι

$f(e)=\frac{\ln e}{e}+1=\frac{1}{e}+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}+1\right)=1$ γιατί $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\text{dH}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

Άρα, $f(\Delta_2)=\left(1,1+\frac{1}{e}\right]$. Όμως $0\notin f(\Delta_2)$ άρα η $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο Δ_2.

Επομένως, η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα x_0 η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Δ3. i) Είναι $f(4)=\frac{\ln 4}{4}+1=\frac{\ln 2^2}{4}+1=\frac{2\ln 2}{4}+1=\frac{\ln 2}{2}+1=f(2)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$, οπότε και 1-1 σε αυτό. Επομένως, $f(x)=f(4)\Leftrightarrow f(x)=f(2)\overset{f\,1-1}{\Leftrightarrow}x=2$.

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$, οπότε και 1-1 σε αυτό. Επομένως, $f(x)=f(4)\overset{f_{1-1}}{\Leftrightarrow}x=4$.
Τελικά, η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει ακριβώς δύο λύσεις τις x=2 και x=4.

ii) $2^x\le x^2\underset{\ln x\uparrow}{\overset{x>0}{\Leftrightarrow}}\ln 2^x\le\ln x^2\Leftrightarrow x\cdot\ln 2\le 2\ln x\Leftrightarrow\frac{\ln 2}{2}\le\frac{\ln x}{x}$

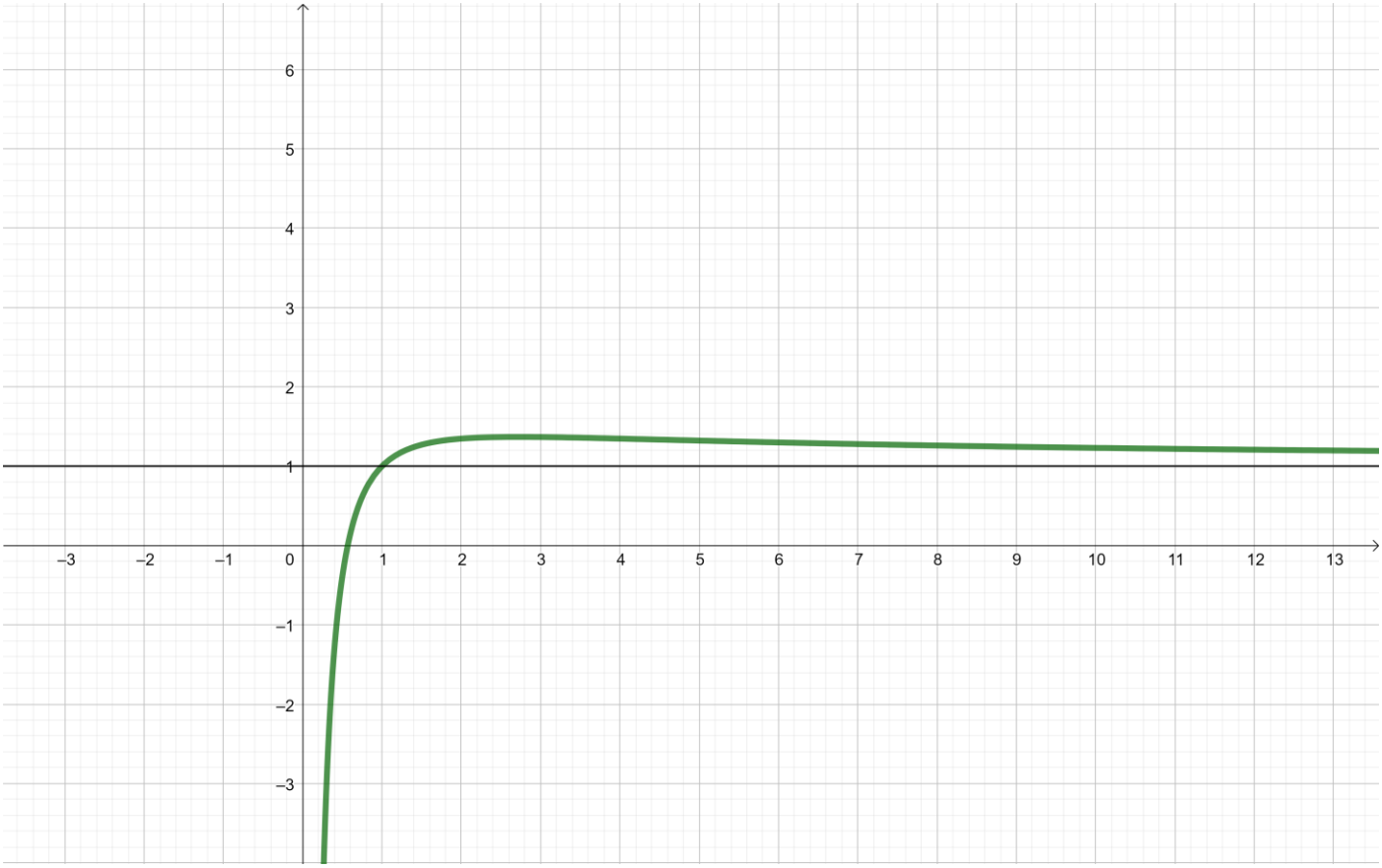
$\Leftrightarrow\frac{\ln x}{x}+1\ge\frac{\ln 2}{2}+1\Leftrightarrow f(x)\ge f(2)$

Αν $x\in(0,e):f(x)\ge f(2)\overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}x\ge 2$ άρα $2\le x<e$ (1)

Αν $x\in[e,+\infty):f(x)\ge f(2)\overset{f(2)=f(4)}{\Rightarrow}f(x)\ge f(4)\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}x\le 4$ άρα $e\le x\le 4$ (2)

Από τις σχέσεις (1) και (2): $2\le x\le 4$

Δ4 **x=0 , y=1**



8ο Διαγώνισμα στα Μαθηματικά

Θέμα Α

Α1. Να αποδείξετε ότι $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$ για $\alpha \in \mathbb{R} - Z$, $x \in (0,+\infty)$ **(3 μ)**

Α2. Να αποδείξετε ότι $\left(\alpha^{x}\right)' = \alpha^{x} \ln \alpha$ για $\alpha > 0$, $x \in \mathbb{R}$ **(3 μ)**

Α3. Να αποδείξετε ότι $\left(\ln|x|\right)' = \dfrac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^{*}$ **(3 μ)**

Α4. Έστω f ορισμένη σε διάστημα Δ , συνεχής στο Δ και $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το Δ. **(6 μ)**

Α5. Σωστό ή Λάθος ;

1) Αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$ τότε $f(\alpha) = f(\beta)$.
2) Αν $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε υπάρχει $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0) = 0$.
3) Αν f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha\ ,\ \alpha+21)$ τέτοιο ώστε $21f'(\xi) = f(\alpha+21) - f(\alpha)$.
4) Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $f = g$.
5) Αν f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ τότε $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

(10 μ)

Θέμα Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 1$

Β1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(5 μ)**

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f . **(5 μ)**

Β3. Να δείξετε ότι η f έχει μια αρνητική και δυο θετικές ρίζες. **(5 μ)**

Β4. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της C_f που είναι παράλληλες στην ευθεία $y = 9x$. **(5 μ)**

Β5. Δίνεται $g: [0,2] \to \mathbb{R}$ συνεχής με $g''(x) < 0$ για κάθε $x \in (0,2)$. Αν $g'(1) = 0$ και $g(1) = -2$, να δείξετε ότι δεν υπάρχει κοινό σημείο των C_f και C_g . **(5 μ)**

Θέμα Γ

Δίνεται η $f(x)=e^{x-1}-2\ln x+x$ και συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$ για την οποία ισχύει $g^3(x)+g(x)=-x$ για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(6 μ)**

Γ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y=ex+21$. **(6 μ)**

Γ3. Να δείξετε ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα . **(6 μ)**

Γ4. Να δείξετε ότι οι C_f και C_g δεν έχουν κοινά σημεία. **(3 μ)**

Γ5. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g^{-1}(x)}{\eta\mu x}$ **(4 μ)**

Θέμα Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$xf'(x)=f(x)+x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$ και $f(1)=0$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(x)=x\ln x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. **(5 μ)**

Δ2. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα. **(5 μ)**

Δ3. Να δείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $x_0\in(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=21$. **(5 μ)**

Δ4. Να δείξετε ότι για κάθε $x\in(0,+\infty)$ ισχύει $f(x+3)+f(x+1)>2f(x+2)$ **(5 μ)**

Δ5. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,21)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)(\xi-21)^4+4f(\xi)(\xi-21)^3=0$$ **(5 μ)**

Καλή επιτυχία !!!

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Λύση

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0) \cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Άσκηση 2

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- f συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.

Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \qquad \textbf{(1)}$$

  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε, λόγω της **(1)**, είναι

  $f(x_1)=f(x_2)$.

- Αν $x_1 > x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$.

Σε όλες τις περιπτώσεις λοιπόν είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

Άσκηση 3

i. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

ii. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Λύση

i. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο,

ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$,

οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

ii. Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0.$$

Άσκηση 4

i. Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f,g είναι συνεχείς στο Δ
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει

$$f(x)=g(x)+c$$

ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής;

Λύση

i. Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

Επομένως σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.

ii. Γεωμετρικά το Θ.Μ.Τ. για μια συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha,f(\beta))$ και $B(\beta,f(\beta))$.

Άσκηση 5

i. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.

Αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να δείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

ii. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Λύση

i. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει ένα $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ **(1)**

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

- αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$,

  οπότε θα έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$ **(2)**

- αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$,

  οπότε θα έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$ **(3)**

Έτσι από τις **(2)** και **(3)** έχουμε $f'(x_0)=0$.

Η απόδειξη για το τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

ii. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Άσκηση 6

i. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $f'(x)=-\eta\mu x$

ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle;

Λύση

i. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\cdot\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}=$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}\right)=$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot 0-\eta\mu x\cdot 1=-\eta\mu x.$$

Δηλαδή $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$.

ii. Γεωμετρικά το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Άσκηση 7

i. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}, \nu \in \mathbf{N}-\{0,1\}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ότι ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$.

ii. Πότε μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ, λέγεται κυρτή στο Δ;

Λύση

i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbf{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-{x_0}^{\nu}}{x-x_0}=$$

$$\frac{(x-x_0)\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+{x_0}^{\nu-1}\right)}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+{x_0}^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+{x_0}^{\nu-1}\right)={x_0}^{\nu-1}+{x_0}^{\nu-1}+\ldots+{x_0}^{\nu-1}=\nu{x_0}^{\nu-1},$$

δηλαδή $\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}$.

ii. Η συνάρτηση f λέγεται κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbf{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}$.

Λύση

Αν $x>0$, τότε $\left(\ln|x|\right)'=\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$, ενώ αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$$y'=\left(\ln u\right)'=\frac{1}{u}u'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$$

και άρα $\left(\ln|x|\right)'=\frac{1}{x}$.

Άσκηση 9

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Λύση

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0,

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0) \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0] \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0,

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0) \text{ για κάθε } x\in[x_0,\beta) \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως λόγω των **(1)** και **(2)**, ισχύει

$$f(x)\le f(x_0) \text{ για κάθε } x\in(\alpha,\beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Άσκηση 10

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$ με $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

ii. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού μεγίστου για την f.

Λύση

i. Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

ii. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε

$$f(x)\le f(x_0)\ \text{για κάθε}\ x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μέγιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 11

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f\left(x\right)=\alpha^{x},\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει:

$f'\left(x\right)=\alpha^{x}\cdot\ln\alpha$.

Λύση

Πράγματι, αν $y=\alpha^{x}=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^{x}\cdot\ln\alpha\ .$$

Άσκηση 12

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν η $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Λύση

Έχουμε ότι

$$f'(x)>0, \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

- αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

- αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο$[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.

- Τέλος αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Άσκηση 13

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\left(x\right)=\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη $\mathbf{R}$ και ισχύει $f'\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x$.

Λύση

Για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει

$$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\frac{\eta\mu\left(x+h\right)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}=$$

$$\eta\mu x\cdot\frac{\left(\sigma\upsilon\nu h-1\right)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1 \text{ και } \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0,$$

έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\sigma\upsilon\nu x.$$

Δηλαδή $\left(\eta\mu x\right)'=\sigma\upsilon\nu x$

Άσκηση 14

Να αποδείξετε ότι η αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Λύση

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Άσκηση 15

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\mathbf{R}_1=\{x\in\mathbf{R}\,/\,\sigma\upsilon\nu x\neq 0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}_1$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=$$

$$\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ii. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbf{R_1}$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{x-2}+x-3$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

2. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ και το σύνολο τιμών της f.

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση και έχουμε:

   $f'\left(x\right)=e^{x-2}+1>0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$,

   οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbf{R}$.

ii. Μία προφανής ρίζα της συνάρτησης είναι το $x=2$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα αυτή η ρίζα είναι μοναδική. Για το σύνολο τιμών υπολογίζουμε τα παρακάτω όρια:

   $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-2}+x-3\right)=-\infty$,

   αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x-2}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-3\right)=-\infty$ και

   $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-2}+x-3\right)=+\infty$,

   αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-2}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-3\right)=+\infty$.

   Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbf{R}$, το σύνολο τιμών της f είναι όλο το $\mathbf{R}$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=4x^3+2\left(\lambda-1\right)x-\lambda$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $\left(0,1\right)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F\left(x\right)=x^4+\left(\lambda-1\right)x^2-\lambda x,$$

η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική. Επιπλέον ισχύει $F\left(0\right)=F\left(1\right)=0$,

επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f , αφού η f :

- είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,1\right)$

και $F\left(0\right)=F\left(1\right)$,

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,1\right)$ τέτοιο, ώστε $F'\left(\xi\right)=0$. Όμως $f\left(\xi\right)=F'\left(\xi\right)=0$, οπότε αποδείχτηκε το ζητούμενο.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\ln\left(x^2\right)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f.

ii. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii. Να τη μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Λύση

i. Πρέπει $x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$, άρα το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbf{R}^*$. Είναι

$$f\left(x\right)=\ln\left(x^2\right)=\ln\left(\left|x\right|^2\right)=2\ln\left|x\right|$$

οπότε

$$f'\left(x\right)=\left(2\ln\left|x\right|\right)'=2\frac{1}{x}.$$

ii. Έστω $A\left(x_0,2\ln\left|x_0\right|\right)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_f. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y-2\ln\left|x_0\right|=\frac{2}{x_0}\left(x-x_0\right)\qquad\textbf{(1)}$$

και για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει οι συντεταγμένες του $O\left(0,0\right)$ να επαληθεύουν την **(1)**, οπότε η **(1)** γίνεται:

$$-2\ln\left|x_0\right|=\frac{2}{x_0}\left(-x_0\right)\Leftrightarrow\ln\left|x_0\right|=1=\ln e\Leftrightarrow x_0=\pm e\ ,\ \text{και}\ f\left(x_0\right)=2\ln e=2$$

άρα τα σημεία της C_f είναι τα $A\left(e,2\right)$ και $B\left(-e,2\right)$

iii. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbf{R}^*=\left(-\infty,0\right)\cup\left(0,+\infty\right)$ και είναι συνεχής.

Επειδή $f'\left(x\right)=2\frac{1}{x}$, έχουμε ότι:

$f'(x)<0$ για $x\in(-\infty,0)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και

$f'(x)>0$ για $x\in(0,+\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης έχουμε ότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι για $x\in(-\infty,0)$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty,+\infty)$ και για $x\in(0,+\infty)$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty,+\infty)$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Επίσης η f δεν έχει ακρότατα, αφού είναι γνησίως αύξουσα σε δυο ανοιχτά διαστήματα.

iv. Από τα όρια $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$, έπεται ότι η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$, δηλαδή τον άξονα y'y.

Πλάγια ασύμπτωτη δεν έχει, αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0,$$

όμως

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-0\cdot x\right]=\lim_{x\to+\infty}2\ln x=+\infty.$$

Ομοίως και στο $-\infty$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=\frac{4}{x}, x\neq 0$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ με $x_0\neq 0$.

ii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.

iii. Αν Α και Β τα σημεία που η εφαπτομένη στο Μ τέμνει τους άξονες, να δείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

<u>Λύση</u>

i. Ισχύει: $f'\left(x\right)=-\frac{4}{x^2}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι: $y-\frac{4}{x_0}=-\frac{4}{{x_0}^2}\left(x-x_0\right)$ **(1)**

ii. Θα βρούμε σε ποια σημεία τέμνει η εφαπτομένη τους άξονες:

για $x=0$ η **(1)** γίνεται $y-\frac{4}{x_0}=-\frac{4}{{x_0}^2}\left(-x_0\right)\Leftrightarrow y=\frac{8}{x_0}$

και για $y=0$ η **(1)** γίνεται $-\frac{4}{x_0}=-\frac{4}{{x_0}^2}\left(x-x_0\right)\Leftrightarrow x=2x_0$.

Άρα η **(1)** τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(0,\frac{8}{x_0}\right)$ και $B\left(2x_0,0\right)$.

Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ ισούται με

$\left(OAB\right)=\frac{1}{2}\cdot\left(OA\right)\cdot\left(OB\right)=\frac{1}{2}\left|\frac{8}{x_0}\right|\left|2x_0\right|=8$ τ.μ,

άρα είναι σταθερό.

iii. Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες:

$\left(\frac{2x_0+0}{2},\frac{\frac{8}{x_0}+0}{2}\right)$ δηλαδή $\left(x_0,\frac{4}{x_0}\right)$, άρα είναι το σημείο Μ.

Άσκηση 5

Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} x^4+5x,\ x\geq 0 \\ 5\cdot\eta\mu x,\ x<0 \end{cases}.$$

Λύση

Η πρώτη παράγωγος στα ανοιχτά διαστήματα είναι:

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3+5, x>0 \\ 5\cdot\sigma\upsilon\nu x, x<0 \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με τον ορισμό της παραγώγου:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+5x-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x^3+5\right)=5$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\eta\mu x-0}{x}=5.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f'(0)=5$.

Η δεύτερη παράγωγος στα ανοιχτά διαστήματα είναι:

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2, x>0 \\ -5\cdot\eta\mu x, x<0 \end{cases}$$

Στο $x=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+5-5}{x}=\lim_{x\to 0}\left(4x^2\right)=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sigma\upsilon\nu x-5}{x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0.$$

Άρα $f''(0)=0$, οπότε έχουμε:

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2, x\geq 0 \\ -5\cdot\eta\mu x, x<0 \end{cases}$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+1$. Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

i. να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

ii. να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x'x.

iii. να είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

iv. να είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

<u>Λύση</u>

Ισχύει $f'(x)=\left(x^2-3x+1\right)'=2x-3$.

i. Η ευθεία $y=x$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 1, άρα πρέπει $f'(x)=1\Leftrightarrow 2x-3=1\Leftrightarrow x=2$ και $f(2)=-1$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $A(2,-1)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

ii. Επειδή $\varepsilon\varphi 135^\circ=-1$, πρέπει $f'(x)=-1\Leftrightarrow 2x-3=-1\Leftrightarrow x=1$. Επίσης $f(1)=-1$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $B(1,-1)$ στο οποίο η εφαπτομένη να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x'x.

iii. Πρέπει $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ και $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{4}$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $\Gamma\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

iv. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\frac{1}{2}$, πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης να είναι -2, οπότε $f'(x)=-2\Leftrightarrow 2x-3=-2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $\Delta\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

Άσκηση 7

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

i. $x^{\eta\mu x}, x>0$

ii. $2^{x\cdot\ln x}, x>0$

iii. $\sqrt{5x^8+1}$

Λύση

i. $x^{\eta\mu x}=\left(e^{\ln x}\right)^{\eta\mu x}=e^{\ln x\cdot\eta\mu x}$, οπότε θέτοντας

$u=\ln x\cdot\eta\mu x$ έχουμε

$\left(x^{\eta\mu x}\right)'=\left(e^{\ln x\cdot\eta\mu x}\right)'=\left(e^{u}\right)'=$

$e^{u}\cdot u'=e^{\ln x\cdot\eta\mu x}\cdot\left(\ln x\cdot\eta\mu x\right)'=x^{\eta\mu x}\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\ln x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right).$

ii. Έστω $u=x\cdot\ln x$, οπότε

$\left(2^{x\cdot\ln x}\right)'=\left(2^{u}\right)'=2^{u}\cdot\ln 2\cdot u'=2^{x\cdot\ln x}\cdot\ln 2\cdot\left(x\cdot\ln x\right)'=2^{x\cdot\ln x}\cdot\ln 2\cdot\left(\ln x+1\right).$

iii. Έστω $u=5x^8+1$, οπότε $\left(\sqrt{5x^8+1}\right)'=\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'=\frac{\left(5x^8+1\right)'}{2\sqrt{5x^8+1}}=\frac{20x^7}{\sqrt{5x^8+1}}$

Άσκηση 8

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$-2x+1\le f(x)\le x^4-2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}, \qquad \textbf{(1)}$$

τότε

i. να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$

ii. να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και ισχύει $f'(0)=-2$.

Λύση

i. Για $x=0$ η **(1)** γίνεται $1\le f(0)\le 1$, άρα $f(0)=1$. Επίσης

$\lim\limits_{x\to 0}(-2x+1)=\lim\limits_{x\to 0}(x^4-2x+1)=1$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$.

ii. Η σχέση **(1)** γίνεται:

$-2x+1-1\le f(x)-f(0)\le x^4-2x+1-1 \Leftrightarrow -2x\le f(x)-f(0)\le x^4-2x$, οπότε διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- αν $x>0$, τότε
  $\frac{-2x}{x}\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\frac{x^4-2x}{x}\Leftrightarrow -2\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le x^3-2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}(-2)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3-2)=-2$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$.
- αν $x<0$, τότε
  $\frac{-2x}{x}\ge\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge\frac{x^4-2x}{x}\Leftrightarrow -2\ge\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge x^3-2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}(-2)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^3-2)=-2$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$.

Από τα δυο προηγούμενα προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f'(0)=-2$.

Άσκηση 9

Έστω $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0>0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-{x_0}^2}$

ii. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}$

Λύση

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Οπότε

i. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-{x_0}^2}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left(\sqrt{f(x)}\right)^2-\left(\sqrt{f(x_0)}\right)^2}{(x-x_0)(x+x_0)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{(x+x_0)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)}=\dfrac{f'(x_0)}{4\cdot x_0\cdot\sqrt{f(x_0)}}$.

(Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{f(x_0)}$.)

ii. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x_0}\right)^2}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim\limits_{x\to x_0}\left[\left[f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)\right]=$

$6\cdot f'(x_0)\cdot f^2(x_0)\cdot\sqrt{x_0}$.

(Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=f^2(x_0)$)

Άσκηση 10

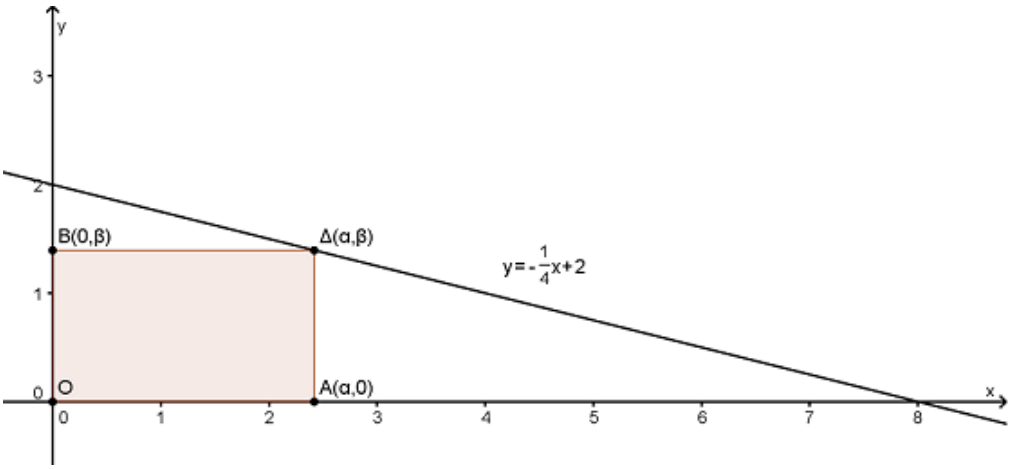
Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $O(0,0)$, δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2$.

Να βρείτε τις διαστάσεις του α,β ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

Λύση

Το εμβαδό του ορθογωνίου ισούται με $E=\alpha\cdot\beta$, όπου α,β θετικοί πραγματικοί. Η τέταρτη κορυφή (βλέπε σχήμα) είναι η $\Delta(\alpha,\beta)$,

η οποία ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y=-\frac{1}{4}x+2$, οπότε ισχύει $\beta=-\frac{1}{4}\alpha+2$.



Έτσι το εμβαδό του ορθογωνίου γίνεται

$E(\alpha)=a\cdot\left(-\frac{1}{4}\alpha+2\right)=-\frac{1}{4}\alpha^2+2\cdot\alpha$ με $\alpha\in(0,8)$, αφού από την ανισότητα $\beta>0$ έχουμε

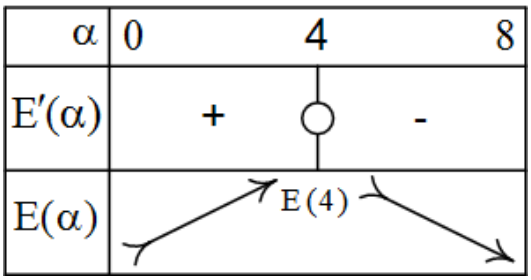
$-\frac{1}{4}\alpha+2>0\Leftrightarrow\alpha<8$.

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση του εμβαδού παίρνουμε:

$E'(\alpha)=\left(-\frac{1}{4}\alpha^2+2\cdot\alpha\right)'=-\frac{1}{2}\alpha+2$, οπότε $E'(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=4$ και

$E'(\alpha)>0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\alpha+2>0\Leftrightarrow\alpha<4$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:



Άρα η συνάρτηση του Εμβαδού είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,4]$, γνησίως φθίνουσα στο $[4,8)$ και είναι συνεχής στο 4, άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $\alpha = 4$. Οπότε $\beta = -\frac{1}{4}4 + 2 = 1$.

Άσκηση 11

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2.$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

Λύση

Αρχικά θα δείξουμε ότι $f(0)=5$.

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-5}{x}$, με $x\neq 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=2$.

Λύνουμε επίσης ως προς $f(x)$ και έχουμε:

$f(x)=x\cdot g(x)+5$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot g(x)+5\right]=0\cdot 2+5=5$.

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ που σημαίνει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=5$.

Έτσι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

Άσκηση 12

Δίνεται συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{x}\cdot \eta\mu x$. Να δείξετε ότι:

$$f^{(3)}\left(x\right)+2\cdot f'\left(x\right)=2f''\left(x\right)$$

Λύση

Έχουμε

$f'\left(x\right)=\left(e^{x}\cdot \eta\mu x\right)'=e^{x}\cdot \eta\mu x+e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x$,

$f''\left(x\right)=\left(e^{x}\cdot \eta\mu x+e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x\right)'=2e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x$ και

$f^{(3)}\left(x\right)=\left(2e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x\right)'=2e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x-2e^{x}\cdot \eta\mu x$.

Οπότε

$f^{(3)}\left(x\right)+2\cdot f'\left(x\right)=2e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x-2e^{x}\cdot \eta\mu x+2\left(e^{x}\cdot \eta\mu x+e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x\right)=$

$4e^{x}\cdot \sigma\upsilon\nu x=2f''\left(x\right)$.

Άρα

$f^{(3)}\left(x\right)+2\cdot f'\left(x\right)=2f''\left(x\right)$.

Άσκηση 13

Να δείξετε ότι:

$2\ln(x-1) \le x-3+\ln 4$ για κάθε $x>1$.

Λύση

Επειδή

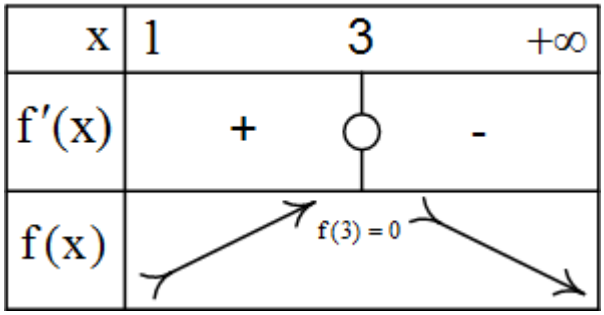
$$2\ln(x-1) \le x-3+\ln 4 \Leftrightarrow 2\ln(x-1)-x+3-\ln 4 \le 0$$

αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=2\ln(x-1)-x+3-\ln 4$ με $x>1$, έχει ολικό μέγιστο το 0.

Πράγματι

$$f'(x)=\frac{2}{x-1}-1=\frac{3-x}{x-1},$$

επίσης $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$ και $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<3$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών



Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3,+\infty)$ και επειδή είναι συνεχής στο $x=3$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό μέγιστο το $f(3)=0$, άρα $f(x) \le 0$ για κάθε $x>1$.

Άσκηση 14

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A(1,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2+7x$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμικές.

Έχουμε $f'(x)=3x^2$, οπότε $f'(1)=3$.

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,1)$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \text{ ή}$$

$$\varepsilon: y=3x-2.$$

Για να εφάπτεται η ε και στη C_g, θα πρέπει να υπάρχει ένα x_0 τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0)=3 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\text{και } g(x_0)=3x_0-2. \quad \textbf{(2)}$$

Η **(1)** μας δίνει:

$g'(x_0)=3 \Leftrightarrow 4x_0+7=3 \Leftrightarrow x_0=-1$

και $g(-1)=2\cdot(-1)^2+7(-1)=-5$, οπότε η **(2)** γίνεται

$-5=3(-1)-2$ το οποίο ισχύει.

Άρα η ευθεία $\varepsilon: y=3x-2$ εφάπτεται στη C_f στο $A(1,1)$ και στη C_g στο $B(-1,-5)$.

Άσκηση 15

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4+24x^2+4x-40, x\in\mathbf{R}$.

Υποθέτουμε ότι η f έχει τρεις ρίζες $\rho_1,\rho_2,\rho_3\in\mathbf{R}$ με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$. Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$.

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και επίσης

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=0$.

Όμως $f'(x)=4x^3+48x+4$, η οποία είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$, που σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\gamma)=0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού

$$f''(x)=12x^2+48>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}.$$

Άρα η συνάρτηση f, οπότε και η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=x^2-4x+3$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+7$.

ii. Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $O\left(0,0\right)$.

iii. Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο $A\left(2,0\right)$;

<u>Λύση</u>

Έχουμε $f'\left(x\right)=2x-4$.

i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι $\lambda_\varepsilon=-\frac{1}{2}$, οπότε αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης θα ισχύει $\lambda\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\lambda=2$.

Αν $B\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη, τότε

$$f'\left(x_0\right)=2\Leftrightarrow 2x_0-4=2\Leftrightarrow x_0=3 \text{ και } f\left(3\right)=0,$$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+7$ είναι η παρακάτω:

$$y-0=2\left(x-3\right) \text{ ή}$$

$$y=2x-6.$$

ii. Έστω $\Gamma\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\cdot\left(x-x_0\right).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο $O\left(0,0\right)$, θα ισχύει:

$$-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\cdot\left(-x_0\right)\Leftrightarrow -x_0^{\,2}+4x_0-3=-2x_0^{\,2}+4x_0\Leftrightarrow$$

$$x_0^{\,2}=3\Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{3}$$

και $f\left(\sqrt{3}\right)=6-4\sqrt{3},\ f\left(-\sqrt{3}\right)=6+4\sqrt{3}$.

Άρα τα σημεία επαφής είναι τα $\Gamma\left(\sqrt{3},6-4\sqrt{3}\right)$ και $\Delta\left(-\sqrt{3},6+4\sqrt{3}\right)$.

iii. Έστω ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από σημείο $A(2,0)$ και $E\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ το σημείο επαφής της C_f με αυτήν, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y-f\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right)\cdot\left(x-x_1\right).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$, θα ισχύει:

$$-f\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right)\cdot\left(2-x_1\right)\Leftrightarrow -x_1^{\,2}+4x_1-3=-2x_1^{\,2}+8x_1-8\Leftrightarrow$$

$$x_1^{\,2}-4x_1+5=0,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού η τελευταία δευτεροβάθμια εξίσωση έχει αρνητική διακρίνουσα ($\Delta=-4<0$), άρα είναι αδύνατη, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από σημείο $A(2,0)$.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+k\cdot x-1$, όπου $k\in\mathbf{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\left(0, f(0)\right)$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$, να βρείτε την τιμή του k.

ii. Αν $k=2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε $f'(x)=e^x+k$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση $y=3x+5$, είναι $\lambda=3$.

Για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A\left(0, f(0)\right)$ παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$, θα πρέπει

$$f'(0)=\lambda=3\Leftrightarrow e^0+k=3\Leftrightarrow k=2.$$

ii. Για $k=2$ έχουμε $f(x)=e^x+2x-1$.

Για να είναι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=0.$$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x+2x-1-(2x-1)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Άσκηση 18

i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+2\alpha x^3+24x^2+5x-7$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του α, ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$

ii. Για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbf{R}$ η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A(1, f(1))$

Λύση

1. Έχουμε

$$f'(x)=4x^3+6\alpha x^2+48x+5,$$

$$f''(x)=12x^2+12\alpha x+48=12\left(x^2+\alpha x+4\right).$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=\alpha^2-16$.

Όταν $\Delta<0$ τότε $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

Όταν $\Delta=0$ τότε $f''(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, όπου η ισότητα ισχύει για ένα μεμονωμένο σημείο, άρα η f είναι πάλι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

Άρα πρέπει

$$\Delta\leq 0\Leftrightarrow\alpha^2-16\leq 0\Leftrightarrow\alpha^2\leq 16\Leftrightarrow|\alpha|\leq 4\Leftrightarrow -4\leq\alpha\leq 4.$$

2. Πρέπει

$$f''(1)=0\Leftrightarrow 12+12\alpha+48=0\Leftrightarrow\alpha=-5.$$

Επίσης θα πρέπει να ελέγξουμε αν αλλάζει η κυρτότητα δεξιά και αριστερά του $x=1$.

Για $\alpha=-5$, $f''(x)=12\left(x^2-5x+4\right)$ και

$f''(x)=0\Leftrightarrow 12\left(x^2-5x+4\right)=0\Leftrightarrow\left(x=1\text{ ή }x=4\right)$. Οπότε έχουμε τον πίνακα προσήμου:

X	-∞	1		4	+∞
f''(x)	+	○	-	○	+

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,1]$ και κοίλη στο $[1,4]$. Επίσης επειδή είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(1, f(1))$, συνεπώς το $A(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άρα για $\alpha = -5$ το $A(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άσκηση 19

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

   i. $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

   ii. $e^{x^2} \geq 1-x$, για κάθε $x \geq 0$.

2. Να δείξετε ότι $e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

Λύση

1. i. Έχουμε

   $e^{x-1} \geq x \Leftrightarrow e^{x-1} - x \geq 0$.

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - x$, $x \in \mathbf{R}$.

   Θα αποδείξουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

   Ισχύει

   $f'(x) = e^{x-1} - 1$,

   οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$

   και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} > e^0 \Leftrightarrow x > 1$,

   οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f′(x)	-	0	+
f(x)	↘	f(1) = 0	↗

   Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και συνεχής στο $x = 1$, άρα στο σημείο αυτό παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 0$.

   Οπότε ισχύει

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

ii. Έχουμε

$$e^{x^2} \geq 1-x \Leftrightarrow e^{x^2} -1+x \geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} -1+x$, $x \in [0,+\infty)$.

Θα αποδείξουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

Ισχύει

$$f'(x) = \left(e^{x^2} -1+x\right)' = 2x \cdot e^{x^2} +1,$$

οπότε $f'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Έτσι

$$f(x) \geq f(0) = 0, \text{ για κάθε } x \in [0,+\infty),$$

που σημαίνει:

$$e^{x^2} \geq 1-x, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

2. Έχουμε

$$e^x + x \geq \frac{x^2}{2} +1 \Leftrightarrow e^x + x - \frac{x^2}{2} -1 \geq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x - \frac{x^2}{2} -1$, $x \in [0,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0,+\infty)$.

Ισχύει:

$$f'(x) = \left(e^x + x - \frac{x^2}{2} -1\right)' = e^x +1-x$$

και

$$f''(x) = \left(e^x +1-x\right)' = e^x -1.$$

Επίσης

$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ και

$x>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow f''(x)>0$,

άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Οπότε για $x>0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(0)=2>0$, άρα και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως έχει ολικό ελάχιστο στο $x=0$, το $f(0)=0$.

Ισχύει λοιπόν:

$f(x)\geq f(0)=0$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$, άρα

$e^x+x\geq \frac{x^2}{2}+1$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{2x}+5x$.

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x^2}-e^{4x-2}=-5x^2+10x-5$.

Λύση

i. Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι γνησίως μονότονη. Πράγματι:

$$f'\left(x\right)=2e^{2x}+5>0,$$

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, συνεπώς είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται.

ii. Η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{2x^2}-e^{4x-2}=-5x^2+10x-5\Leftrightarrow e^{2x^2}+5x^2=e^{2(2x-1)}+5\left(2x-1\right)\Leftrightarrow$$

$$f\left(x^2\right)=f\left(2x-1\right)$$

και επειδή η f είναι «1-1» έπεται ότι

$$x^2=2x-1\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=1.$$

Άσκηση 2

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x): \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0)=1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x)\cdot e^y + f(y)\cdot e^x \text{ για κάθε } x, y \in \mathbf{R}.$$

i. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

Λύση

i. Για $x=y=0$ η σχέση

$$f(x+y) = f(x)\cdot e^y + f(y)\cdot e^x \qquad \textbf{(1)}$$

γίνεται:

$f(0) = f(0)\cdot 1 + f(0)\cdot 1 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1$, όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της παραγώγου.

ii. Από τη σχέση **(1)** παίρνουμε $f(x_0+h) = f(x_0)\cdot e^h + f(h)\cdot e^{x_0}$ οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[f(x_0)\cdot\frac{e^h-1}{h} + \frac{f(h)}{h}\cdot e^{x_0}\right] =$$

$$f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\cdot e^{x_0} = f(x_0)\cdot e^0 + 1\cdot e^{x_0} = f(x_0) + e^{x_0},$$

αφού το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-e^0}{h-0} = g'(0) = e^0$ με $g(x) = e^x$.

Άρα $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

Άσκηση 3

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R},$$

να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = e^5$.

Λύση

Έχουμε $\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3 \Leftrightarrow \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3 \geq 0$ και θέτοντας

$f(x) = \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3$ παίρνουμε: $f(x) \geq 0 = f(0)$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Άρα το 0 είναι ολικό ελάχιστο της f στο 0 και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, (εσωτερικό σημείο του $\mathbf{R}$) έπεται από το θεώρημα Fermat ότι $f'(0) = 0$.

Όμως $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln \alpha + \beta^x \cdot \ln \beta - 5e^x$, οπότε

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln \alpha + \beta^0 \ln \beta - 5e^0 = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha \cdot \beta) = 5 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = e^5$.

Άσκηση 4

Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ με

$f(0)=f(1)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

i. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $h(x)=f^2(x)\cdot e^{g(x)}$ στο διάστημα $[0,1]$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Λύση

i. Οι συναρτήσεις $f^2(x), e^{g(x)}$ είναι συνεχείς στο $[0,1]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

   Ομοίως οι συναρτήσεις $f^2(x), e^{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

   Επίσης $h(0)=h(1)=0$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση h στο διάστημα $[0,1]$.

ii. Είναι $h'(x)=2f(x)\cdot f'(x)\cdot e^{g(x)}+f^2(x)\cdot e^{g(x)}\cdot g'(x)$ και από το θεώρημα Rolle έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi)=0\Leftrightarrow 2f(\xi)\cdot f'(\xi)\cdot e^{g(\xi)}+f^2(\xi)\cdot e^{g(\xi)}\cdot g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$f(\xi)\cdot e^{g(\xi)}\left[2f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)\right]=0\Leftrightarrow 2f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Άσκηση 5

Αν η ευθεία $y=3x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε

i. να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$

ii. να βρείτε το $\lambda\in\mathbf{R}$ ώστε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f(x)-3x^2-\lambda^2x+2}{f(x)+\lambda x+1}=-1$$

<u>Λύση</u>

Αφού η ευθεία $y=3x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-3x\right]=-1$. Οπότε έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f(x)-3x^2-\lambda^2x+2}{f(x)+\lambda x+1}=-1\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left[\left(f(x)-3x\right)-\lambda^2+\dfrac{2}{x}\right]}{x\cdot\left[\dfrac{f(x)}{x}+\lambda+\dfrac{1}{x}\right]}=-1\Leftrightarrow$$

$$\frac{-1-\lambda^2}{3+\lambda}=-1\Leftrightarrow\lambda^2-\lambda-2=0\Leftrightarrow\left(\lambda=2\ \text{ή}\ \lambda=-1\right).$$

Άσκηση 6

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)<0, f(1)>2$ και $f'(x)\neq 2$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\xi\in(0,1)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\xi)=2\xi$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-2x$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, επίσης ισχύει $g(0)g(1)=f(0)\underbrace{\left[f(1)-2\right]}_{+}<0$,

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $\xi\in(0,1)$ ώστε $g(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=2\xi$.
Επιπλέον ισχύει ότι $g'(x)=f'(x)-2\neq 0$ στο $(0,1)$.
Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 στο $(0,1)$ με $0<\rho_1<\rho_2<1$. Τότε για τη g θα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, αφού:

- η g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2).
- $g(\rho_1)=g(\rho_2)$,

άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε, $g'(x_0)=0$ το οποίο είναι άτοπο.
Άρα η g έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Άσκηση 7

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)=2011$.

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}$$

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, συμπεραίνουμε ότι η f' υπάρχει και είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Ομοίως και η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Επίσης

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\eta\mu x-x\right)=0,$$

οπότε για να βρούμε το $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}$ εφαρμόζουμε μια φορά τον κανόνα De L' Hospital και παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\left(e^x\cdot\eta\mu x-x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}$$

Ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=f'(0)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1\right)=0,$$

άρα το όριο $\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}$ είναι πάλι της μορφής $\left(\frac{0}{0}\right)$,

όμως δε θα εφαρμόσουμε ακόμα μια φορά τον κανόνα De L' Hospital, αφού θα προκύψει στον αριθμητή η $f''(x)$ για την οποία δε γνωρίζουμε αν είναι συνεχής.

Για να συνεχίσουμε με τον υπολογισμό του ορίου θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της $f''(0)$.

Είναι $f''(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x}=2011$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f'(x)}{x}}{e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}{x}}=\frac{2011}{1+1}=\frac{2011}{2},$$

αφού $\lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}e^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=e^0\cdot 1=1$ και

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-e^x\cdot\eta\mu x}{1}=1$. (κανόνας De L'

Hospital)

Άρα $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}=\frac{2011}{2}$.

Άσκηση 8

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f\left(x\right)=x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$.

Λύση

Έστω $B\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με τη C_f .

Η παράγωγος της f ισούται με $f'\left(x\right)=2x$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y-{x_0}^2=2x_0(x-x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

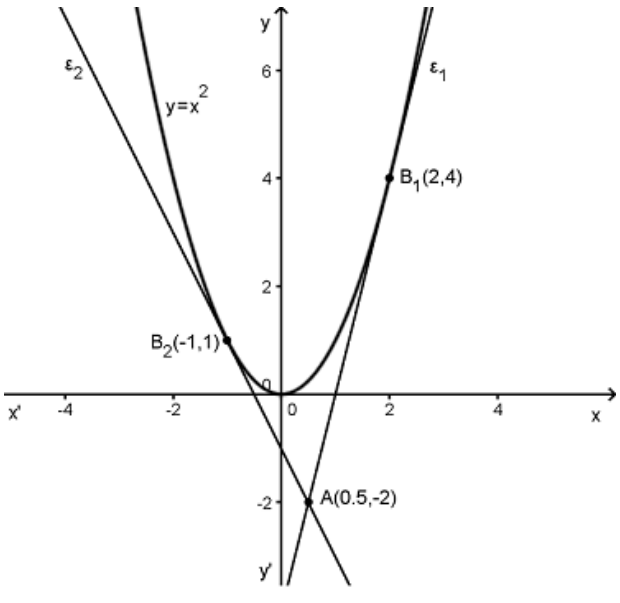
Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$ οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την **(1)** οπότε:

$$-2-{x_0}^2=2x_0(\frac{1}{2}-x_0)\Leftrightarrow {x_0}^2-x_0-2=0\Leftrightarrow \left(x_0=2 \text{ ή } x_0=-1\right),$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην **(1)** παίρνουμε δυο εφαπτόμενες (Σχήμα 1) με εξισώσεις

$\varepsilon_1: y=4x-4$ και σημείο επαφής το $B_1\left(2,4\right)$ και

$\varepsilon_2: y=-2x-1$ και σημείο επαφής το $B_2\left(-1,1\right)$.



Σχήμα 1

Άσκηση 9

Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,3]$. Να δείξετε ότι

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3).$$

Λύση

Αφού η f είναι κοίλη στο $[0,3]$, έπεται ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$.

Επίσης

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3)\Leftrightarrow \frac{f(1)-f(0)}{1-0}>\frac{f(3)-f(2)}{3-2}, \qquad \textbf{(1)}$$

και επειδή εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[0,1]$ και $[2,3]$ υπάρχουν $\xi_1\in(0,1)$ και $\xi_2\in(2,3)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}$$

Με βάση τα τελευταία η **(1)** γίνεται $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$, το οποίο ισχύει, αφού f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$ και $\xi_1<\xi_2$.

Άσκηση 10

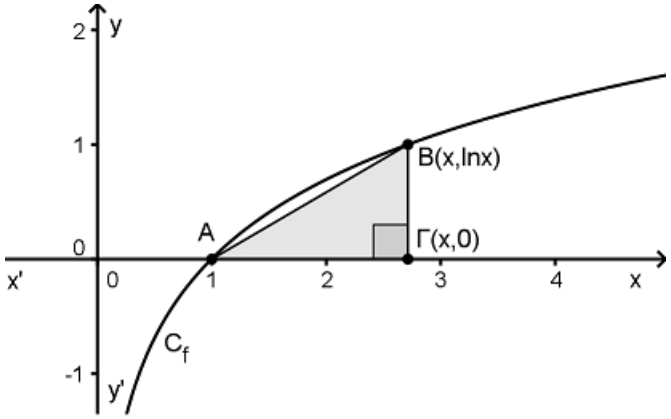
Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x,\ln x)$ και

$\Gamma(x,0)$, $x>1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το $x=2cm$.

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0,5cm/\sec$.

Λύση

Έστω $f(x)=\ln x$.



Σχήμα 1

Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x,\ln x)$ και $\Gamma(x,0), x>1$, ισούται με $E=\frac{1}{2}(A\Gamma)\cdot(B\Gamma)=\frac{1}{2}(x-1)\cdot\ln x$ (βλέπε Σχήμα 1) και επειδή η τετμημένη x είναι συνάρτηση του χρόνου t, έχουμε ότι και το εμβαδό είναι συνάρτηση του χρόνου t με $E(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)-1\right]\cdot\ln x(t)$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή t_0 :

$$E'(t_0)=\frac{1}{2}x'(t_0)\cdot\ln x(t_0)+\frac{1}{2}\left[x(t_0)-1\right]\cdot\frac{x'(t_0)}{x(t_0)}$$

(όπου $\left(\ln x(t)\right)'=\left(\ln u\right)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{x'(t)}{x(t)}$, με $u=x(t)$)

και αντικαθιστώντας το $x(t_0)=2cm$ και $x'(t_0)=0,5cm/\sec$ βρίσκουμε

$$E'(t_0)=\frac{1}{4}\cdot\ln 2+\frac{1}{2}\left[2-1\right]\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)cm^2/\sec$$

Άσκηση 11

i. Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho)=P'(\rho)=0$.

ii. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x-1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

Λύση

i. Έστω ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$.
Τότε υπάρχει πολυώνυμο $\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $P(x)=(x-\rho)^2\cdot\Pi(x)$, οπότε $P(\rho)=(\rho-\rho)^2\cdot\Pi(\rho)=0$.
Επίσης $P'(x)=2(x-\rho)\cdot\Pi(x)+(x-\rho)^2\cdot\Pi'(x)$, οπότε

$$P'(\rho)=2(\rho-\rho)\cdot\Pi(\rho)+(\rho-\rho)^2\cdot\Pi'(\rho)=0.$$

Αντιστρόφως έστω $P(\rho)=P'(\rho)=0$. Αφού $P(\rho)=0$, υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο, ώστε

$$P(x)=(x-\rho)\cdot Q(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Παραγωγίζοντας έχουμε $P'(x)=Q(x)+(x-\rho)\cdot Q'(x)$, οπότε

$P'(\rho)=Q(\rho)+(\rho-\rho)\cdot Q'(\rho)=0$ άρα $Q(\rho)=0$, άρα υπάρχει πολυώνυμο

$\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $Q(x)=(x-\rho)\cdot\Pi(x)$. Αντικαθιστώντας το $Q(x)$ στην **(1)** παίρνουμε $P(x)=(x-\rho)^2\cdot\Pi(x)$, άρα το $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

ii. Βάσει του προηγούμενου ερωτήματος θα ισχύει $P(1)=P'(1)=0$.

Είναι $P(1)=\alpha+\beta-3-1=0$, άρα $\alpha+\beta=4$. Επίσης $P'(x)=3\alpha x^2+2\beta x-3$, οπότε $P'(1)=3\alpha+2\beta-3=0$. Λύνουμε το σύστημα

$\begin{cases}\alpha+\beta=4\\3\alpha+2\beta=3\end{cases}$ και βρίσκουμε $\begin{cases}\alpha=-5\\\beta=9\end{cases}$

Άσκηση 12

Έστω $f:(0,+\infty)\to \mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x)\geq e^{x-1}+\ln x+x^2 \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=2.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^{x-1}-\ln x-x^2$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και επιπλέον

$$g(x)\geq 0=g(1) \text{ για κάθε } x>0.$$

Άρα η g έχει ελάχιστο το 0 για $x=1$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $g'(1)=0$. Όμως $g'(x)=f'(x)-e^{x-1}-\frac{1}{x}-2x$, άρα

$$g'(1)=f'(1)-e^0-\frac{1}{1}-2=0\Leftrightarrow f'(1)=4.$$

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$ θα είναι

$$y-2=4(x-1)\Leftrightarrow y=4x-2$$

Άσκηση 13

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \text{ για κάθε } x\in(-3,3) \qquad \textbf{(1)}$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση

Παραγωγίζουμε δυο φορές τη σχέση **(1)**, η οποία γίνεται

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \Rightarrow 2f(x)\cdot f'(x)+4f'(x)+2x=0 \Rightarrow$$

$$2\left[f'(x)\right]^2+2f(x)\cdot f''(x)+4f''(x)+2=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Έστω ότι το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$, θα ισχύει $f''(x_0)=0$ και αντικαθιστώντας στην **(2)** παίρνουμε

$$2\left[f'(x_0)\right]^2+2f(x_0)\cdot f''(x_0)+4f''(x_0)+2=0 \Leftrightarrow$$

$$2\left[f'(x_0)\right]^2+2=0 \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

Άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$f\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)=2\cdot e^x$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

i. Να δείξετε ότι $f'(0)=2$.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A\left(0,f(0)\right)$ είναι η $y=2x+2$.

iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2cm/\sec$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

Λύση

1. Παραγωγίζουμε τη σχέση $f\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)=2\cdot e^x$ και παίρνουμε

$$f'\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)\cdot\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)'=\left(2\cdot e^x\right)'\Leftrightarrow$$

$$f'\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)\cdot\left(e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)=2\cdot e^x \qquad \textbf{(4)}$$

Για $x=0$ η σχέση **(4)** μας δίνει $f'(0)=2$.

2. Για $x=0$ η σχέση $f\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)=2\cdot e^x$ μας δίνει $f(0)=2$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y-2=2(x-0)\Leftrightarrow y=2x+2.$$

3. Η τετμημένη x του σημείου είναι συνάρτηση του χρόνου t και $x'(t)=2cm/\sec$, οπότε και η τεταγμένη του y του σημείου θα είναι συνάρτηση του χρόνου t και θα ισχύει

$$y(t)=2x(t)+2,$$

οπότε παραγωγίζουμε και έχουμε

$$y'(t)=2x'(t)=4cm/\sec.$$

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

   i. αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.

   ii. αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

2. Έστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\left(x^5+\sigma\upsilon\nu x\right)\cdot e^{f(x)}+\eta\mu x+x\,.$$

   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

   ii. Να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.

<u>Λύση</u>

1. i. Έστω ότι η f είναι άρτια, τότε ισχύει:

   $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

   Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$$\left(f(-x)\right)'=f'(x) \qquad \textbf{(1)}$$

   Θέτοντας $y=f(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=f(u)$. Επομένως,

$$y'=\left(f(u)\right)'=f'(u)\cdot u'=f'(-x)\cdot(-1)=-f'(-x),$$

   άρα η **(1)** γίνεται $f'(-x)=-f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

   Συνεπώς η f' είναι περιττή.

   ii. Έστω ότι η f είναι περιττή, τότε ισχύει:

   $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

   Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$$\left(f(-x)\right)'=-f'(x) \qquad \textbf{(2)}$$

Θέτοντας $y = f(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = f(u)$. Επομένως,

$$y' = \left(f(u)\right)' = f'(u)\cdot u' = f'(-x)\cdot(-1) = -f'(-x),$$

άρα η **(2)** γίνεται $f'(-x) = f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Συνεπώς η f' είναι άρτια.

2. i. Η συνάρτηση $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οι $x^5 + \sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu x + x$ είναι παραγωγίσιμες ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

   ii. Έχουμε:

   $$g'(x) = \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right)'\cdot e^{f(x)} + \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right)\cdot\left(e^{f(x)}\right)' + \left(\eta\mu x + x\right)' =$$

   $$\left(5x^4 - \eta\mu x\right)\cdot e^{f(x)} + \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right)\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x) + \sigma\upsilon\nu x + 1.$$

   Οπότε $g'(0) = e^{f(0)}\cdot f'(0) + \sigma\upsilon\nu 0 + 1 = 2$.

   Στον προηγούμενο υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε $f'(0) = 0$.

   Πράγματι από το προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση f' είναι περιττή, οπότε για $x = 0$ έχουμε $f'(-0) = -f'(0) \Leftrightarrow 2f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$.

Άσκηση 16

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ii. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi\dfrac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$.

Λύση

i. Για $x\neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=x^2\eta\mu\frac{1}{x}.$$

Επίσης $\left|x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\leq x^2 \Leftrightarrow -x^2\leq x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq x^2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι

$$\lim_{x\to 0}x^2\eta\mu\frac{1}{x}=0,$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

ii. Η συνάρτηση $\eta\mu\dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε και η f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $\eta\mu\dfrac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $f\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)=\dfrac{1}{8\pi^3}\cdot\eta\mu\left(2\pi\right)=0$ και $f\left(\dfrac{1}{\pi}\right)=\dfrac{1}{\pi^3}\cdot\eta\mu\left(\pi\right)=0$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$.

iii. Από το **ii)** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(\xi\right)=0$.

Έτσι

$$f'\left(\xi\right)=0\Leftrightarrow 3\xi^2\cdot\eta\mu\frac{1}{\xi}+\xi^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}\cdot\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$3\xi\cdot\eta\mu\frac{1}{\xi}=\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}\Leftrightarrow\sigma\varphi\frac{1}{\xi}=3\xi$$

Άρα η εξίσωση $\sigma\varphi\dfrac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$.

Άσκηση 17

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Λύση

i. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x} \overset{u=x\cdot\ln x}{=} \lim_{u\to 0} e^u = 1, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln x\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-x\right) = 0.$$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \overset{u=x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{=} \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.$$

Άσκηση 18

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(1)=2 \text{ και}$$

$$x\cdot f'(x)=-3\cdot f(x) \text{ για κάθε } x\neq 0.$$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^3\cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Λύση

i. Έχουμε

$$g'(x)=\left(x^3\cdot f(x)\right)'=3x^2\cdot f(x)+x^3\cdot f'(x)=3x^2\cdot f(x)+x^2\cdot\left(-3f(x)\right)=0$$

άρα $g'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $c_1,c_2\in\mathbf{R}$ τέτοιες, ώστε

$$g(x)=\begin{cases}c_1, & x>0\\ c_2, & x<0\end{cases}$$

Επειδή η f είναι άρτια έχουμε $f(1)=2\Leftrightarrow f(-1)=2$ οπότε

$g(1)=1^3\cdot 2=2=c_1$ και $g(-1)=(-1)^3\cdot 2=-2=c_2$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι

$$g(x)=\begin{cases}2, & x>0\\ -2, & x<0\end{cases}$$

ii. Για $x>0$, $g(x)=2\Leftrightarrow x^3\cdot f(x)=2\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{x^3}$.

Για $x<0$, $g(x)=-2\Leftrightarrow x^3\cdot f(x)=-2\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{2}{x^3}$.

Άρα $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}, & x>0\\ \\ -\dfrac{2}{x^3}, & x<0\end{cases}$

iii. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=+\infty$, έπεται ότι η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης ισχύει $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$, άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Επειδή έχουμε οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$, έτσι δεν έχουμε πλάγιες ασύμπτωτες.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+24x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbf{R}$.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της $f(x)=2x^3-15x^2+24x$ είναι το $\mathbf{R}$.

i. $f'(x)=6x^2-30x+24$ και

$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-30x+24=0\Leftrightarrow (x=1 \text{ ή } x=4)$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-∞	1	4	+∞
f′(x)	+	0	-	0 +
f(x)	↗	11	↘ -16	↗

Η f είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[4,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,4]$. Επειδή είναι επίσης συνεχής στα σημεία 1 και 4, παρουσιάζει στη θέση $x=1$ τοπικό μέγιστο το $f(1)=11$ και στη θέση $x=4$ τοπικό ελάχιστο το $f(4)=-16$.

ii. Ισχύει

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, και επειδή η f είναι συνεχής στο R τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

iii. Τα επιμέρους σύνολα τιμών είναι

$f((-\infty,1])=(-\infty,11]$,

$f\left([1,4]\right)=[-16,11]$ και

$f\left([4,+\infty)\right)=[-16,+\infty)$ και από τη μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει ότι

- Αν $\lambda<-16$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(-\infty,1)$.
- Αν $\lambda=-16$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x=4$ και μια δεύτερη στο $(-\infty,1)$.
- Αν $-16<\lambda<11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει τρεις ακριβώς λύσεις, μια σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,4)$ και $(4,+\infty)$.
- Αν $\lambda=11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x=1$ και μια δεύτερη στο $(4,+\infty)$.
- Αν $\lambda>11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(4,+\infty)$.

iv. $f''(x)=12x-30$ και $f''(x)>0\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$. Οπότε έχουμε

x	-∞	5/2	+∞
f''(x)	-	0	+

Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο $x_0=\frac{5}{2}$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(\frac{5}{2},f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άσκηση 20

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R} \text{ και } P'(1) = 2 .$$

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

Λύση

Πρώτα θα προσδιορίσουμε το βαθμό του πολυωνύμου P.

Έστω ότι ο βαθμός του $P(x)$ είναι ν, τότε ο βαθμός του $P'(x)$ είναι $\nu-1$ και του $\left[P'(x)\right]^2$ είναι $2(\nu-1)$. Λόγω της ισότητας $\left[P'(x)\right]^2 = P(x)$, πρέπει να ισχύει:

$$2(\nu-1) = \nu \Leftrightarrow \nu = 2 .$$

Άρα το πολυώνυμο είναι δευτέρου βαθμού και θα είναι της μορφής:

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ με } \alpha \neq 0 ,$$

$$P'(x) = 2\alpha x + \beta ,$$

οπότε

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \Leftrightarrow (2\alpha x + \beta)^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\alpha^2 = \alpha & \textbf{(1)} \\ 4\alpha\beta = \beta & \textbf{(2)} \\ \beta^2 = \gamma & \textbf{(3)} \end{cases}$$

Η **(1)** μας δίνει

$$4\alpha^2 = \alpha \overset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{1}{4}$$

και από τη σχέση $P'(1) = 2$ παίρνουμε

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{2} .$$

Τέλος αντικαθιστούμε το $\beta = \frac{3}{2}$ στη σχέση **(3)** και έχουμε:

$$\gamma = \beta^2 = \frac{9}{4}.$$

Επίσης η σχέση **(2)** ισχύει αν αντικαταστήσουμε τους αριθμούς α και β.

Έτσι $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$.

Άσκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma$ ισχύει $f(\alpha)<f(\beta)>f(\gamma)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$.

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Όμως $f(\alpha)<f(\beta)$ άρα

$$f'(\xi_1)>0 \qquad \textbf{(1)}$$

Ομοίως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$$

Όμως $f(\beta)>f(\gamma)$ άρα

$$f'(\xi_2)<0 \qquad \textbf{(2)}$$

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και από τις **(1)** και **(2)** έχουμε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Άσκηση 22

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

Λύση

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

γιατί

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$

και

$\lim\limits_{x\to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to +\infty} \frac{e^u}{u} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{u\to +\infty} \frac{\left(e^u\right)'}{\left(u\right)'} = \lim\limits_{u\to +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot 0 = 0$,

αφού

$\lim\limits_{x\to 0^-} x = 0$

και

$\lim\limits_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{u\to -\infty} e^u = 0$.

Άσκηση 23

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,6]\to \mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ με $f(1)=f(6)$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο

$A\left(x_0, f(x_0)\right)$ οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,6)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$.

Λύση

i. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ και επίσης $f(1)=f(6)$, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Επομένως στο σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,6]$.

Σχόλιο: Η επιλογή των διαστημάτων $[1,2]$ και $[2,6]$ έγινε, έτσι ώστε τα μήκη τους να είναι ανάλογα των συντελεστών της σχέσης $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$, δηλαδή τους αριθμούς 1 και 4.

- η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1). \qquad \textbf{(1)}$$

ομοίως η f είναι συνεχής στο $[2,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,6)$,

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{f(6)-f(2)}{4}. \qquad \textbf{(2)}$$

Οπότε από τις **(1)** και **(2)** έχουμε:

$$f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=f(2)-f(1)+4\cdot\frac{f(6)-f(2)}{4}=f(6)-f(1)=0.$$

Άρα αποδείχτηκε.

Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\eta\mu x$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$$f'(x)=2x-\sigma\upsilon\nu x$$

και

$$f''(x)=2+\eta\mu x.$$

Ισχύει

$$-1\le\eta\mu x\le 1\Leftrightarrow 2-1\le 2+\eta\mu x\le 2+1\Leftrightarrow$$

$$1\le 2+\eta\mu x\le 3\Leftrightarrow 1\le f''(x)\le 3,$$

άρα $f''(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$, το οποίο συνεπάγεται ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Έχουμε

$f'(0)=-\sigma\upsilon\nu 0=-1<0$,

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=\pi>0$$

και επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, έπεται από το θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Όμως όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

iii. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ και υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$, οπότε:

για $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$ και

για $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$.

Άσκηση 25

Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, για την οποία ισχύουν: $f(2)=5$, $f(1)=3$ και $f(x)\le 2x+1$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Λύση

Αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, σημαίνει ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

Έχουμε $f(x)\le 2x+1\Leftrightarrow f(x)-2x-1\le 0$, οπότε αν θέσουμε

$g(x)=f(x)-2x-1$, τότε η συνάρτηση g είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$, ως άθροισα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και επειδή $g(2)=f(2)-4-1=0$ και $g(1)=f(1)-2-1=0$, έπεται ότι η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το 0 στα σημεία $x=1$ και $x=2$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$g'(1)=f'(1)-2=0\Leftrightarrow f'(1)=2$ και

$g'(2)=f'(2)-2=0\Leftrightarrow f'(2)=2$.

Τέλος επειδή η f' είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και $f'(1)=f'(2)$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f' στο $[1,2]$ και μας δίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

1. η $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$
2. $f(2) - f(1) < 3$
3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.

Λύση

1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbf{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε για να τη μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία αρκεί να βρούμε το πρόσημο της g'. Ισχύει

$$g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 = 3\left[f'(x) - x^2 \right] < 0$$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$.

2. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε

$$g(2) < g(1) \Leftrightarrow 3f(2) - 8 < 3f(1) - 1 \Leftrightarrow f(2) - f(1) < \frac{7}{3} < 3.$$

3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ επομένως και συνεχής, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1,2]$, αφού

   i. η f είναι συνεχής στο $[1,2]$

   ii. η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$,

   οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1) < 3.$$

Άσκηση 2

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)=x-\ln x$.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

<u>Λύση</u>

i. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0,+\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

Είναι $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$. Οπότε έχουμε τον επόμενο πίνακα πρόσημου για την g'

x	0		1		$+\infty$
g′(x)		-	0	+	

το οποίο σημαίνει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,

άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, το οποίο είναι το $g(1)=1$, άρα $g(x)\geq 1$ για κάθε $x>0$.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα εξής όρια:

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln x)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{\pm\infty}{+\infty}\right)}{=}1-\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=1.$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $[1,+\infty)$.

Σχόλιο: μπορούμε να απαντήσουμε βρίσκοντας και το ένα από τα δύο όρια

ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$.

Θεωρούμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x\right) = -\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to +\infty} e^{y} = +\infty$.

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$.

Πλάγιες ασύμπτωτες:

Θεωρούμε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln x}{x} = 0$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to 0} e^{y} = 1,$

όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - 0\cdot x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x = +\infty,$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$.

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

iii. Η παράγωγος της f ισούται με:

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x\right)' = e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\ln x + e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(x - \ln x) = e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot g(x)$$

και από το ερώτημα **i)** έπεται ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Στο **ii)** βρήκαμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x = +\infty$, άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Άσκηση 3

1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1 \text{ για κάθε } x>0 .$$

2. Να δείξετε ότι η $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot\ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

<u>Λύση</u>

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1, x>0$. Έχουμε $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0		1		$+\infty$
h′(x)		-	0	+	

Συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, άρα έχει ολικό ελάχιστο το 0 για $x=1$, δηλαδή ισχύει:

$h(x)\geq h(1)\Leftrightarrow \ln x+\frac{1}{x}-1\geq 0$ άρα αποδείχτηκε ότι

$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1$ για κάθε $x>0$.

2. Η $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και

- $g\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}+2e-e^2=-1+2e-e^2=-\left(1-e\right)^2<0$,

- $g\left(1\right)=1>0$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα x_0 της g στο $\left(\frac{1}{e},1\right)$. Επίσης $g'\left(x\right)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{x^2-2x+2}{x^3}>0$, αφού $x>0$ και $x^2-2x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ επειδή έχει διακρίνουσα $\Delta=-4<0$.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$, το οποίο συνεπάγεται ότι η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

3. Έχουμε

$$f'\left(x\right)=\left(e^x\cdot\ln x\right)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}=e^x\cdot\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

και από το ερώτημα 1 έπεται ότι $f'\left(x\right)>0$, συνεπώς η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε ανοιχτό διάστημα, έπεται ότι δεν έχει ακρότατα.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x\cdot\ln x\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to0^+}e^x=1>0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\ln x\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

4. Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f:

$$f''\left(x\right)=\left(e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}\right)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}+e^x\cdot\frac{1}{x}-e^x\cdot\frac{1}{x^2}=$$

$$e^x\cdot\left(\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=e^x\cdot g\left(x\right)$$

5. Από το ερώτημα 2 η g έχει μια ρίζα $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$, οπότε:

για $x<x_0\Rightarrow g\left(x\right)<g\left(x_0\right)=0$ και για $x>x_0\Rightarrow g\left(x\right)>g\left(x_0\right)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	0	x_0	$+\infty$
f''(x)	-	○	+

Από τα προηγούμενα η f είναι κοίλη στο $(0, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, +\infty)$ και το σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f , αφού αφ' ενός αλλάζει η κυρτότητα και αφ' ετέρου στο σημείο αυτό η f είναι παραγωγίσιμη άρα υπάρχει εφαπτομένη της C_f .

Άσκηση 4

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $f\left(0\right)=2$ και

$f'\left(x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x=f\left(x\right)\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

τότε να βρείτε τον τύπο της.

Λύση

Ισχύει

$f'\left(x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x=f\left(x\right)\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)\Leftrightarrow$

$f'\left(x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x-f\left(x\right)\cdot\eta\mu x=f\left(x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow$

$f'\left(x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x+f\left(x\right)\cdot\left(\sigma\upsilon\nu x\right)'=f\left(x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\left(f\left(x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'=f\left(x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x$,

οπότε σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του βιβλίου σελίδα 252, υπάρχει μια σταθερά c τέτοια, ώστε

$$f\left(x\right)\cdot\sigma\upsilon\nu x=c\cdot e^{x}.$$

Επίσης $f\left(0\right)=2$, οπότε έχουμε: $f\left(0\right)\cdot\sigma\upsilon\nu 0=c\cdot e^{0}\Leftrightarrow c=2$.

Άρα $f\left(x\right)=\frac{2\cdot e^{x}}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}, x>-1$ και $\lambda>0$.

i. Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Λύση

i. Θα μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία.

$f'(x)=\left(\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}\right)'=\dfrac{e^{\lambda x}(\lambda x+\lambda-1)}{(x+1)^2}$ και $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}>-1$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	-1	$\frac{1-\lambda}{\lambda}$	$+\infty$
f′(x)	-	0	+

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-1,\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{1-\lambda}{\lambda},+\infty\right)$, επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}$, το οποίο είναι το $f\left(\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\right)=\lambda\cdot e^{1-\lambda}$.

ii. Έστω $g(\lambda)=\lambda\cdot e^{1-\lambda}$ με $\lambda>0$. Θα μελετήσουμε τη g ως προς τη μονοτονία.

$g'(\lambda)=\left(\lambda\cdot e^{1-\lambda}\right)'=e^{1-\lambda}-\lambda\cdot e^{1-\lambda}=e^{1-\lambda}\cdot(1-\lambda)$ η οποία έχει ρίζα το $\lambda=1$ και για το πρόσημό της ισχύει

λ	0	1	$+\infty$
g′(λ)	+	0	-

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$, επομένως παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\lambda=1$.

Άσκηση 6

Α. Να αποδείξετε ότι: $e^x \le 1+xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. Να λυθεί η εξίσωση $e^x = 1+xe^x$

Γ. Να βρείτε το σύνολο των τιμών της συνάρτησης $h(x) = 2\left|1+xe^x\right|$

Λύση

i. Θέτουμε $f(x) = 1+xe^x - e^x$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \left(1+xe^x - e^x\right)' = xe^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-∞	0	+∞
f′(x)	-	0	+

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$, δηλαδή $f(x) \ge f(0) = 0 \Leftrightarrow 1+xe^x - e^x \ge 0$.

ii. Η εξίσωση $f(x) = 0$ ισχύει για τη θέση του ελάχιστου, δηλαδή για $x = 0$.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση, $g(x) = 1+xe^x$ η οποία είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της: $g'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1)$ και έχουμε

x	-∞	-1	+∞
g′(x)	-	0	+

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x = -1$, δηλαδή $g(x) \ge g(-1) = \dfrac{e-1}{e} > 0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+xe^x\right) = 1 + \lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right) = 1$,

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+xe^{x}\right)=+\infty$, άρα το σύνολο τιμών της g είναι το $[\dfrac{e-1}{e},+\infty)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της h είναι το $[2\dfrac{e-1}{e},+\infty)$.

Άσκηση 7

1. Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 2^x = 5^x$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με $f'(x) = -2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{2x} \cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

   ii. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = 1$.

   iii. Αν h, φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbf{R}$, με

   $$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

   και $h(0) = \varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι $h = \varphi$.

<u>Λύση</u>

1. Έχουμε $3^x + 2^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1 = 0$ **(1)**.

   Μια προφανής λύση της προηγούμενης εξίσωσης είναι η $x = 1$. Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική.

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

   Ισχύει:

   $$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \ln\frac{2}{5} < 0,$$

   αφού $\frac{3}{5} < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{3}{5} < \ln 1 = 0$ και $\frac{2}{5} < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{2}{5} < \ln 1 = 0$.

   Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε η $x = 1$ είναι μοναδική ρίζα της f, άρα και μοναδική ρίζα της εξίσωσης **(1)**.

   i. Η g είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

   Έχουμε

$g'(x)=\left(e^{2x}\cdot f(x)\right)'=2e^{2x}\cdot f(x)+e^{2x}\cdot f'(x)=2e^{2x}\cdot f(x)-2e^{2x}\cdot f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$

Άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι:

υπάρχει $c\in\mathbf{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, άρα

$e^{2x}\cdot f(x)=c\Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^{-2x}$.

Για $x=0$ παίρνουμε:

$f(0)=c\cdot e^{0}\Leftrightarrow c=1$.

Άρα $f(x)=e^{-2x}$.

iii. Ισχύει:

$h'(x)+2h(x)=\varphi'(x)+2\varphi(x)\Leftrightarrow\left(h(x)-\varphi(x)\right)'=-2\left(h(x)-\varphi(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$,

οπότε από το **i)** ερώτημα έπεται ότι:

$h(x)-\varphi(x)=c\cdot e^{-2x}$, και για $x=0$ παίρνουμε

$$h(0)-\varphi(0)=c\cdot e^{0}\overset{h(0)=\varphi(0)}{\Leftrightarrow}c=0.$$

Άρα $h=\varphi$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f, αν υπάρχουν.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0, f\left(0\right)\right)$.

v. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x \geq 7x+3 \text{ για κάθε } x \geq -4+\sqrt{3}.$$

Λύση

Η συνάρτηση $f\left(x\right)=\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

i. Παραγωγίζουμε την f,

$$f'\left(x\right)=\left(2x+4\right)\cdot e^x+\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x.$$

Έχουμε $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=0 \Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{2}$, επίσης

$$\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+3}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{-e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2x+4\right)'}{\left(-e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}2e^x=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\left(+\infty\right)\cdot\left(+\infty\right)=+\infty,$$

οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-∞	$-3-\sqrt{2}$	$-3+\sqrt{2}$	+∞
f′(x)	+	0	-	0 +
f(x)	0 ↗	T.M.	↘	T.E. ↗ +∞

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-3-\sqrt{2}\right]$ και $\left[-3+\sqrt{2},+\infty\right)$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right]$ και συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε στο $-3-\sqrt{2}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στο $-3+\sqrt{2}$ τοπικό ελάχιστο.

Επίσης

$$f\left(\left(-\infty,-3-\sqrt{2}\right]\right)=\left(0,f\left(-3-\sqrt{2}\right)\right],$$

$$f\left(\left[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right]\right)=\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),f\left(-3-\sqrt{2}\right)\right] \text{ και}$$

$$f\left(\left[-3+\sqrt{2},+\infty\right)\right)=\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),+\infty\right).$$

Το $f\left(-3+\sqrt{2}\right)$ είναι ολικό ελάχιστο γιατί $f\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$.

Πράγματι το τριώνυμο $g(x)=x^2+4x+3$ έχει ρίζες τους αριθμούς -3 και -1 και $-3<-3+\sqrt{2}<-1$, άρα $g\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$ γιατί ανάμεσα στις ρίζες το τριώνυμο είναι αρνητικό, και κατά συνέπεια και $f\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$.

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),+\infty\right)$ είναι φανερό ότι η f δεν έχει ολικό μέγιστο.

ii. $f''(x)=(2x+6)\cdot e^x+\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=\left(x^2+8x+13\right)\cdot e^x$ και

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\left(x^2+8x+13\right)\cdot e^x=0\Leftrightarrow x=-4\pm\sqrt{3}.$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	-∞	$-4-\sqrt{3}$	$-4+\sqrt{3}$	+∞
f″(x)	+	0	-	0 +

Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\left(-\infty,-4-\sqrt{3}\right]$ και $\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$ και κοίλη στο διάστημα $\left[-4-\sqrt{3},-4+\sqrt{3}\right]$.

Επειδή επίσης η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης, έπεται ότι η C_f έχει δυο σημεία καμπής τα $A\left(-4-\sqrt{3}, f\left(-4-\sqrt{3}\right)\right)$ και $B\left(-4+\sqrt{3}, f\left(-4+\sqrt{3}\right)\right)$.

iii. Στο ερώτημα ii) βρήκαμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=0$.

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x\right)'}{(x)'}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=+\infty$, άρα η f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ δεν έχει επίσης κατακόρυφες ασύμπτωτες.

iv. $f'(x)=\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x \Rightarrow f'(0)=7$ και $f(0)=3$.

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0, f(0)\right)$ είναι:

$$y-3=7\cdot(x-0) \text{ ή}$$

$$\varepsilon: y=7x+3.$$

v. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$ και $0\in\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$, οπότε στο διάστημα αυτό η C_f είναι «πάνω» από την εφαπτομένη στο $A\left(0, f(0)\right)$, άρα

$$\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x\geq 7x+3 \text{ για κάθε } x\geq -4+\sqrt{3}.$$

Άσκηση 9

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln(x+1)-1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ με $2\alpha+\beta>0$ και $\alpha+2\beta-1>0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln(2\alpha+\beta)+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln(\alpha+2\beta-1)\le 2$$

να υπολογίσετε τους α,β.

Λύση

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-1,+\infty)$.

i. Έχουμε

$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$ και

$f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x>-1$, έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

Επίσης $f'(0)=0$, άρα

για $-1<x<0 \overset{f'\,\gamma\nu.\,\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(0)=0$ και

για $x>0 \overset{f'\,\gamma\nu.\,\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0)=0$.

Επιπλέον $f(0)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-1	0	$+\infty$
f′(x)		- 0 +	
f(x)		↘ 0 ↗	

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.

ii. Έχουμε

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+}\left[e^x - \ln(x+1) - 1\right] = +\infty,$$ αφού

$$\lim_{x\to -1^+} \ln(x+1) \overset{u=x+1}{=} \lim_{u\to 0^+} \ln(u) = -\infty \text{ και } \lim_{x\to -1^+}\left[e^x - 1\right] = \frac{1}{e} - 1.$$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,+\infty)$.

iii. Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο πεδίο ορισμού της $(-1,+\infty)$, μοναδική λύση την $x=0$, αφού

για $x<0 \overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta i.}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$ και

για $x>0 \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$.

iv. Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha+\beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha+2\beta-1) \le 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln((2\alpha+\beta-1)+1) - 1 + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln((\alpha+2\beta-2)+1) - 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$f(2\alpha+\beta-1) + f(\alpha+2\beta-2) \le 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι

$$f(2\alpha+\beta-1) = f(\alpha+2\beta-2) = 0, \qquad \textbf{(2)}$$

γιατί αν υποθέσουμε ότι π.χ. $f(2\alpha+\beta-1) \ne 0$ τότε, επειδή $f(x) \ge 0$ για κάθε $x > -1$, θα πρέπει $f(2\alpha+\beta-1) > 0$ και η **(1)** μας δίνει $f(\alpha+2\beta-2) \le -f(2\alpha+\beta-1) < 0$ δηλαδή $f(\alpha+2\beta-2) < 0$, το οποίο

είναι άτοπο. Επομένως $f\left(2\alpha+\beta-1\right)=0$ οπότε από την **(1)** και $f\left(\alpha+2\beta-2\right)=0$.

Από την **(2)** και από το ερώτημα **iii)** έχουμε ότι

$$\begin{cases}2\alpha+\beta-1=0\\ \alpha+2\beta-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\end{cases}.$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\frac{1}{2x}}$, $x>0$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι:

$$\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$$

<u>Λύση</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\frac{1}{2x}}$, $x>0$.

i. Βρίσκουμε πρώτα την παράγωγο της f.

Αν $y=x^{\frac{1}{2x}}=\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{2x}}=e^{\frac{\ln x}{2x}}$ και θέσουμε $u=\dfrac{\ln x}{2x}$, τότε $y=e^u$. Επομένως,

$$y'=\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'=e^{\frac{\ln x}{2x}}\cdot\left(\frac{\ln x}{2x}\right)'=x^{\frac{1}{2x}}\cdot\frac{1-\ln x}{2x^2}.$$

Έχουμε $f'(x)=0\Leftrightarrow \ln x=1\Leftrightarrow x=e$,

και $f'(x)>0\Leftrightarrow \ln x<1\Leftrightarrow x<e$.

Οπότε σχηματίζουμε τον πίνακα

x	0	e	$+\infty$
f′(x)	+	○	-
f(x)	↗	f(e)	↘

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ και επειδή είναι συνεχής στο e,

έχει στη θέση αυτή ολικό μέγιστο το $f(e)$

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e,+\infty)$, οπότε ισχύει:

$$e<3<5<6\Leftrightarrow f(3)>f(5)>f(6)\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{6}}>5^{\frac{1}{10}}>6^{\frac{1}{12}}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$$

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+1\right)\cdot\ln x$, $x>0$.

i. Να δείξετε ότι $2x\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=0$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Λύση

i. Έχουμε $2x\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2x^2\cdot\ln x+1>0$,

οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση $g\left(x\right)=2x^2\cdot\ln x+1$, $x>0$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ και

$g'\left(x\right)=4x\cdot\ln x+2x=2x\cdot\left(2\ln x+1\right)$

και έχουμε

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow2x\cdot\left(2\ln x+1\right)=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ και

$g'\left(x\right)>0\Leftrightarrow2x\cdot\left(2\ln x+1\right)>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x>-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{\sqrt{e}}$,

$g'\left(x\right)<0\Leftrightarrow2x\cdot\left(2\ln x+1\right)<0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x<-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow0<x<\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$, και επειδή είναι συνεχής στο $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό ελάχιστο το

$$g(\frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{e-1}{e} > 0 .$$

Επομένως $g(x) \geq g(\frac{1}{\sqrt{e}}) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα αποδείξαμε ότι

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0 .$$

ii. Έχουμε $f'(x) = \left[\left(x^2 + 1 \right) \cdot \ln x \right]' = 2x \ln x + x + \frac{1}{x} = x + \left(2x \ln x + \frac{1}{x} \right) > 0$, αφού

$x > 0$ και $2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Άρα η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επίσης το $x = 1$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$, η οποία λόγω της μονοτονίας είναι και μοναδική.

iii. Έχουμε $f''(x) = \left(2x \ln x + x + \frac{1}{x} \right)' = 2 \ln x + 2 + 1 - \frac{1}{x^2} = 2 \ln x + 3 - \frac{1}{x^2}$ και

$$f^{(3)}(x) = \left(2 \ln x + 3 - \frac{1}{x^2} \right)' = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} > 0 \text{ για κάθε } x > 0 .$$

Αφού $f^{(3)}(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επίσης $f''\left(\frac{1}{e} \right) = 1 - e^2 < 0$ και $f''(1) = 2 > 0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1 \right]$, υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1 \right)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$, το οποίο λόγω της μονοτονίας της f'' είναι μοναδικό.

Επίσης έχουμε

$0 < x < x_0 \overset{f'' \gamma \nu . \alpha \acute{\upsilon} \xi .}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) = 0$ και

$x > x_0 \overset{f'' \gamma \nu . \alpha \acute{\upsilon} \xi .}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) = 0 .$

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

iv. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x=\left(+\infty\right)\cdot\left(+\infty\right)=+\infty$$

άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)\cdot\ln x=-\infty\,,$$

αφού $\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)=1$ και $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$. Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln\left(x^2+1\right)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $x-4=\ln 17-\ln\left(x^2+1\right)$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3-x^2>\ln\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$$f'(x)=1+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x^2+1+2x}{x^2+1}=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$$

Επειδή $f'(x)>0$ στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο -1, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Ισχύει

$$x-4=\ln 17-\ln\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow x+\ln\left(x^2+1\right)=4+\ln\left(4^2+1\right)\Leftrightarrow$$

$$f(x)=f(4)$$

και η f είναι «1-1» αφού είναι γνησίως αύξουσα, άρα η τελευταία σχέση μας δίνει:

$$x=4.$$

iii. Έχουμε:

$$x^3-x^2>\ln\frac{x^4+1}{x^6+1}\Leftrightarrow x^3-x^2>\ln\left(x^4+1\right)-\ln\left(x^6+1\right)\Leftrightarrow$$

$$x^3+\ln\left(\left(x^3\right)^2+1\right)>x^2+\ln\left(\left(x^2\right)^2+1\right)\Leftrightarrow$$

$$f\left(x^3\right)>f\left(x^2\right)\overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow}x^3>x^2\Leftrightarrow x^2\cdot(x-1)>0\Leftrightarrow x>1.$$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x) \text{ για κάθε } x>0.$$

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$f'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x$,

$f''(x)=2e^x+2x\cdot e^x+2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=\left(x^2+4x+2\right)e^x$.

$f''(x)=0\Leftrightarrow x=-2\pm\sqrt{2}$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου της f'' :

x	-∞	$-2-\sqrt{2}$	$-2+\sqrt{2}$	+∞
f''(x)	+	-	+	

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η f είναι κυρτή στα $\left(-\infty,-2-\sqrt{2}\right]$ και $\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ και κοίλη στο $\left[-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right]$.

ii. Επειδή $-2+\sqrt{2}<0$, έπεται ότι για $x>0$ ισχύει $[x,x+1]\subseteq\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ και αφού $f''(x)>0$ στο $\left(-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα $\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$, άρα και στο $[x,x+1]$.

Η f είναι συνεχής στο $[x,x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[x,x+1]$ οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f'(\xi)=f(x+1)-f(x).$$

Έτσι έχουμε

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x) \Leftrightarrow f'(x+1)>f'(\xi) \overset{f' \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} x+1>\xi,$$

το οποίο ισχύει, άρα αποδείχτηκε η ζητούμενη σχέση.

Άσκηση 14

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ και $f\left(3\right)=12$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A\left(\xi, f\left(\xi\right)\right)$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B\left(\gamma, f\left(\gamma\right)\right)$ να διέρχεται από το $O\left(0,0\right)$.

Λύση

i. Η συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$, οπότε εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής και έχουμε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'\left(\xi\right)=\frac{f\left(3\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{3-\frac{1}{2}}=\frac{12-2}{\frac{5}{2}}=4.$$

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $A\left(\xi, f\left(\xi\right)\right)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'\left(\xi\right)=4$, άρα είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B\left(\gamma, f\left(\gamma\right)\right)$ έχει εξίσωση:

$$y-f\left(\gamma\right)=f'\left(\gamma\right)\cdot\left(x-\gamma\right)$$

και αφού διέρχεται από το σημείο $O\left(0,0\right)$, πρέπει

$$-f\left(\gamma\right)=f'\left(\gamma\right)\cdot\left(-\gamma\right)\Leftrightarrow f\left(\gamma\right)=\gamma\cdot f'\left(\gamma\right). \qquad \textbf{(1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g\left(x\right)=\frac{f\left(x\right)}{x}$, $x\in\left[\frac{1}{2},3\right]$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης:

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$ και

$g(3)=\frac{12}{3}=4$,

άρα $g\left(\frac{1}{2}\right)=g(3)$, που σημαίνει ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη g στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$. Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\gamma)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\gamma)\cdot\gamma-f(\gamma)\cdot 1}{\gamma^2}=0\Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma\cdot f'(\gamma).$$

Άρα αποδείχτηκε η **(1)**, συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\gamma,f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in\Delta.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2-x^2}{x+1}, x>-1$.

   i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

   ii. Αν $\alpha>\frac{1}{e},\beta>\frac{1}{e}$ να δείξετε ότι:

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1}$$

Λύση

1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα Δ, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

   - Αν $\alpha=\beta$, τότε η σχέση

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

     γίνεται

$$2\cdot f(\alpha)\geq 2\cdot f(\alpha)$$

     το οποίο ισχύει.

   - Έστω τώρα ότι $\alpha<\beta$. Τότε έχουμε

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha) \qquad \textbf{(1)}$$

     Επίσης $\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha=\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\beta-\alpha}{2}>0$, οπότε η **(1)** γίνεται

$$\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \qquad \textbf{(2)}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$, οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \text{ και}$$

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Έτσι η **(2)** γίνεται $f'(\xi_2) \geq f'(\xi_1)$, το οποίο ισχύει αφού f' γνησίως αύξουσα και $\xi_2 \geq \xi_1$.

Επομένως αποδείχτηκε.

- Ομοίως αποδεικνύεται και για $\alpha > \beta$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2-x^2}{x+1}$, $x > -1$.

Ισχύει

$$f'(x) = \frac{\left(2-x^2\right)'(x+1)-\left(2-x^2\right)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x-2}{(x+1)^2} \text{ και}$$

$$f''(x) = \frac{\left(-x^2-2x-2\right)'(x+1)^2-\left(-x^2-2x-2\right)\left((x+1)^2\right)'}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, συνεπώς f κυρτή στο $(-1, +\infty)$.

i. Έχουμε $\alpha > \frac{1}{e}, \beta > \frac{1}{e}$, άρα $\ln\alpha > -1$ και $\ln\beta > -1$. Επίσης

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1} \geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2-\left(\ln\alpha\right)^2}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\left(\ln\beta\right)^2}{\ln\beta+1} \geq 2\cdot\frac{2-\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)^2}{\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}+1} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\ln\alpha\right)+f\left(\ln\beta\right) \geq 2\cdot f\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)$$

η οποία ανισότητα ισχύει, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα 1) για τη συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο $\left(-1,+\infty\right)$ και για τους $\ln\alpha > -1$ και $\ln\beta > -1$.

Ημερομηνία τροποποίησης: 09/07/2018

1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=4x^3+2(\lambda-1)x-\lambda$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $(0,1)$.

2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln(x^2)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f.

ii. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii. Να τη μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

3

Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $O(0,0)$, δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2$.

Να βρείτε τις διαστάσεις του α,β ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

4

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2.$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

5

Να δείξετε ότι:

$2\ln(x-1)\le x-3+\ln 4$ για κάθε $x>1$.

6

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A(1,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2+7x$.

7

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+7$.

ii. Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $O(0,0)$.

iii. Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο $A(2,0)$;

9

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+k\cdot x-1$, όπου $k\in\mathbf{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0,f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$, να βρείτε την τιμή του k.

ii. Αν $k=2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$.

10

i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+2\alpha x^3+24x^2+5x-7$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του α, ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$

ii. Για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbf{R}$ η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A(1,f(1))$

11

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

   i. $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

   ii. $e^{x^2} \geq 1-x$, για κάθε $x \geq 0$.

2. Να δείξετε ότι $e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + 5x$.

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5$.

13

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R},$$

να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = e^5$.

14

Αν η ευθεία $y = 3x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε

i. να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 3x)$

ii. να βρείτε το $\lambda \in \mathbf{R}$ ώστε:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 - \lambda^2 x + 2}{f(x) + \lambda x + 1} = -1$$

15

Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ με

$f(0)=f(1)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

i. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $h(x)=f^2(x)\cdot e^{g(x)}$ στο διάστημα $[0,1]$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

16

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)<0, f(1)>2$ και $f'(x)\neq 2$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\xi\in(0,1)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\xi)=2\xi$.

17

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)=2011$.

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}$$

18

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x)=x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$.

19

Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,3]$. Να δείξετε ότι

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3).$$

20

i. Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho)=P'(\rho)=0$.

ii. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x-1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

21

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x)\geq e^{x-1}+\ln x+x^2 \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=2.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$.

22

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \text{ για κάθε } x\in(-3,3) \qquad \textbf{(1)}$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

23

Δίνεται η συνεχής και πραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$f\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)=2\cdot e^x$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

i. Να δείξετε ότι $f'(0)=2$.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(0,f(0))$ είναι η $y=2x+2$.

iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2cm/\sec$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

24

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ii. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi\dfrac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$.

25

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(1)=2 \text{ και}$$

$$x\cdot f'(x)=-3\cdot f(x) \text{ για κάθε } x\neq 0.$$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^3\cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

26

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$\left[P'(x)\right]^2=P(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R} \text{ και } P'(1)=2.$$

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

27

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+24x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbf{R}$.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

28

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma$ ισχύει $f(\alpha)<f(\beta)>f(\gamma)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

29

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,6]\to\mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ με $f(1)=f(6)$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο

$A(x_0,f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,6)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$.

30

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\eta\mu x$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

31

Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, για την οποία ισχύουν: $f(2)=5$, $f(1)=3$ και $f(x)\le 2x+1$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

32

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x)<x^2$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

1. η $g(x)=3f(x)-x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$
2. $f(2)-f(1)<3$
3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)<3$.

33

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)=x-\ln x$.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

34

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0)=2$ και

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x=f(x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

τότε να βρείτε τον τύπο της.

35

1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1 \text{ για κάθε } x>0.$$

2. Να δείξετε ότι η $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot\ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

36

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^{\lambda x}}{x+1}, x>-1$ και $\lambda>0$.

i. Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

37

Α. Να αποδείξετε ότι: $e^x\leq 1+xe^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β. Να λυθεί η εξίσωση $e^x=1+xe^x$

Γ. Να βρείτε το σύνολο των τιμών της συνάρτησης $h(x)=2\left|1+xe^x\right|$

38

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln\left(x^2+1\right)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $x-4=\ln 17-\ln\left(x^2+1\right)$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3-x^2>\ln\frac{x^4+1}{x^6+1}$.

39

1. Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 2^x = 5^x$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με $f'(x) = -2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{2x} \cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

   ii. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = 1$.

   iii. Αν h, φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbf{R}$, με

   $$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

   και $h(0) = \varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι $h = \varphi$.

40

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \left(x^2 + 4x + 3\right) \cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f, αν υπάρχουν.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0, f(0)\right)$.

v. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\left(x^2 + 4x + 3\right) \cdot e^x \geq 7x + 3 \text{ για κάθε } x \geq -4 + \sqrt{3}.$$

41

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln(x+1)-1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ με $2\alpha+\beta>0$ και $\alpha+2\beta-1>0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln(2\alpha+\beta)+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln(\alpha+2\beta-1)\le 2$$

να υπολογίσετε τους α,β.

42

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+1\right)\cdot\ln x$, $x>0$.

i. Να δείξετε ότι $2x\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A\left(x_0,f(x_0)\right)$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

1. α) Να αποδείξετε ότι αν τα όρια $\lim\limits_{x \to x_0^-} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ και $\lim\limits_{x \to x_0^+} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε η f είναι συνεχής στο x_0.

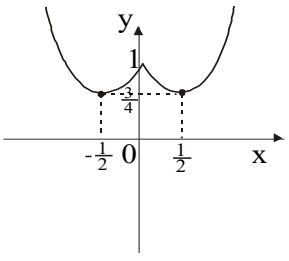
β) Να εξετάσετε τη συνέχεια της συνάρτησης $f(x) = \begin{cases} -x+1 & \text{αν } x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$ στο σημείο $x_0 = 1$ εφαρμόζοντας το προηγούμενο συμπέρασμα.

2. Έστω οι συναρτήσεις f και g οι οποίες είναι παραγωγίσιμες στο $x_0 \in (\alpha, \beta)$ με $f'(x_0) = g'(x_0)$ και $f(x_0) = g(x_0)$. Αν ισχύει $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ για $x \in (\alpha, \beta)$, να αποδείξετε ότι και η h είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και μάλιστα ισχύει $h'(x_0) = f'(x_0)$.

3. Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο 1, η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο 1 και ισχύει $f(x) = |x - 1| \cdot g(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί η τιμή $g(1)$.

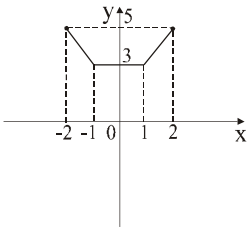
4. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x - 3| + x + 2$. Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη
α) στο σημείο $x_0 = 3$ και
β) στο σημείο $x_0 = 4$.

5. Η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2 - |x| + 1$ φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.
β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f΄.

6. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



α) Να εξετάσετε αν η f είναι παραγωγίσιμη στα σημεία με τετμημένες $-1, 1, \dfrac{3}{2}$.
β) Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f΄.

7. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - x + 1$ (εφόσον υπάρχει), σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

α) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda = 3$.

β) σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα x΄x.

γ) είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 4$.

δ) είναι κάθετη στην ευθεία $y = -\frac{1}{2}x + 3$.

ε) είναι παράλληλη στον άξονα x΄x.

στ) άγεται από το σημείο (- 1, 0).

8. Να βρείτε την εφαπτομένη (αν υπάρχει) των γραφικών παραστάσεων των παρακάτω συναρτήσεων στο αντίστοιχο σημείο:

α) $f(x) = \ln x$ στο (1, 0)

β) $f(x) = |2 - x|$ στο (2, 0)

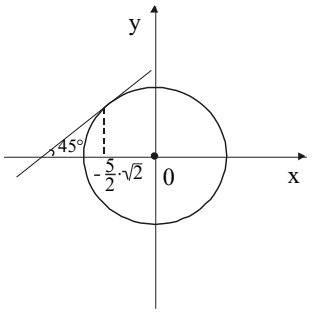
γ) $f(x) = \sqrt{x^3}$ στο (0, 0)

δ) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ στο (0, 0)

ε) $f(x) = x\sqrt{x}$ στο (0, 0)

στ) $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ στο $(-2, \frac{3}{4})$

9. Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου του διπλανού σχήματος.



10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha \neq 0$. Να βρείτε τη συνθήκη για τα $\alpha, \beta, \gamma \in R$, ώστε η C_f να μην έχει σε κανένα της σημείο οριζόντια εφαπτομένη.

11. α) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 6x + 8$, να φέρετε τις εφαπτόμενες ε_1, ε_2 της C_f στα σημεία τομής της C_f με τον x΄x και να δικαιολογήσετε από το σχήμα γιατί οι εφαπτόμενες τέμνονται πάνω στην ευθεία $x = 3$.

β) Να αποδείξετε ότι οι εφαπτομένες της παραβολής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ με $\Delta > 0$, στα σημεία τομής της με τον άξονα x΄x τέμνονται στον άξονα συμμετρίας της παραβολής $(x = -\frac{\beta}{2\alpha})$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(\alpha x)}{x}$ με $\alpha > 0$ και $x > 0$.

α) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$.

β) Να αποδείξετε ότι όλες οι παραπάνω εφαπτόμενες στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, καθώς μεταβάλλεται το α, διέρχονται από το ίδιο σημείο.

13. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (x - 1)^2$. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής της παράστασης, σε οποιοδήποτε σημείο της, δεν έχει με αυτήν άλλο κοινό σημείο.

14. Για την παραγωγίσιμη συνάρτηση f ισχύει η σχέση:

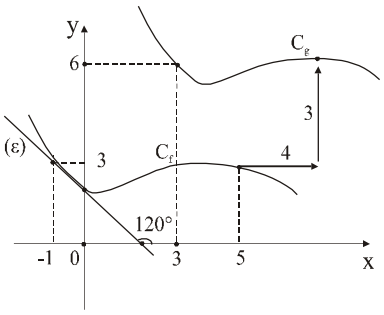
$f(2 + x) - f(2 - x) = -2x$ για κάθε $x \in R$.

Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης στο σημείο $(2, f(2))$ είναι κάθετη στην ευθεία $y = x$.

15. α) Έστω δύο συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το R. Να γράψετε τις συνθήκες ώστε η C_f και η C_g στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x = x_0$ να δέχονται κοινή εφαπτομένη.

β) Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$ και $g(x) = x^2 - 3x + 1$. Να αποδείξετε ότι οι C_f, C_g δέχονται κοινή εφαπτομένη σε ένα σημείο, του οποίου να υπολογίσετε τις συντεταγμένες.

16. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο R και η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη της C_f στο σημείο $(0, f(0))$. Μετακινούμε τη C_f παράλληλα προς τους άξονες, όπως φαίνεται στο σχήμα, και ονομάζουμε g τη συνάρτηση η οποία αντιστοιχεί στη C_g.



α) Να βρείτε μια σχέση η οποία να συνδέει τις συναρτήσεις f και g.

β) Με βάση την προηγούμενη σχέση να δείξετε ότι $g'(x_0) = f'(x_0 - 4)$ για κάθε $x_0 \in R$.

γ) Να βρείτε την $g'(4)$.

17. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει

$f(\ln x) = x \cdot \ln x - x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι η C_f' διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο με τετμημένη 0.

γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου το οποίο σχηματίζεται από την εφαπτομένη της C_f στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$ και τους άξονες x΄x και y΄y.

18. Να βρεθούν οι εφαπτόμενες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{x}$, οι οποίες διέρχονται από το σημείο A (0, 1).

19. Να δείξετε ότι:

α) αν $f(x) = 3\sigma\upsilon\nu x - 2\sigma\upsilon\nu^2 x$, τότε $f'(x) + f(x)\,\varepsilon\varphi x - \eta\mu 2x = 0$.

β) αν $f(x) = \ln\dfrac{1}{1+x}$, τότε $x\,f'(x) + 1 = e^{f(x)}$.

20. Αν f είναι μια πολυωνυμική συνάρτηση για την οποία ισχύουν: $f'(4) = 0$ και $(f'(x))^2 = f(x)$ για κάθε $x \in R$,

α) να βρεθεί ο τύπος της f.

β) να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -x + 1$.

21. Μια δύναμη εφαρμόζεται σε κινητό που κινείται σε άξονα και του οποίου η απόσταση από την αρχή Ο τη χρονική στιγμή t δίνεται από τη συνάρτηση $S(t) = \ln(t + 1)$, $t > 0$ (όπου t ο χρόνος σε sec).

α) Να δείξετε ότι το κινητό δεν ήταν σε κατάσταση ηρεμίας όταν εφαρμόστηκε η δύναμη.

β) Να δείξετε ότι η κίνηση είναι επιβραδυνόμενη.

γ) Να βρείτε το μέτρο της ταχύτητας και της επιβράδυνσης του κινητού, 3 sec μετά την εφαρμογή της δύναμης.

22. Θεωρούμε μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R για την οποία ισχύει: $f(x + y) = e^x \cdot f(y) + e^y \cdot f(x) + xy + \alpha$ για κάθε $x, y \in R$.

α) Να δείξετε ότι $f(0) = -\alpha$.

β) Να δείξετε ότι η C_f περνά από την αρχή των αξόνων.

γ) Να δείξετε ότι $f'(x_0) = f(x_0) + f'(0)\,e^{x_0} + x_0$, για κάθε $x_0 \in R$.

23. Μια συνάρτηση είναι περιττή και δύο φορές παραγωγίσιμη στο R. Να δείξετε ότι:

α) η γραφική της παράσταση διέρχεται από το (0, 0).

β) $f''(0) = 0$.

24. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο R, η οποία έχει δύο τουλάχιστον ρίζες.

α) Να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο ριζών της f περιέχεται τουλάχιστον μια ρίζα της f'.

β) Αν η f' έχει δύο τουλάχιστον ρίζες, να αποδείξετε ότι μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της f' περιέχεται το πολύ μια ρίζα της f.

25. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = 3x^2 + x + 1$, $x \in R$.

α) Να βρείτε μία τουλάχιστον συνάρτηση f για την οποία να ισχύει

$f'(x) = g(x)$ (1).

β) Από όλες τις συναρτήσεις f οι οποίες έχουν την ιδιότητα (1) να βρείτε εκείνη της οποίας η C_f διέρχεται από το σημείο (- 2, - 2).

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχει συνάρτηση f με την ιδιότητα (1) της οποίας η C_f να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

26. α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x - \alpha)^{\mu} (x - \beta)^{\nu}$, μ, ν θετικοί ακέραιοι. Να αποδείξετε ότι υπάρχει

$\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $\xi = \dfrac{\nu\alpha + \mu\beta}{\mu + \nu}$.

β) Να αποδείξετε ότι το παραπάνω ξ χωρίζει το διάστημα [α, β] σε λόγο $\dfrac{\mu}{\nu}$, δηλαδή ισχύει

$$\frac{\xi - \alpha}{\beta - \xi} = \frac{\mu}{\nu}.$$

27. Να αποδειχθεί ότι $\eta\mu(\alpha + h) < \eta\mu\alpha + h\sigma\upsilon\nu\alpha$, όπου $0 < \alpha < \alpha + h < \dfrac{\pi}{2}$.

28. Έστω f μια συνάρτηση, δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και μια ευθεία (ε) με εξίσωση $y = \alpha x + \beta$, η οποία τέμνει τη γραφική παράσταση της f σε τρία διαφορετικά σημεία. Αν x_1, x_2, x_3 οι τετμημένες των σημείων αυτών (με $x_1 < x_2 < x_3$):

α) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_3)$ τέτοιο ώστε $f''(x_0) = 0$, εφαρμόζοντας το θεώρημα της μέσης τιμής στα διαστήματα $[x_1, x_2]$ $[x_2, x_3]$.

β) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση: Αν μια συνάρτηση είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο R και δέχεται σε δυο σημεία της γραφικής της παράστασης παράλληλες εφαπτομένες, τότε η f έχει τουλάχιστον ένα πιθανό σημείο καμπής.

29. Με τη βοήθεια των παραγώγων να δείξετε ότι:

$\eta\mu^6 x + \sigma\upsilon\nu^6 x + 3\eta\mu^2 x \sigma\upsilon\nu^2 x = 1$, για κάθε $x \in R$.

30. Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο R και η f ′ μηδενίζεται σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, x_0)$, $(x_0, +\infty)$. Μπορούμε να αποφανθούμε ότι η f είναι σταθερή στο R; Αν τα σημεία, για τα οποία δεν γνωρίζουμε ότι έχουν παράγωγο μηδέν, είναι $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$, μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα;

31. Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$ με f (0) = 0.

α) Να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, x > 0, είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι ισχύει $g'(x) = \frac{1}{x}\left(f'(x) - \frac{f(x)}{x}\right)$.

γ) Αν η f ′ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, να αποδείξετε ότι και η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

32. Ένα πολυώνυμο P (x) ικανοποιεί τη σχέση $P(x) = P'(x) + x^3$.

α) Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου.

β) Να βρείτε το πολυώνυμο P (x).

γ) Να υπολογίσετε το πλήθος των πραγματικών ριζών του.

δ) Να βρείτε το πρόσημο των ριζών του.

33. Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $(x - 2000)^{2000} = x^{2000} + 2000^{2000}$, $x \in R$, έχει μία μόνο λύση.

34. Δίνονται τα πολυώνυμα P (x) και Q (x), ώστε $P(x) \neq Q(x)$ και $P''(x) \neq Q''(x)$ για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P'(x) = Q'(x)$ έχει ακριβώς μια λύση, εξετάζοντας το βαθμό του S (x) = P (x) - Q (x).

35. Έστω ότι $x^\alpha \geq \alpha^x$ ($\alpha > 0$) για κάθε x > 0. Να υπολογίσετε το α .

36. Έστω f παραγωγίσιμη συνάρτηση με πεδίο ορισμού το [0, 6]. Αν η C_f περνά από το σημείο A (0, 1) και ισχύει: $f'(x) > x$ για κάθε $x \in [0, 6]$, να αποδείξετε ότι:

α) η συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$ είναι γνησίως αύξουσα στο [0, 6].

β) $g(x) > 0$, $x \in [0, 6]$.

γ) το σημείο B (6, 18) δεν ανήκει στη C_f.

37. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = e^x$, $x \in R$ και $g(x) = \ln x$, $x > 0$.

α) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους δεν τέμνονται.

β) Να βρείτε τη μικρότερη απόσταση την οποία μπορεί να έχει ένα σημείο της C_f από την ευθεία $y = x$.

γ) Να βρείτε το σημείο της $y = e^x$, το οποίο απέχει τη μικρότερη απόσταση από την $y = x$.

δ) Ποια νομίζετε ότι είναι τα σημεία των C_f και C_g που να απέχουν την ελάχιστη απόσταση;

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \alpha x^2$, $\alpha \neq 0$.

α) Να βρείτε τα τοπικά ακρότατα.

β) Να δείξετε ότι τα σημεία που αντιστοιχούν στα τοπικά ακρότατα της f ανήκουν στην καμπύλη με εξίσωση $y = -\frac{1}{2} x^3$.

39. Σε έναν υποτασικό ασθενή με αρχική πίεση Π_0 χορηγούνται δύο διαφορετικά φάρμακα για την υπόταση σε διαφορετικές ημερομηνίες, των οποίων οι δράσεις καθορίζονται από τις συναρτήσεις:

$\Pi_1(t) = \Pi_0 + t\, e^{-t}$ όπου t ο χρόνος δράσης και Π_1 η πίεση

$\Pi_2(t) = \Pi_0 + t^2 e^{-t}$ όπου t ο χρόνος δράσης και Π_2 η πίεση

Να βρείτε:

α) Σε πόση ώρα το κάθε φάρμακο φτάνει στη μέγιστη απόδοσή του.

β) Ποιο είναι το πιο αποτελεσματικό όσον αφορά στην άνοδο της πίεσης.

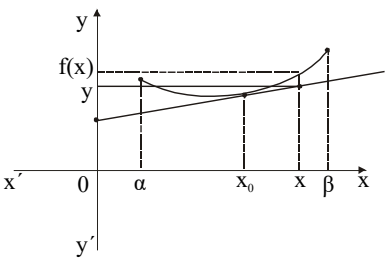
40. Έστω ένα πολυώνυμο τρίτου βαθμού $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$.

α) Να αποδείξετε ότι έχει πάντοτε ένα σημείο καμπής.

β) Να βρείτε τη συνθήκη μεταξύ των συντελεστών του, ώστε στο σημείο καμπής να δέχεται οριζόντια εφαπτομένη.

γ) Αν έχει δύο θέσεις τοπικών ακροτάτων στα x_1, x_2, να αποδείξετε ότι $P''(x_1) + P''(x_2) = 0$.

41. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f η οποία στρέφει τα κοίλα προς τα άνω στο διάστημα $[\alpha, \beta]$. Να αποδείξετε ότι η C_f βρίσκεται στο $[\alpha, \beta]$, πάνω από την εφαπτομένη της σε οποιοδήποτε σημείο $x_0 \in [\alpha, \beta]$ με εξαίρεση το σημείο επαφής.



42. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ και $g(x) = 2x + f(x)$.

α) Να αποδείξετε ότι $\ln x < x$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$.

β) Να αποδείξετε ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

γ) Να μελετήσετε τη g ως προς τα κοίλα - κυρτά και τα σημεία καμπής.

δ) Να εξετάσετε τη θέση της g ως προς την ευθεία $y = 2x$.

ε) Να βρείτε ένα σημείο x_0, στο οποίο η εφαπτομένη της g είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 2x$.

43. α) Αν η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο διάστημα Δ, παίρνει τιμές στο διάστημα $(0, +\infty)$ και ισχύει $f(x) \cdot f''(x) > (f'(x))^2$, να δείξετε ότι η $g(x) = \ln f(x)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

β) Να βρεθεί το μέγιστο διάστημα στο οποίο η συνάρτηση g με $g(x) = \ln(x^2 + 2)$ στρέφει τα κοίλα άνω.

44. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f έχει ασύμπτωτη στο $+\infty$ την ευθεία $y = 5x + 1$, να βρεθεί το όριο: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 + x \cdot \eta\mu x}{x^2 \cdot f(x) - 5x^3}$.

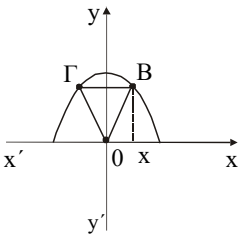
45. Για ποιες τιμές του κ η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + 1$ έχει σημείο καμπής για $x = 1$;

46. Δίνεται μια συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(\alpha) = f(\beta) = 0$ και $f''(x) < 0$, για κάθε $x \in R$. Να αποδείξετε ότι $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (\alpha, \beta)$.

47. Εξηγήστε γιατί η χρήση του κανόνα του L' Hospital δεν δίνει την πραγματική τιμή του ορίου:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^2 - 5x + 4} = \lim_{x \to 1} \frac{3x^2 + 2}{2x - 5} = \lim_{x \to 1} \frac{6x}{2} = 3 \qquad \text{(η πραγματική τιμή είναι } -\frac{5}{3}\text{)}.$$

48. Στο σχήμα φαίνεται τμήμα παραβολής με εξίσωση $y = \frac{1}{14}(48 - x^2)$, και το ισοσκελές τρίγωνο ΟΒΓ με ΟΒ = ΟΓ.



α) Να βρείτε τα σημεία Β, Γ για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου ΟΒΓ γίνεται μέγιστο.

β) Ποιο είναι αυτό το μέγιστο εμβαδόν;

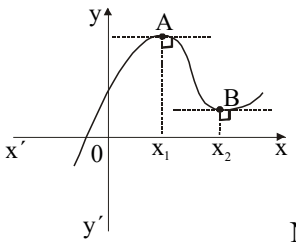
49. Έστω f η συνάρτηση της ποσότητας κάποιας ουσίας στο αίμα, σε σχέση με το χρόνο t. Αν ο ρυθμός μεταβολής της f είναι ίσος με $\frac{1}{t - 2}$, $t > 2$:

α) Να βρείτε τον τύπο της f, αν ισχύει $f(3) = 4$.

β) Από ποια χρονική στιγμή θα ισχύει $f(t) > 1$;

50. Έστω $f(x) = x^2(3 - x)$, όπου η f μετρά την αντίδραση του οργανισμού σε ποσότητα x μιας ουσίας (αύξηση πίεσης, πτώση θερμοκρασίας σώματος κ.λπ.). Να βρείτε την τιμή του x για την οποία η αντίδραση έχει τη μέγιστη τιμή. Ποια είναι η μέγιστη τιμή;

51. Δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης με τύπο $f(x) = x^3 + \kappa x^2 + x + \lambda$, $\kappa, \lambda \in R$.



Να δείξετε ότι $x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{3}$.

52. Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g με πεδίο ορισμού το ανοικτό διάστημα Δ. Να δείξετε ότι αν η $h(x) = f(x) - g(x)$ έχει στο $x_0 \in \Delta$ μέγιστο, τότε η f και η g έχουν παράλληλες εφαπτομένες στο $x_0 \in \Delta$.

53. Να αποδείξετε με τη βοήθεια των παραγώγων ότι οι συναρτήσεις $f(x) = (e^x + e^{-x})^2$ και $g(x) = (e^x - e^{-x})^2$, $x \in R$, διαφέρουν κατά μία σταθερά.

Να βρεθεί αυτή η σταθερά.

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

ΘΕΜΑ Α

Άσκηση 1

Να δείξετε ότι αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, τότε είναι και συνεχής στο σημείο αυτό.

Λύση

Για $x \neq x_0$ έχουμε $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$, οπότε

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x) - f(x_0)\right] = \lim_{x \to x_0}\left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)\right]$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0}(x - x_0) = f'(x_0)\cdot 0 = 0,$$

αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Επομένως, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, δηλαδή η f είναι συνεχής στο x_0.

Άσκηση 2

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- f συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

Λύση

Αρκεί να αποδείξουμε ότι για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει $f(x_1)=f(x_2)$.

Πράγματι

- Αν $x_1 = x_2$, τότε προφανώς $f(x_1)=f(x_2)$.
- Αν $x_1 < x_2$, τότε στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \qquad \textbf{(1)}$$

  Επειδή το ξ είναι εσωτερικό σημείο του Δ, ισχύει $f'(\xi)=0$, οπότε, λόγω της **(1)**, είναι

  $f(x_1)=f(x_2)$.

- Αν $x_1 > x_2$, τότε ομοίως αποδεικνύεται ότι $f(x_1)=f(x_2)$.

Σε όλες τις περιπτώσεις λοιπόν είναι $f(x_1)=f(x_2)$.

Άσκηση 3

i. Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ. Αν $f'(x)>0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ

ii. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$;

Λύση

i. Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$.

Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο,

ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$, οπότε έχουμε

$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)$.

Επειδή $f'(\xi)>0$ και $x_2-x_1>0$, έχουμε $f(x_2)-f(x_1)>0$,

οπότε $f(x_1)<f(x_2)$.

ii. Η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, αν

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-(\lambda x+\beta)\right]=0.$$

Άσκηση 4

i. Έστω δυο συναρτήσεις f,g ορισμένες σε ένα διάστημα Δ. Αν

- οι f,g είναι συνεχείς στο Δ
- $f'(x)=g'(x)$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ τότε να δείξετε ότι υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει

$$f(x)=g(x)+c$$

ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος μέσης τιμής;

Λύση

i. Η συνάρτηση $f-g$ είναι συνεχής στο Δ και για κάθε εσωτερικό σημείο $x\in\Delta$ ισχύει

$$(f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)=0$$

Επομένως σύμφωνα με γνωστό θεώρημα, η συνάρτηση $f-g$ είναι σταθερή στο Δ. Άρα υπάρχει σταθερά c τέτοια, ώστε για κάθε $x\in\Delta$ να ισχύει $f(x)-g(x)=c$, οπότε $f(x)=g(x)+c$.

ii. Γεωμετρικά το Θ.Μ.Τ. για μια συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$, σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $A(\alpha,f(\beta))$ και $B(\beta,f(\beta))$.

Άσκηση 5

i. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και x_0 ένα εσωτερικό σημείο του Δ.

Αν η συνάρτηση παρουσιάζει τοπικό ακρότατο στο x_0 και είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό, τότε να δείξετε ότι $f'(x_0)=0$.

ii. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Λύση

i. Ας υποθέσουμε ότι η f παρουσιάζει στο x_0 τοπικό μέγιστο.

Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του Δ και η f παρουσιάζει σ' αυτό τοπικό μέγιστο, υπάρχει ένα $\delta>0$ τέτοιο, ώστε $(x_0-\delta, x_0+\delta)\subseteq\Delta$ και $f(x)\le f(x_0)$, για κάθε $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ **(1)**

Επειδή, επιπλέον, η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

Επομένως,

- αν $x\in(x_0-\delta, x_0)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$,

  οπότε θα έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\ge 0$ **(2)**

- αν $x\in(x_0, x_0+\delta)$, τότε λόγω της **(1)**, θα είναι $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$,

  οπότε θα έχουμε $\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0$ **(3)**

Έτσι από τις **(2)** και **(3)** έχουμε $f'(x_0)=0$.

Η απόδειξη για το τοπικό ελάχιστο είναι ανάλογη.

ii. Μια συνάρτηση f λέμε ότι είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει το

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

και είναι πραγματικός αριθμός.

Άσκηση 6

i. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\sigma\upsilon\nu x$. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ με $f'(x)=-\eta\mu x$

ii. Ποια η γεωμετρική ερμηνεία του θεωρήματος Rolle;

Λύση

i. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει:

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu(x+h)-\sigma\upsilon\nu(x)}{h}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu h-\eta\mu x\cdot\eta\mu h-\sigma\upsilon\nu x}{h}=$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}-\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h},$$

οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}\right)-\lim_{h\to 0}\left(\eta\mu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}\right)=$$

$$\sigma\upsilon\nu x\cdot 0-\eta\mu x\cdot 1=-\eta\mu x.$$

Δηλαδή $(\sigma\upsilon\nu x)'=-\eta\mu x$.

ii. Γεωμετρικά το θεώρημα Rolle για τη συνάρτηση f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi,f(\xi))$ να είναι παράλληλη στον άξονα των x.

Άσκηση 7

i. Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}, \nu \in \mathbf{N}-\{0,1\}$.

Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ότι ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$.

ii. Πότε μια συνάρτηση η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά σημεία του Δ, λέγεται κυρτή στο Δ;

Λύση

i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $\mathbf{R}$, τότε για $x \neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{x^{\nu}-{x_0}^{\nu}}{x-x_0}=$$

$$\frac{(x-x_0)\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+{x_0}^{\nu-1}\right)}{x-x_0}=x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+{x_0}^{\nu-1},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\left(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}x_0+\ldots+{x_0}^{\nu-1}\right)={x_0}^{\nu-1}+{x_0}^{\nu-1}+\ldots+{x_0}^{\nu-1}=\nu{x_0}^{\nu-1},$$

δηλαδή $\left(x^{\nu}\right)'=\nu x^{\nu-1}$.

ii. Η συνάρτηση f λέγεται κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γνησίως αύξουσα στο εσωτερικό του Δ.

Άσκηση 8

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\ln|x|$, $x\in\mathbf{R}^*$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}^*$ και ισχύει $f'(x)=\frac{1}{x}$.

Λύση

Αν $x>0$, τότε $\left(\ln|x|\right)'=\left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}$, ενώ αν $x<0$, τότε $\ln|x|=\ln(-x)$, οπότε αν θέσουμε $y=\ln(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=\ln u$. Επομένως,

$$y'=\left(\ln u\right)'=\frac{1}{u}u'=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$$

και άρα $\left(\ln|x|\right)'=\frac{1}{x}$.

Άσκηση 9

Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής.

Αν $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f.

Λύση

Επειδή $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)$ και η f είναι συνεχής στο x_0,

η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0) \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0] \qquad \textbf{(1)}$$

Επειδή $f'(x)<0$ για κάθε $x\in(x_0,\beta)$ και η f είναι συνεχής στο x_0,

η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[x_0,\beta)$. Έτσι έχουμε

$$f(x)\le f(x_0) \text{ για κάθε } x\in[x_0,\beta) \qquad \textbf{(2)}$$

Επομένως λόγω των **(1)** και **(2)**, ισχύει

$$f(x)\le f(x_0) \text{ για κάθε } x\in(\alpha,\beta),$$

που σημαίνει ότι το $f(x_0)$ είναι μέγιστο της f στο (α,β) και άρα τοπικό μέγιστο αυτής.

Άσκηση 10

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\alpha}$ με $\alpha\in\mathbf{R}-\mathbf{Z}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει: $f'(x)=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$.

ii. Δίνεται συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Να δώσετε τον ορισμό του τοπικού μεγίστου για την f.

Λύση

i. Πράγματι, αν $y=x^{\alpha}=e^{\alpha\ln x}$ και θέσουμε $u=\alpha\ln x$, τότε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{\alpha\ln x}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\frac{1}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$$

ii. Μια συνάρτηση f, με πεδίο ορισμού A, θα λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό μέγιστο, όταν υπάρχει $\delta>0$, τέτοιο ώστε

$$f(x)\le f(x_0)\text{ για κάθε }x\in A\cap(x_0-\delta,x_0+\delta).$$

Το x_0 λέγεται θέση ή σημείο τοπικού μέγιστου, ενώ το $f(x_0)$ τοπικό μέγιστο.

Άσκηση 11

Να δείξετε ότι η συνάρτηση $f\left(x\right)=\alpha^{x},\alpha>0$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ και ισχύει:

$f'\left(x\right)=\alpha^{x}\cdot\ln\alpha$.

Λύση

Πράγματι, αν $y=\alpha^{x}=e^{x\ln\alpha}$ και θέσουμε $u=x\ln\alpha$, τότε $y=e^{u}$. Επομένως,

$$y'=\left(e^{u}\right)'=e^{u}\cdot u'=e^{x\ln\alpha}\cdot\ln\alpha=\alpha^{x}\cdot\ln\alpha.$$

Άσκηση 12

Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α,β) με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως είναι συνεχής. Αν η $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$, τότε να δείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Λύση

Έχουμε ότι

$$f'(x)>0, \text{ για κάθε } x\in(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta).$$

Επειδή η f είναι συνεχής στο x_0 θα είναι γνησίως αύξουσα σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(\alpha,x_0]$ και $[x_0,\beta)$. Επομένως, για $x_1<x_0<x_2$ ισχύει $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$. Άρα το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο της f. Θα δείξουμε τώρα, ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β). Πράγματι, έστω $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ με $x_1<x_2$.

- αν $x_1,x_2\in(\alpha,x_0]$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(\alpha,x_0]$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
- αν $x_1,x_2\in[x_0,\beta)$, επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο$[x_0,\beta)$, θα ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$.
- Τέλος αν $x_1<x_0<x_2$, τότε όπως είδαμε $f(x_1)<f(x_0)<f(x_2)$.

Επομένως σε όλες τις περιπτώσεις ισχύει $f(x_1)<f(x_2)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β).

Άσκηση 13

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f\left(x\right)=\eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη $\mathbf{R}$ και ισχύει $f'\left(x\right)=\sigma\upsilon\nu x$.

Λύση

Για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και $h\neq 0$ ισχύει

$$\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\frac{\eta\mu\left(x+h\right)-\eta\mu x}{h}=\frac{\eta\mu x\cdot\sigma\upsilon\nu h+\sigma\upsilon\nu x\cdot\eta\mu h-\eta\mu x}{h}=$$

$$\eta\mu x\cdot\frac{\left(\sigma\upsilon\nu h-1\right)}{h}+\sigma\upsilon\nu x\cdot\frac{\eta\mu h}{h}.$$

Επειδή

$$\lim_{h\to 0}\frac{\eta\mu h}{h}=1 \text{ και } \lim_{h\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu h-1}{h}=0,$$

έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}=\eta\mu x\cdot 0+\sigma\upsilon\nu x\cdot 1=\sigma\upsilon\nu x.$$

Δηλαδή $\left(\eta\mu x\right)'=\sigma\upsilon\nu x$

Άσκηση 14

Να αποδείξετε ότι η αν οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και η συνάρτηση $f+g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει:

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0).$$

Λύση

Για $x \neq x_0$, ισχύει:

$$\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=\frac{f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}.$$

Επειδή οι συναρτήσεις f,g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, έχουμε:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f+g)(x)-(f+g)(x_0)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}+\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

δηλαδή

$$(f+g)'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0)$$

Άσκηση 15

i. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ii. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi x,\ x\in\mathbf{R}_1=\{x\in\mathbf{R}/\sigma\upsilon\nu x\neq 0\}$, είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}_1$ και ισχύει $f'(x)=\dfrac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}$.

<u>Λύση</u>

i. Πράγματι, αν x_0 είναι ένα σημείο του $(0,+\infty)$, τότε για $x\neq x_0$ ισχύει:

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0}=\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{x_0})(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=$$

$$\frac{x-x_0}{(x-x_0)(\sqrt{x}+\sqrt{x_0})}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}},$$

οπότε

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}=\frac{1}{2\sqrt{x_0}},$$

δηλαδή $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

ii. Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbf{R_1}$ έχουμε:

$$(\varepsilon\varphi x)'=\left(\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}\right)'=\frac{(\eta\mu x)'\cdot\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x\cdot(\sigma\upsilon\nu x)'}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{\sigma\upsilon\nu x\cdot\sigma\upsilon\nu x+\eta\mu x\cdot\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2 x+\eta\mu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}.$$

ΘΕΜΑ Β

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{x-2}+x-3$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

2. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x)=0$ και το σύνολο τιμών της f.

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$. Παραγωγίζουμε τη συνάρτηση και έχουμε:

   $f'\left(x\right)=e^{x-2}+1>0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$,

   οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbf{R}$.

ii. Μία προφανής ρίζα της συνάρτησης είναι το $x=2$ και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα αυτή η ρίζα είναι μοναδική. Για το σύνολο τιμών υπολογίζουμε τα παρακάτω όρια:

   $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-2}+x-3\right)=-\infty$,

   αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{x-2}=0,\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x-3\right)=-\infty$ και

   $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{x-2}+x-3\right)=+\infty$,

   αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x-2}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-3\right)=+\infty$.

   Και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbf{R}$, το σύνολο τιμών της f είναι όλο το $\mathbf{R}$.

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=4x^3+2\left(\lambda-1\right)x-\lambda$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα $\left(0,1\right)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F\left(x\right)=x^4+\left(\lambda-1\right)x^2-\lambda x,$$

η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική. Επιπλέον ισχύει $F\left(0\right)=F\left(1\right)=0$,

επομένως ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle για την f , αφού η f :

- είναι συνεχής στο $\left[0,1\right]$
- είναι παραγωγίσιμη στο $\left(0,1\right)$

και $F\left(0\right)=F\left(1\right)$,

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(0,1\right)$ τέτοιο, ώστε $F'\left(\xi\right)=0$. Όμως $f\left(\xi\right)=F'\left(\xi\right)=0$, οπότε αποδείχτηκε το ζητούμενο.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(x^2\right)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f.

ii. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii. Να τη μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Λύση

i. Πρέπει $x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$, άρα το πεδίο ορισμού είναι το $\mathbf{R}^*$. Είναι

$$f(x)=\ln\left(x^2\right)=\ln\left(|x|^2\right)=2\ln|x|$$

οπότε

$$f'(x)=\left(2\ln|x|\right)'=2\frac{1}{x}.$$

ii. Έστω $A\left(x_0,2\ln|x_0|\right)$ το σημείο επαφής της εφαπτομένης της C_f. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y-2\ln|x_0|=\frac{2}{x_0}(x-x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

και για να διέρχεται από την αρχή των αξόνων πρέπει οι συντεταγμένες του $O(0,0)$ να επαληθεύουν την **(1)**, οπότε η **(1)** γίνεται:

$$-2\ln|x_0|=\frac{2}{x_0}(-x_0)\Leftrightarrow \ln|x_0|=1=\ln e\Leftrightarrow x_0=\pm e \text{ , και } f(x_0)=2\ln e=2$$

άρα τα σημεία της C_f είναι τα $A(e,2)$ και $B(-e,2)$

iii. Η συνάρτηση f ορίζεται στο $\mathbf{R}^*=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ και είναι συνεχής.

Επειδή $f'(x)=2\frac{1}{x}$, έχουμε ότι:

$f'(x)<0$ για $x\in(-\infty,0)$, οπότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0)$ και

$f'(x)>0$ για $x\in(0,+\infty)$, οπότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Επίσης έχουμε ότι:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι για $x\in(-\infty,0)$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty,+\infty)$ και για $x\in(0,+\infty)$, το σύνολο τιμών είναι το $(-\infty,+\infty)$. Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Επίσης η f δεν έχει ακρότατα, αφού είναι γνησίως αύξουσα σε δυο ανοιχτά διαστήματα.

iv. Από τα όρια $\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$, έπεται ότι η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$, δηλαδή τον άξονα y'y.

Πλάγια ασύμπτωτη δεν έχει, αφού

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x}=0,$$

όμως

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-0\cdot x\right]=\lim_{x\to+\infty}2\ln x=+\infty.$$

Ομοίως και στο $-\infty$.

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{4}{x}, x\neq 0$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ με $x_0\neq 0$.

ii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.

iii. Αν Α και Β τα σημεία που η εφαπτομένη στο Μ τέμνει τους άξονες, να δείξετε ότι το Μ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ.

<u>Λύση</u>

i. Ισχύει: $f'(x)=-\frac{4}{x^2}$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι: $y-\frac{4}{x_0}=-\frac{4}{x_0{}^2}(x-x_0)$ **(1)**

ii. Θα βρούμε σε ποια σημεία τέμνει η εφαπτομένη τους άξονες:

για $x=0$ η **(1)** γίνεται $y-\frac{4}{x_0}=-\frac{4}{x_0{}^2}(-x_0)\Leftrightarrow y=\frac{8}{x_0}$

και για $y=0$ η **(1)** γίνεται $-\frac{4}{x_0}=-\frac{4}{x_0{}^2}(x-x_0)\Leftrightarrow x=2x_0$.

Άρα η **(1)** τέμνει τους άξονες στα σημεία $A\left(0,\frac{8}{x_0}\right)$ και $B(2x_0,0)$.

Το εμβαδό του ορθογωνίου τριγώνου ΟΑΒ ισούται με

$(OAB)=\frac{1}{2}\cdot(OA)\cdot(OB)=\frac{1}{2}\left|\frac{8}{x_0}\right||2x_0|=8$ τ.μ,

άρα είναι σταθερό.

iii. Το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ έχει συντεταγμένες:

$\left(\frac{2x_0+0}{2},\frac{\frac{8}{x_0}+0}{2}\right)$ δηλαδή $\left(x_0,\frac{4}{x_0}\right)$, άρα είναι το σημείο Μ.

Άσκηση 5

Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x)=\begin{cases} x^4+5x,\ x\geq 0 \\ 5\cdot\eta\mu x,\ x<0 \end{cases}.$$

Λύση

Η πρώτη παράγωγος στα ανοιχτά διαστήματα είναι:

$$f'(x)=\begin{cases} 4x^3+5, x>0 \\ 5\cdot\sigma\upsilon\nu x, x<0 \end{cases}$$

Θα εξετάσουμε αν είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με τον ορισμό της παραγώγου:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x^4+5x-0}{x}=\lim_{x\to 0}\left(x^3+5\right)=5$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\eta\mu x-0}{x}=5.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f'(0)=5$.

Η δεύτερη παράγωγος στα ανοιχτά διαστήματα είναι:

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2, x>0 \\ -5\cdot\eta\mu x, x<0 \end{cases}$$

Στο $x=0$ έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{4x^3+5-5}{x}=\lim_{x\to 0}\left(4x^2\right)=0,$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\sigma\upsilon\nu x-5}{x}=5\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0.$$

Άρα $f''(0)=0$, οπότε έχουμε:

$$f''(x)=\begin{cases} 12x^2, x\geq 0 \\ -5\cdot\eta\mu x, x<0 \end{cases}$$

Άσκηση 6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-3x+1$. Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

i. να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

ii. να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x'x.

iii. να είναι παράλληλη στον άξονα x'x.

iv. να είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

Λύση

Ισχύει $f'(x)=\left(x^2-3x+1\right)'=2x-3$.

i. Η ευθεία $y=x$ έχει συντελεστή διεύθυνσης 1, άρα πρέπει $f'(x)=1\Leftrightarrow 2x-3=1\Leftrightarrow x=2$ και $f(2)=-1$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $A(2,-1)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στην ευθεία $y=x$.

ii. Επειδή $\varepsilon\varphi 135^\circ=-1$, πρέπει $f'(x)=-1\Leftrightarrow 2x-3=-1\Leftrightarrow x=1$. Επίσης $f(1)=-1$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $B(1,-1)$ στο οποίο η εφαπτομένη να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα x'x.

iii. Πρέπει $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-3=0\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ και $f\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{5}{4}$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $\Gamma\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{4}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.

iv. Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης είναι $\frac{1}{2}$, πρέπει ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης να είναι -2, οπότε $f'(x)=-2\Leftrightarrow 2x-3=-2\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{4}$, άρα υπάρχει ένα σημείο, το $\Delta\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$ στο οποίο η εφαπτομένη είναι κάθετη στην ευθεία $y=\frac{1}{2}x$.

Άσκηση 7

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

i. $x^{\eta\mu x}$, $x>0$

ii. $2^{x\cdot\ln x}$, $x>0$

iii. $\sqrt{5x^8+1}$

<u>Λύση</u>

i. $x^{\eta\mu x}=\left(e^{\ln x}\right)^{\eta\mu x}=e^{\ln x\cdot\eta\mu x}$, οπότε θέτοντας

$u=\ln x\cdot\eta\mu x$ έχουμε

$\left(x^{\eta\mu x}\right)'=\left(e^{\ln x\cdot\eta\mu x}\right)'=\left(e^{u}\right)'=$

$e^{u}\cdot u'=e^{\ln x\cdot\eta\mu x}\cdot\left(\ln x\cdot\eta\mu x\right)'=x^{\eta\mu x}\cdot\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\ln x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)$.

ii. Έστω $u=x\cdot\ln x$, οπότε

$\left(2^{x\cdot\ln x}\right)'=\left(2^{u}\right)'=2^{u}\cdot\ln 2\cdot u'=2^{x\cdot\ln x}\cdot\ln 2\cdot\left(x\cdot\ln x\right)'=2^{x\cdot\ln x}\cdot\ln 2\cdot\left(\ln x+1\right)$.

iii. Έστω $u=5x^8+1$, οπότε $\left(\sqrt{5x^8+1}\right)'=\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'=\frac{\left(5x^8+1\right)'}{2\sqrt{5x^8+1}}=\frac{20x^7}{\sqrt{5x^8+1}}$

Άσκηση 8

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$-2x+1\le f(x)\le x^4-2x+1 \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}, \qquad \textbf{(1)}$$

τότε

i. να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x=0$

ii. να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και ισχύει $f'(0)=-2$.

Λύση

i. Για $x=0$ η **(1)** γίνεται $1\le f(0)\le 1$, άρα $f(0)=1$. Επίσης

$\lim\limits_{x\to 0}(-2x+1)=\lim\limits_{x\to 0}(x^4-2x+1)=1$, οπότε σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής θα είναι και $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$.

Επομένως η f είναι συνεχής στο $x=0$, αφού $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=1$.

ii. Η σχέση **(1)** γίνεται:

$-2x+1-1\le f(x)-f(0)\le x^4-2x+1-1 \Leftrightarrow -2x\le f(x)-f(0)\le x^4-2x$, οπότε διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

- αν $x>0$, τότε
  $\frac{-2x}{x}\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\frac{x^4-2x}{x}\Leftrightarrow -2\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le x^3-2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+}(-2)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x^3-2)=-2$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$.
- αν $x<0$, τότε
  $\frac{-2x}{x}\ge\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge\frac{x^4-2x}{x}\Leftrightarrow -2\ge\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge x^3-2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}(-2)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^3-2)=-2$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-2$.

Από τα δυο προηγούμενα προκύπτει ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και $f'(0)=-2$.

Άσκηση 9

Έστω $f:\mathbf{R}\to(0,+\infty)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0>0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-{x_0}^2}$

ii. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}$

Λύση

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, ισχύει $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Οπότε

i. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(x_0)}}{x^2-{x_0}^2}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left(\sqrt{f(x)}\right)^2-\left(\sqrt{f(x_0)}\right)^2}{(x-x_0)(x+x_0)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{(x+x_0)\left(\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(x_0)}\right)}=\dfrac{f'(x_0)}{4\cdot x_0\cdot\sqrt{f(x_0)}}$.

(Αφού η f είναι παραγωγίσιμη, άρα και συνεχής στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}\sqrt{f(x)}=\sqrt{f(x_0)}$.)

ii. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f^3(x)-f^3(x_0)}{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\left[f(x)-f(x_0)\right]\left[f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{x_0}\right)^2}=$

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\lim\limits_{x\to x_0}\left[\left[f^2(x)+f(x)\cdot f(x_0)+f^2(x_0)\right]\left(\sqrt{x}+\sqrt{x_0}\right)\right]=$

$6\cdot f'(x_0)\cdot f^2(x_0)\cdot\sqrt{x_0}$.

(Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, οπότε $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ και $\lim\limits_{x\to x_0}f^2(x)=f^2(x_0)$)

Άσκηση 10

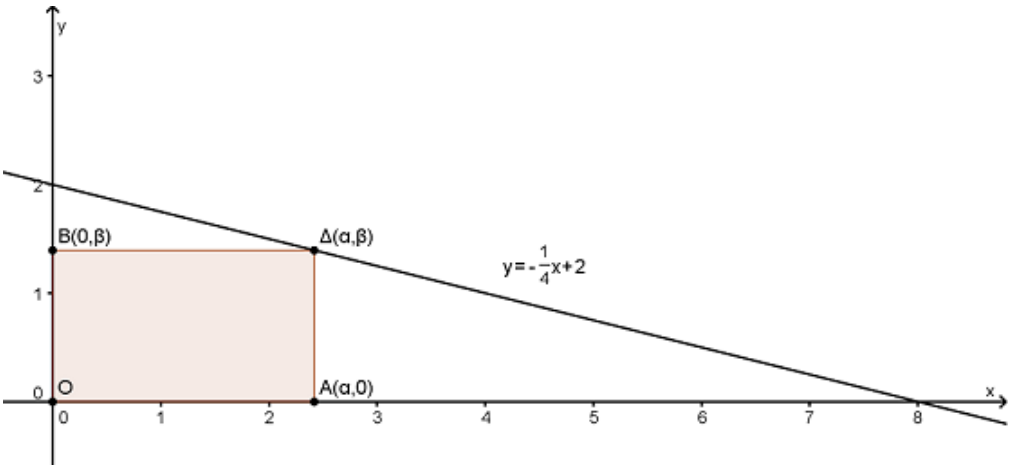
Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $O(0,0)$, δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2$.

Να βρείτε τις διαστάσεις του α,β ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

Λύση

Το εμβαδό του ορθογωνίου ισούται με $E=\alpha\cdot\beta$, όπου α,β θετικοί πραγματικοί. Η τέταρτη κορυφή (βλέπε σχήμα) είναι η $\Delta(\alpha,\beta)$,

η οποία ανήκει στην ευθεία με εξίσωση $y=-\frac{1}{4}x+2$, οπότε ισχύει $\beta=-\frac{1}{4}\alpha+2$.



Έτσι το εμβαδό του ορθογωνίου γίνεται

$E(\alpha)=a\cdot\left(-\frac{1}{4}\alpha+2\right)=-\frac{1}{4}\alpha^2+2\cdot\alpha$ με $\alpha\in(0,8)$, αφού από την ανισότητα $\beta>0$ έχουμε

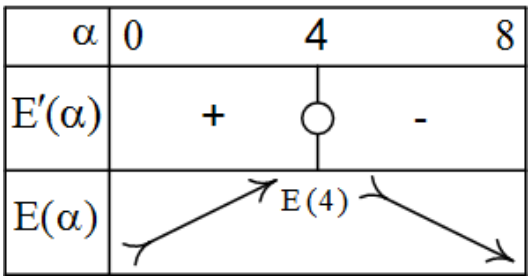
$-\frac{1}{4}\alpha+2>0\Leftrightarrow\alpha<8$.

Παραγωγίζοντας τη συνάρτηση του εμβαδού παίρνουμε:

$E'(\alpha)=\left(-\frac{1}{4}\alpha^2+2\cdot\alpha\right)'=-\frac{1}{2}\alpha+2$, οπότε $E'(\alpha)=0\Leftrightarrow\alpha=4$ και

$E'(\alpha)>0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\alpha+2>0\Leftrightarrow\alpha<4$.

Από τα προηγούμενα προκύπτει ο παρακάτω πίνακας:



Άρα η συνάρτηση του Εμβαδού είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,4]$, γνησίως φθίνουσα στο $[4,8)$ και είναι συνεχής στο 4, άρα παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $\alpha = 4$. Οπότε $\beta = -\frac{1}{4}4 + 2 = 1$.

Άσκηση 11

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2.$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

Λύση

Αρχικά θα δείξουμε ότι $f(0)=5$.

Θέτουμε $g(x)=\dfrac{f(x)-5}{x}$, με $x\neq 0$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}g(x)=2$.

Λύνουμε επίσης ως προς $f(x)$ και έχουμε:

$f(x)=x\cdot g(x)+5$, οπότε $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\left[x\cdot g(x)+5\right]=0\cdot 2+5=5$.

Όμως η f είναι συνεχής στο $x_0=0$ που σημαίνει $f(0)=\lim\limits_{x\to 0}f(x)=5$.

Έτσι

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2.$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

Άσκηση 12

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot\eta\mu x$. Να δείξετε ότι:

$$f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2f''(x)$$

Λύση

Έχουμε

$$f'(x)=\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)'=e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\,,$$

$$f''(x)=\left(e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'=2e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x \text{ και}$$

$$f^{(3)}(x)=\left(2e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)'=2e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-2e^x\cdot\eta\mu x\,.$$

Οπότε

$$f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-2e^x\cdot\eta\mu x+2\left(e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)=$$

$$4e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x=2f''(x)\,.$$

Άρα

$$f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2f''(x)\,.$$

Άσκηση 13

Να δείξετε ότι:

$2\ln(x-1) \le x-3+\ln 4$ για κάθε $x>1$.

Λύση

Επειδή

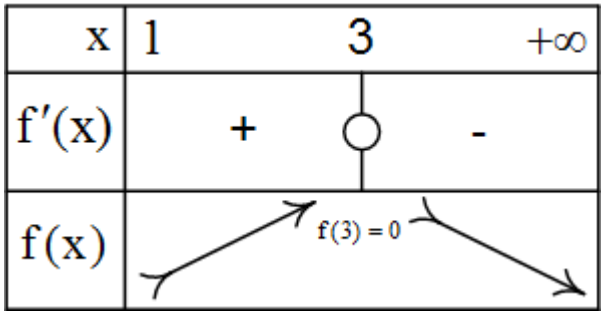
$$2\ln(x-1) \le x-3+\ln 4 \Leftrightarrow 2\ln(x-1)-x+3-\ln 4 \le 0$$

αρκεί να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x)=2\ln(x-1)-x+3-\ln 4$ με $x>1$, έχει ολικό μέγιστο το 0.

Πράγματι

$$f'(x)=\frac{2}{x-1}-1=\frac{3-x}{x-1},$$

επίσης $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=3$ και $f'(x)>0 \Leftrightarrow x<3$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών



Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,3]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[3,+\infty)$ και επειδή είναι συνεχής στο $x=3$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό μέγιστο το $f(3)=0$, άρα $f(x) \le 0$ για κάθε $x>1$.

Άσκηση 14

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A(1,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2+7x$.

Λύση

Οι συναρτήσεις f,g είναι συνεχείς και παραγωγίσιμες στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμικές.

Έχουμε $f'(x)=3x^2$, οπότε $f'(1)=3$.

Έτσι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A(1,1)$ είναι:

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \text{ ή}$$

$$\varepsilon: y=3x-2.$$

Για να εφάπτεται η ε και στη C_g, θα πρέπει να υπάρχει ένα x_0 τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0)=3 \qquad \textbf{(1)}$$

$$\text{και } g(x_0)=3x_0-2. \quad \textbf{(2)}$$

Η **(1)** μας δίνει:

$g'(x_0)=3 \Leftrightarrow 4x_0+7=3 \Leftrightarrow x_0=-1$

και $g(-1)=2\cdot(-1)^2+7(-1)=-5$, οπότε η **(2)** γίνεται

$-5=3(-1)-2$ το οποίο ισχύει.

Άρα η ευθεία $\varepsilon: y=3x-2$ εφάπτεται στη C_f στο $A(1,1)$ και στη C_g στο $B(-1,-5)$.

Άσκηση 15

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=x^4+24x^2+4x-40, x\in\mathbf{R}$.

Υποθέτουμε ότι η f έχει τρεις ρίζες $\rho_1,\rho_2,\rho_3\in\mathbf{R}$ με $\rho_1<\rho_2<\rho_3$. Επειδή η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $f(\rho_1)=f(\rho_2)=f(\rho_3)=0$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle στα διαστήματα $[\rho_1,\rho_2]$ και $[\rho_2,\rho_3]$.

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)=0$ και επίσης

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\rho_2,\rho_3)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_2)=0$.

Όμως $f'(x)=4x^3+48x+4$, η οποία είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως πολυωνυμική και επιπλέον $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f' στο διάστημα $[\xi_1,\xi_2]$, που σημαίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in(\xi_1,\xi_2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\gamma)=0$, το οποίο είναι άτοπο, αφού

$$f''(x)=12x^2+48>0 \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}.$$

Άρα η συνάρτηση f, οπότε και η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

Άσκηση 16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+7$.

ii. Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $O(0,0)$.

iii. Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο $A(2,0)$;

Λύση

Έχουμε $f'(x)=2x-4$.

i. Ο συντελεστής διεύθυνσης της ε είναι $\lambda_\varepsilon=-\frac{1}{2}$, οπότε αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης θα ισχύει $\lambda\cdot\lambda_\varepsilon=-1\Leftrightarrow\lambda=2$.

Αν $B(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη, τότε

$$f'(x_0)=2\Leftrightarrow 2x_0-4=2\Leftrightarrow x_0=3 \text{ και } f(3)=0,$$

άρα η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+7$ είναι η παρακάτω:

$$y-0=2(x-3) \text{ ή}$$

$$y=2x-6.$$

ii. Έστω $\Gamma(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής της C_f με την εφαπτομένη, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(x-x_0).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, θα ισχύει:

$$-f(x_0)=f'(x_0)\cdot(-x_0)\Leftrightarrow -x_0^2+4x_0-3=-2x_0^2+4x_0\Leftrightarrow$$

$$x_0^2=3\Leftrightarrow x_0=\pm\sqrt{3}$$

και $f\left(\sqrt{3}\right)=6-4\sqrt{3},\ f\left(-\sqrt{3}\right)=6+4\sqrt{3}$.

Άρα τα σημεία επαφής είναι τα $\Gamma\left(\sqrt{3},6-4\sqrt{3}\right)$ και $\Delta\left(-\sqrt{3},6+4\sqrt{3}\right)$.

iii. Έστω ότι υπάρχει εφαπτομένη της C_f που διέρχεται από σημείο $A(2,0)$ και $E\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ το σημείο επαφής της C_f με αυτήν, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης δίνεται:

$$y-f\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right)\cdot\left(x-x_1\right).$$

Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται από το σημείο $A(2,0)$, θα ισχύει:

$$-f\left(x_1\right)=f'\left(x_1\right)\cdot\left(2-x_1\right)\Leftrightarrow -x_1^{\,2}+4x_1-3=-2x_1^{\,2}+8x_1-8\Leftrightarrow$$

$$x_1^{\,2}-4x_1+5=0,$$

το οποίο είναι άτοπο, αφού η τελευταία δευτεροβάθμια εξίσωση έχει αρνητική διακρίνουσα ($\Delta=-4<0$), άρα είναι αδύνατη, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει εφαπτομένη της C_f που να διέρχεται από σημείο $A(2,0)$.

Άσκηση 17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=e^x+k\cdot x-1$, όπου $k\in\mathbf{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$, να βρείτε την τιμή του k.

ii. Αν $k=2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε $f'(x)=e^x+k$.

Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας με εξίσωση $y=3x+5$, είναι $\lambda=3$.

Για να είναι η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=3x+5$, θα πρέπει

$$f'(0)=\lambda=3\Leftrightarrow e^0+k=3\Leftrightarrow k=2.$$

ii. Για $k=2$ έχουμε $f(x)=e^x+2x-1$.

Για να είναι η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$ ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=0.$$

Έχουμε $\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(2x-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[e^x+2x-1-(2x-1)\right]=\lim_{x\to-\infty}e^x=0$.

Άρα η ευθεία με εξίσωση $y=2x-1$ είναι ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$.

Άσκηση 18

i. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^4+2\alpha x^3+24x^2+5x-7$, $\alpha\in\mathbf{R}$. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του α, ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$

ii. Για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbf{R}$ η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A(1, f(1))$

Λύση

1. Έχουμε

$$f'(x)=4x^3+6\alpha x^2+48x+5,$$

$$f''(x)=12x^2+12\alpha x+48=12\left(x^2+\alpha x+4\right).$$

Η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι $\Delta=\alpha^2-16$.

Όταν $\Delta<0$ τότε $f''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, άρα η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

Όταν $\Delta=0$ τότε $f''(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, όπου η ισότητα ισχύει για ένα μεμονωμένο σημείο, άρα η f είναι πάλι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

Άρα πρέπει

$$\Delta\leq 0\Leftrightarrow\alpha^2-16\leq 0\Leftrightarrow\alpha^2\leq 16\Leftrightarrow|\alpha|\leq 4\Leftrightarrow -4\leq\alpha\leq 4.$$

2. Πρέπει

$$f''(1)=0\Leftrightarrow 12+12\alpha+48=0\Leftrightarrow\alpha=-5.$$

Επίσης θα πρέπει να ελέγξουμε αν αλλάζει η κυρτότητα δεξιά και αριστερά του $x=1$.

Για $\alpha=-5$, $f''(x)=12\left(x^2-5x+4\right)$ και

$f''(x)=0\Leftrightarrow 12\left(x^2-5x+4\right)=0\Leftrightarrow\left(x=1\text{ ή }x=4\right)$. Οπότε έχουμε τον πίνακα προσήμου:

X	-∞	1		4	+∞
f''(x)	+	○	-	○	+

Άρα η f είναι κυρτή στο $(-\infty,1]$ και κοίλη στο $[1,4]$. Επίσης επειδή είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση έχει εφαπτομένη στο σημείο $A(1, f(1))$, συνεπώς το $A(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άρα για $\alpha = -5$ το $A(1, f(1))$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άσκηση 19

1. Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

   i. $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

   ii. $e^{x^2} \geq 1-x$, για κάθε $x \geq 0$.

2. Να δείξετε ότι $e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

Λύση

1. i. Έχουμε

   $e^{x-1} \geq x \Leftrightarrow e^{x-1} - x \geq 0$.

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x-1} - x$, $x \in \mathbf{R}$.

   Θα αποδείξουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

   Ισχύει

   $f'(x) = e^{x-1} - 1$,

   οπότε $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x-1} = e^0 \Leftrightarrow x = 1$

   και $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} > e^0 \Leftrightarrow x > 1$,

   οπότε έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f′(x)	-	0	+
f(x)	↘	f(1) = 0	↗

   Έτσι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$ και συνεχής στο $x = 1$, άρα στο σημείο αυτό παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το $f(1) = 0$.

   Οπότε ισχύει

$$f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{x-1} \geq x \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}.$$

ii. Έχουμε

$$e^{x^2} \geq 1-x \Leftrightarrow e^{x^2} - 1 + x \geq 0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^{x^2} - 1 + x$, $x \in [0, +\infty)$.

Θα αποδείξουμε ότι η f έχει ολικό ελάχιστο το 0.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Ισχύει

$$f'(x) = \left(e^{x^2} - 1 + x\right)' = 2x \cdot e^{x^2} + 1,$$

οπότε $f'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Έτσι

$$f(x) \geq f(0) = 0, \text{ για κάθε } x \in [0, +\infty),$$

που σημαίνει:

$$e^{x^2} \geq 1-x, \text{ για κάθε } x \geq 0.$$

2. Έχουμε

$$e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1 \Leftrightarrow e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1 \geq 0.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1$, $x \in [0, +\infty)$.

Η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $[0, +\infty)$.

Ισχύει:

$$f'(x) = \left(e^x + x - \frac{x^2}{2} - 1\right)' = e^x + 1 - x$$

και

$$f''(x) = \left(e^x + 1 - x\right)' = e^x - 1.$$

Επίσης

$f''(x)=0 \Leftrightarrow e^x-1=0 \Leftrightarrow x=0$ και

$x>0 \Leftrightarrow e^x>1 \Leftrightarrow f''(x)>0$,

άρα η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Οπότε για $x>0 \Leftrightarrow f'(x)>f'(0)=2>0$, άρα και η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$. Επομένως έχει ολικό ελάχιστο στο $x=0$, το $f(0)=0$.

Ισχύει λοιπόν:

$f(x)\geq f(0)=0$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$, άρα

$e^x+x\geq \frac{x^2}{2}+1$, για κάθε $x\in[0,+\infty)$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $f\left(x\right)=e^{2x}+5x$.

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x^2}-e^{4x-2}=-5x^2+10x-5$.

Λύση

i. Η συνάρτηση έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$. Για να αποδείξουμε ότι η συνάρτηση αντιστρέφεται αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι γνησίως μονότονη. Πράγματι:

$$f'\left(x\right)=2e^{2x}+5>0,$$

άρα η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, συνεπώς είναι και «1-1», άρα αντιστρέφεται.

ii. Η εξίσωση γίνεται ισοδύναμα:

$$e^{2x^2}-e^{4x-2}=-5x^2+10x-5\Leftrightarrow e^{2x^2}+5x^2=e^{2(2x-1)}+5\left(2x-1\right)\Leftrightarrow$$

$$f\left(x^2\right)=f\left(2x-1\right)$$

και επειδή η f είναι «1-1» έπεται ότι

$$x^2=2x-1\Leftrightarrow\left(x-1\right)^2=0\Leftrightarrow x=1.$$

Άσκηση 2

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x): \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ με $f'(0)=1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x+y) = f(x)\cdot e^y + f(y)\cdot e^x \text{ για κάθε } x, y \in \mathbf{R}.$$

i. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

Λύση

i. Για $x = y = 0$ η σχέση

$$f(x+y) = f(x)\cdot e^y + f(y)\cdot e^x \qquad \textbf{(1)}$$

γίνεται:

$f(0) = f(0)\cdot 1 + f(0)\cdot 1 \Leftrightarrow f(0) = 0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0) = 1$, όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της παραγώγου.

ii. Από τη σχέση **(1)** παίρνουμε $f(x_0+h) = f(x_0)\cdot e^h + f(h)\cdot e^{x_0}$ οπότε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h\to 0}\left[f(x_0)\cdot\frac{e^h-1}{h} + \frac{f(h)}{h}\cdot e^{x_0}\right] =$$

$$f(x_0)\cdot\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}\cdot e^{x_0} = f(x_0)\cdot e^0 + 1\cdot e^{x_0} = f(x_0) + e^{x_0},$$

αφού το όριο $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-e^0}{h-0} = g'(0) = e^0$ με $g(x) = e^x$.

Άρα $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

Άσκηση 3

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R},$$

να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = e^5$.

Λύση

Έχουμε $\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3 \Leftrightarrow \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3 \geq 0$ και θέτοντας

$f(x) = \alpha^x + \beta^x - 5e^x + 3$ παίρνουμε: $f(x) \geq 0 = f(0)$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Άρα το 0 είναι ολικό ελάχιστο της f στο 0 και επειδή η f είναι παραγωγίσιμη στο 0, (εσωτερικό σημείο του $\mathbf{R}$) έπεται από το θεώρημα Fermat ότι $f'(0) = 0$.

Όμως $f'(x) = \alpha^x \cdot \ln\alpha + \beta^x \cdot \ln\beta - 5e^x$, οπότε

$f'(0) = 0 \Leftrightarrow \alpha^0 \ln\alpha + \beta^0 \ln\beta - 5e^0 = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha \cdot \beta) = 5 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta = e^5$.

Άσκηση 4

Έστω f,g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ με

$f(0)=f(1)=0$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in(0,1)$.

i. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $h(x)=f^2(x)\cdot e^{g(x)}$ στο διάστημα $[0,1]$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Λύση

i. Οι συναρτήσεις $f^2(x), e^{g(x)}$ είναι συνεχείς στο $[0,1]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι συνεχής στο $[0,1]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

   Ομοίως οι συναρτήσεις $f^2(x), e^{g(x)}$ είναι παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε και η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

   Επίσης $h(0)=h(1)=0$, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση h στο διάστημα $[0,1]$.

ii. Είναι $h'(x)=2f(x)\cdot f'(x)\cdot e^{g(x)}+f^2(x)\cdot e^{g(x)}\cdot g'(x)$ και από το θεώρημα Rolle έχουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,1)$ τέτοιο, ώστε

$$h'(\xi)=0\Leftrightarrow 2f(\xi)\cdot f'(\xi)\cdot e^{g(\xi)}+f^2(\xi)\cdot e^{g(\xi)}\cdot g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$f(\xi)\cdot e^{g(\xi)}\left[2f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)\right]=0\Leftrightarrow 2f'(\xi)+f(\xi)\cdot g'(\xi)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=-\frac{g'(\xi)}{2}.$$

Άσκηση 5

Αν η ευθεία $y=3x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε

i. να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-3x)$

ii. να βρείτε το $\lambda\in\mathbf{R}$ ώστε:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f(x)-3x^2-\lambda^2x+2}{f(x)+\lambda x+1}=-1$$

Λύση

Αφού η ευθεία $y=3x-1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=3$ και $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-3x\right]=-1$. Οπότε έχουμε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot f(x)-3x^2-\lambda^2x+2}{f(x)+\lambda x+1}=-1\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\left[\left(f(x)-3x\right)-\lambda^2+\dfrac{2}{x}\right]}{x\cdot\left[\dfrac{f(x)}{x}+\lambda+\dfrac{1}{x}\right]}=-1\Leftrightarrow$$

$$\frac{-1-\lambda^2}{3+\lambda}=-1\Leftrightarrow\lambda^2-\lambda-2=0\Leftrightarrow\left(\lambda=2\ \text{ή}\ \lambda=-1\right).$$

Άσκηση 6

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $[0,1]$ με $f(0)<0, f(1)>2$ και $f'(x)\neq 2$ για κάθε $x\in(0,1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα μοναδικό $\xi\in(0,1)$ έτσι ώστε να ισχύει $f(\xi)=2\xi$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-2x$, η οποία είναι συνεχής στο $[0,1]$, ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων, επίσης ισχύει $g(0)g(1)=f(0)\underbrace{\left[\underbrace{f(1)-2}_{+}\right]}_{-}<0$,

οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα $\xi\in(0,1)$ ώστε $g(\xi)=0\Rightarrow f(\xi)=2\xi$.
Επιπλέον ισχύει ότι $g'(x)=f'(x)-2\neq 0$ στο $(0,1)$.
Έστω ότι η g έχει δύο ρίζες ρ_1,ρ_2 στο $(0,1)$ με $0<\rho_1<\rho_2<1$. Τότε για τη g θα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, αφού:

- η g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$
- η g είναι παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2).

$g(\rho_1)=g(\rho_2)$, άρα θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο, ώστε, $g'(x_0)=0$ το οποίο είναι άτοπο.
Άρα η g έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

Άσκηση 7

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0)=f'(0)=0$ και $f''(0)=2011$.

Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}$$

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη, συμπεραίνουμε ότι η f' υπάρχει και είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Ομοίως και η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$.

Επίσης

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\eta\mu x-x\right)=0,$$

οπότε για να βρούμε το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}$ εφαρμόζουμε μια φορά τον κανόνα De L' Hospital και παίρνουμε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{\left(e^x\cdot\eta\mu x-x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}$$

Ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f'(x)=f'(0)=0 \text{ και } \lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1\right)=0,$$

άρα το όριο $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}$ είναι πάλι της μορφής $\left(\dfrac{0}{0}\right)$,

όμως δε θα εφαρμόσουμε ακόμα μια φορά τον κανόνα De L' Hospital, αφού θα προκύψει στον αριθμητή η $f''(x)$ για την οποία δε γνωρίζουμε αν είναι συνεχής.

Για να συνεχίσουμε με τον υπολογισμό του ορίου θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της $f''(0)$.

Είναι $f''(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}=2011$, οπότε

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{e^x\cdot\eta\mu x+e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{f'(x)}{x}}{e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}{x}}=\frac{2011}{1+1}=\frac{2011}{2},$$

αφού $\lim_{x\to 0}\left(e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}e^x\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=e^0\cdot 1=1$ και

$\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-1\right)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x-e^x\cdot\eta\mu x}{1}=1$. (κανόνας De L'

Hospital)

Άρα $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{e^x\cdot\eta\mu x-x}=\frac{2011}{2}$.

Άσκηση 8

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f\left(x\right)=x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$.

Λύση

Έστω $B\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με τη C_f .

Η παράγωγος της f ισούται με $f'\left(x\right)=2x$, οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y-{x_0}^2=2x_0(x-x_0) \qquad \textbf{(1)}$$

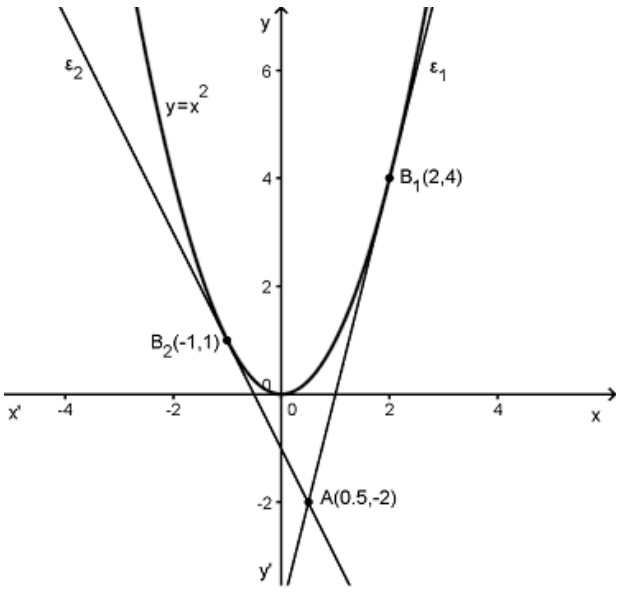
Επειδή η εφαπτομένη διέρχεται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2},-2\right)$ οι συντεταγμένες του θα επαληθεύουν την **(1)** οπότε:

$$-2-{x_0}^2=2x_0(\frac{1}{2}-x_0)\Leftrightarrow {x_0}^2-x_0-2=0\Leftrightarrow\left(x_0=2 \text{ ή } x_0=-1\right),$$

και αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην **(1)** παίρνουμε δυο εφαπτόμενες (Σχήμα 1) με εξισώσεις

$\varepsilon_1: y=4x-4$ και σημείο επαφής το $B_1\left(2,4\right)$ και

$\varepsilon_2: y=-2x-1$ και σημείο επαφής το $B_2\left(-1,1\right)$.



Σχήμα 1

Άσκηση 9

Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,3]$. Να δείξετε ότι

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3).$$

Λύση

Αφού η f είναι κοίλη στο $[0,3]$, έπεται ότι η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$.

Επίσης

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3)\Leftrightarrow \frac{f(1)-f(0)}{1-0}>\frac{f(3)-f(2)}{3-2}, \qquad \textbf{(1)}$$

και επειδή εφαρμόζεται το Θ.Μ.Τ. για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[0,1]$ και $[2,3]$ υπάρχουν $\xi_1\in(0,1)$ και $\xi_2\in(2,3)$ τέτοια, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(1)-f(0)}{1-0} \text{ και } f'(\xi_2)=\frac{f(3)-f(2)}{3-2}$$

Με βάση τα τελευταία η **(1)** γίνεται $f'(\xi_1)>f'(\xi_2)$, το οποίο ισχύει, αφού f' είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,3)$ και $\xi_1<\xi_2$.

Άσκηση 10

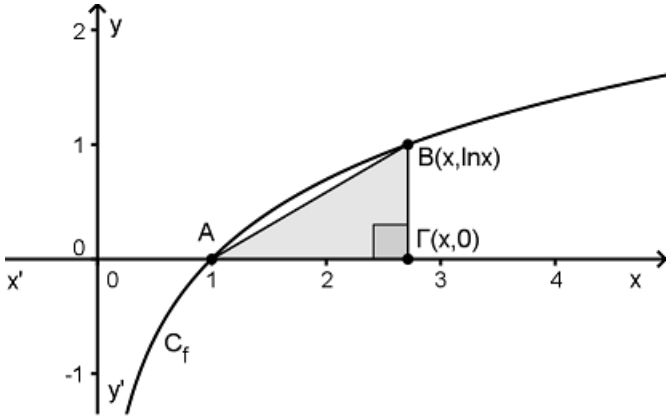
Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0), B(x,\ln x)$ και

$\Gamma(x,0), x>1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το $x=2cm$.

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0,5cm/\sec$.

Λύση

Έστω $f(x)=\ln x$.



Σχήμα 1

Το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x,\ln x)$ και $\Gamma(x,0), x>1$, ισούται με $E=\frac{1}{2}(A\Gamma)\cdot(B\Gamma)=\frac{1}{2}(x-1)\cdot\ln x$ (βλέπε Σχήμα 1) και επειδή η τετμημένη x είναι συνάρτηση του χρόνου t, έχουμε ότι και το εμβαδό είναι συνάρτηση του χρόνου t με $E(t)=\frac{1}{2}\left[x(t)-1\right]\cdot\ln x(t)$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού τη χρονική στιγμή t_0 :

$$E'(t_0)=\frac{1}{2}x'(t_0)\cdot\ln x(t_0)+\frac{1}{2}\left[x(t_0)-1\right]\cdot\frac{x'(t_0)}{x(t_0)}$$

(όπου $\left(\ln x(t)\right)'=(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'=\frac{x'(t)}{x(t)}$, με $u=x(t)$)

και αντικαθιστώντας το $x(t_0)=2cm$ και $x'(t_0)=0,5cm/\sec$ βρίσκουμε

$$E'(t_0)=\frac{1}{4}\cdot\ln 2+\frac{1}{2}\left[2-1\right]\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\cdot\left(\ln 2+\frac{1}{2}\right)cm^2/\sec$$

Άσκηση 11

i. Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho)=P'(\rho)=0$.

ii. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x-1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

Λύση

i. Έστω ότι η πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$.
Τότε υπάρχει πολυώνυμο $\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $P(x)=(x-\rho)^2\cdot\Pi(x)$, οπότε $P(\rho)=(\rho-\rho)^2\cdot\Pi(\rho)=0$.
Επίσης $P'(x)=2(x-\rho)\cdot\Pi(x)+(x-\rho)^2\cdot\Pi'(x)$, οπότε

$$P'(\rho)=2(\rho-\rho)\cdot\Pi(\rho)+(\rho-\rho)^2\cdot\Pi'(\rho)=0.$$

Αντιστρόφως έστω $P(\rho)=P'(\rho)=0$. Αφού $P(\rho)=0$, υπάρχει πολυώνυμο $Q(x)$ τέτοιο, ώστε

$$P(x)=(x-\rho)\cdot Q(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Παραγωγίζοντας έχουμε $P'(x)=Q(x)+(x-\rho)\cdot Q'(x)$, οπότε

$P'(\rho)=Q(\rho)+(\rho-\rho)\cdot Q'(\rho)=0$ άρα $Q(\rho)=0$, άρα υπάρχει πολυώνυμο

$\Pi(x)$ τέτοιο, ώστε $Q(x)=(x-\rho)\cdot\Pi(x)$. Αντικαθιστώντας το $Q(x)$ στην **(1)** παίρνουμε $P(x)=(x-\rho)^2\cdot\Pi(x)$, άρα το $(x-\rho)^2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $P(x)$.

ii. Βάσει του προηγούμενου ερωτήματος θα ισχύει $P(1)=P'(1)=0$.

Είναι $P(1)=\alpha+\beta-3-1=0$, άρα $\alpha+\beta=4$. Επίσης $P'(x)=3\alpha x^2+2\beta x-3$, οπότε $P'(1)=3\alpha+2\beta-3=0$. Λύνουμε το σύστημα

$\begin{cases}\alpha+\beta=4\\3\alpha+2\beta=3\end{cases}$ και βρίσκουμε $\begin{cases}\alpha=-5\\\beta=9\end{cases}$

Άσκηση 12

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x)\geq e^{x-1}+\ln x+x^2 \text{ για κάθε } x>0 \text{ και } f(1)=2.$$

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-e^{x-1}-\ln x-x^2$, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων και επιπλέον

$$g(x)\geq 0=g(1) \text{ για κάθε } x>0.$$

Άρα η g έχει ελάχιστο το 0 για $x=1$, οπότε σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει $g'(1)=0$. Όμως $g'(x)=f'(x)-e^{x-1}-\frac{1}{x}-2x$, άρα

$$g'(1)=f'(1)-e^0-\frac{1}{1}-2=0\Leftrightarrow f'(1)=4.$$

Συνεπώς η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$ θα είναι

$$y-2=4(x-1)\Leftrightarrow y=4x-2$$

Άσκηση 13

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \text{ για κάθε } x\in(-3,3) \qquad \textbf{(1)}$$

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Λύση

Παραγωγίζουμε δυο φορές τη σχέση **(1)**, η οποία γίνεται

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0 \Rightarrow 2f(x)\cdot f'(x)+4f'(x)+2x=0 \Rightarrow$$

$$2\left[f'(x)\right]^2+2f(x)\cdot f''(x)+4f''(x)+2=0 \qquad \textbf{(2)}$$

Έστω ότι το $A(x_0, f(x_0))$ είναι σημείο καμπής της C_f , τότε επειδή η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$, θα ισχύει $f''(x_0)=0$ και αντικαθιστώντας στην **(2)** παίρνουμε

$$2\left[f'(x_0)\right]^2+2f(x_0)\cdot f''(x_0)+4f''(x_0)+2=0 \Leftrightarrow$$

$$2\left[f'(x_0)\right]^2+2=0 \text{ το οποίο είναι άτοπο.}$$

Άρα η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Άσκηση 14

Δίνεται η συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

i. Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A\left(0, f(0)\right)$ είναι η $y = 2x + 2$.

iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2cm/\sec$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

<u>Λύση</u>

1. Παραγωγίζουμε τη σχέση $f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ και παίρνουμε

$$f'\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) \cdot \left(e^x \cdot \eta\mu x\right)' = \left(2 \cdot e^x\right)' \Leftrightarrow$$

$$f'\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) \cdot \left(e^x \cdot \eta\mu x + e^x \cdot \sigma\upsilon\nu x\right) = 2 \cdot e^x \qquad \textbf{(4)}$$

Για $x = 0$ η σχέση **(4)** μας δίνει $f'(0) = 2$.

2. Για $x = 0$ η σχέση $f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ μας δίνει $f(0) = 2$. Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - 2 = 2(x - 0) \Leftrightarrow y = 2x + 2.$$

3. Η τετμημένη x του σημείου είναι συνάρτηση του χρόνου t και $x'(t) = 2cm/\sec$, οπότε και η τεταγμένη του y του σημείου θα είναι συνάρτηση του χρόνου t και θα ισχύει

$$y(t) = 2x(t) + 2,$$

οπότε παραγωγίζουμε και έχουμε

$$y'(t) = 2x'(t) = 4cm/\sec.$$

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

   i. αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή.

   ii. αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

2. Έστω $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\left(x^5+\sigma\upsilon\nu x\right)\cdot e^{f(x)}+\eta\mu x+x\,.$$

   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

   ii. Να υπολογίσετε την τιμή $g'(0)$.

<u>Λύση</u>

1. i. Έστω ότι η f είναι άρτια, τότε ισχύει:

   $f(-x)=f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

   Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$$\left(f(-x)\right)'=f'(x) \qquad \textbf{(1)}$$

   Θέτοντας $y=f(-x)$ και $u=-x$, έχουμε $y=f(u)$. Επομένως,

$$y'=\left(f(u)\right)'=f'(u)\cdot u'=f'(-x)\cdot(-1)=-f'(-x)\,,$$

   άρα η **(1)** γίνεται $f'(-x)=-f'(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

   Συνεπώς η f' είναι περιττή.

   ii. Έστω ότι η f είναι περιττή, τότε ισχύει:

   $f(-x)=-f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

   Παραγωγίζοντας και τα δυο μέλη της σχέσης έχουμε:

$$\left(f(-x)\right)'=-f'(x) \qquad \textbf{(2)}$$

Θέτοντας $y = f(-x)$ και $u = -x$, έχουμε $y = f(u)$. Επομένως,

$$y' = \left(f(u)\right)' = f'(u)\cdot u' = f'(-x)\cdot(-1) = -f'(-x),$$

άρα η **(2)** γίνεται $f'(-x) = f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

Συνεπώς η f' είναι άρτια.

2. i. Η συνάρτηση $e^{f(x)}$ είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οι $x^5 + \sigma\upsilon\nu x$ και $\eta\mu x + x$ είναι παραγωγίσιμες ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων. Οπότε η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ ως αποτέλεσμα πράξεων παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

   ii. Έχουμε:

   $$g'(x) = \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right)'\cdot e^{f(x)} + \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right)\cdot\left(e^{f(x)}\right)' + \left(\eta\mu x + x\right)' =$$

   $$\left(5x^4 - \eta\mu x\right)\cdot e^{f(x)} + \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right)\cdot e^{f(x)}\cdot f'(x) + \sigma\upsilon\nu x + 1.$$

   Οπότε $g'(0) = e^{f(0)}\cdot f'(0) + \sigma\upsilon\nu 0 + 1 = 2$.

   Στον προηγούμενο υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε $f'(0) = 0$.

   Πράγματι από το προηγούμενο ερώτημα η συνάρτηση f' είναι περιττή, οπότε για $x = 0$ έχουμε $f'(-0) = -f'(0) \Leftrightarrow 2f'(0) = 0 \Leftrightarrow f'(0) = 0$.

Άσκηση 16

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^3\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.

ii. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi\dfrac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$.

<u>Λύση</u>

i. Για $x\neq 0$ έχουμε

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{x^3\eta\mu\frac{1}{x}}{x}=x^2\eta\mu\frac{1}{x}.$$

Επίσης $\left|x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\right|\leq x^2 \Leftrightarrow -x^2\leq x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}\leq x^2$ και επειδή $\lim\limits_{x\to 0}\left(-x^2\right)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$, έπεται από το κριτήριο παρεμβολής ότι

$$\lim_{x\to 0}x^2\eta\mu\frac{1}{x}=0,$$

άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$.

ii. Η συνάρτηση $\eta\mu\dfrac{1}{x}$ είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων, οπότε και η f είναι συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$, ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

Η συνάρτηση $\eta\mu\dfrac{1}{x}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$ ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε και η f είναι παραγωγίσιμη στο $\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$, ως γινόμενο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $f\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)=\dfrac{1}{8\pi^3}\cdot\eta\mu\left(2\pi\right)=0$ και $f\left(\dfrac{1}{\pi}\right)=\dfrac{1}{\pi^3}\cdot\eta\mu\left(\pi\right)=0$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right]$.

iii. Από το **ii)** υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'\left(\xi\right)=0$.

Έτσι

$$f'\left(\xi\right)=0\Leftrightarrow 3\xi^2\cdot\eta\mu\frac{1}{\xi}+\xi^3\cdot\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}\cdot\left(-\frac{1}{\xi^2}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$3\xi\cdot\eta\mu\frac{1}{\xi}=\sigma\upsilon\nu\frac{1}{\xi}\Leftrightarrow\sigma\varphi\frac{1}{\xi}=3\xi$$

Άρα η εξίσωση $\sigma\varphi\dfrac{1}{x}=3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{2\pi},\dfrac{1}{\pi}\right)$.

Άσκηση 17

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Λύση

i. Έχουμε

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln x} \overset{u=x\cdot\ln x}{=} \lim_{u\to 0} e^u = 1, \text{ αφού}$$

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln x\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln x\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(-x\right) = 0.$$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)} \overset{u=x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{=} \lim\limits_{u\to 0} e^u = 1$, αφού

$$\lim_{x\to 0^+} u = \lim_{x\to 0^+}\left(x\cdot\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{x+1}\right) = 0.$$

Άσκηση 18

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν:

$$f(1)=2 \text{ και}$$

$$x\cdot f'(x)=-3\cdot f(x) \text{ για κάθε } x\neq 0.$$

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^3\cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Λύση

i. Έχουμε

$$g'(x)=\left(x^3\cdot f(x)\right)'=3x^2\cdot f(x)+x^3\cdot f'(x)=3x^2\cdot f(x)+x^2\cdot\left(-3f(x)\right)=0$$

άρα $g'(x)=0$ για κάθε $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$.

Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$, δηλαδή υπάρχουν σταθερές $c_1,c_2\in\mathbf{R}$ τέτοιες, ώστε

$$g(x)=\begin{cases}c_1, & x>0\\ c_2, & x<0\end{cases}$$

Επειδή η f είναι άρτια έχουμε $f(1)=2\Leftrightarrow f(-1)=2$ οπότε

$g(1)=1^3\cdot 2=2=c_1$ και $g(-1)=(-1)^3\cdot 2=-2=c_2$.

Από τα προηγούμενα έπεται ότι

$$g(x)=\begin{cases}2, & x>0\\ -2, & x<0\end{cases}$$

ii. Για $x>0$, $g(x)=2\Leftrightarrow x^3\cdot f(x)=2\Leftrightarrow f(x)=\dfrac{2}{x^3}$.

Για $x<0$, $g(x)=-2\Leftrightarrow x^3\cdot f(x)=-2\Leftrightarrow f(x)=-\dfrac{2}{x^3}$.

Άρα $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^3}, & x>0\\ \\ -\dfrac{2}{x^3}, & x<0\end{cases}$

iii. Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to 0^-} f\left(x\right)=+\infty$, έπεται ότι η ευθεία $x=0$ είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της C_f.

Επίσης ισχύει $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Επειδή έχουμε οριζόντιες ασύμπτωτες της C_f στο $+\infty$ και στο $-\infty$, έτσι δεν έχουμε πλάγιες ασύμπτωτες.

Άσκηση 19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+24x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbf{R}$.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

<u>Λύση</u>

Το πεδίο ορισμού της $f(x)=2x^3-15x^2+24x$ είναι το $\mathbf{R}$.

i. $f'(x)=6x^2-30x+24$ και

$f'(x)=0\Leftrightarrow 6x^2-30x+24=0\Leftrightarrow (x=1 \text{ ή } x=4)$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-∞	1	4	+∞
f′(x)	+	0	-	0 +
f(x)	↗	11	↘ -16	↗

Η f είναι λοιπόν γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty,1]$ και $[4,+\infty)$ και γνησίως φθίνουσα στο $[1,4]$. Επειδή είναι επίσης συνεχής στα σημεία 1 και 4, παρουσιάζει στη θέση $x=1$ τοπικό μέγιστο το $f(1)=11$ και στη θέση $x=4$ τοπικό ελάχιστο το $f(4)=-16$.

ii. Ισχύει

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, και επειδή η f είναι συνεχής στο R τότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

iii. Τα επιμέρους σύνολα τιμών είναι

$f((-\infty,1])=(-\infty,11]$,

$f\left([1,4]\right)=[-16,11]$ και

$f\left([4,+\infty)\right)=[-16,+\infty)$ και από τη μονοτονία της συνάρτησης προκύπτει ότι

- Αν $\lambda<-16$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(-\infty,1)$.
- Αν $\lambda=-16$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x=4$ και μια δεύτερη στο $(-\infty,1)$.
- Αν $-16<\lambda<11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει τρεις ακριβώς λύσεις, μια σε κάθε ένα από τα διαστήματα $(-\infty,1)$, $(1,4)$ και $(4,+\infty)$.
- Αν $\lambda=11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει δυο ακριβώς λύσεις, την $x=1$ και μια δεύτερη στο $(4,+\infty)$.
- Αν $\lambda>11$ τότε η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει μια μοναδική λύση στο $(4,+\infty)$.

iv. $f''(x)=12x-30$ και $f''(x)>0\Leftrightarrow x>\frac{5}{2}$. Οπότε έχουμε

x	-∞	5/2	+∞
f''(x)	-	0	+

Άρα η f είναι κοίλη στο διάστημα $\left(-\infty,\frac{5}{2}\right]$ και κυρτή στο $\left[\frac{5}{2},+\infty\right)$.

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο $x_0=\frac{5}{2}$ και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(\frac{5}{2},f\left(\frac{5}{2}\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f.

Άσκηση 20

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R} \text{ και } P'(1) = 2 .$$

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

Λύση

Πρώτα θα προσδιορίσουμε το βαθμό του πολυωνύμου P.

Έστω ότι ο βαθμός του $P(x)$ είναι ν, τότε ο βαθμός του $P'(x)$ είναι $\nu-1$ και του $\left[P'(x)\right]^2$ είναι $2(\nu-1)$. Λόγω της ισότητας $\left[P'(x)\right]^2 = P(x)$, πρέπει να ισχύει:

$$2(\nu-1) = \nu \Leftrightarrow \nu = 2 .$$

Άρα το πολυώνυμο είναι δευτέρου βαθμού και θα είναι της μορφής:

$$P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \text{ με } \alpha \neq 0 ,$$

$$P'(x) = 2\alpha x + \beta ,$$

οπότε

$$\left[P'(x)\right]^2 = P(x) \Leftrightarrow (2\alpha x + \beta)^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$4\alpha^2 x^2 + 4\alpha\beta x + \beta^2 = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4\alpha^2 = \alpha & \textbf{(1)} \\ 4\alpha\beta = \beta & \textbf{(2)} \\ \beta^2 = \gamma & \textbf{(3)} \end{cases}$$

Η **(1)** μας δίνει

$$4\alpha^2 = \alpha \overset{\alpha \neq 0}{\Leftrightarrow} \alpha = \frac{1}{4}$$

και από τη σχέση $P'(1) = 2$ παίρνουμε

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 + \beta = 2 \Leftrightarrow \beta = \frac{3}{2} .$$

Τέλος αντικαθιστούμε το $\beta = \frac{3}{2}$ στη σχέση **(3)** και έχουμε:

$$\gamma = \beta^2 = \frac{9}{4}.$$

Επίσης η σχέση **(2)** ισχύει αν αντικαταστήσουμε τους αριθμούς α και β.

Έτσι $P(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}$.

Άσκηση 21

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma$ ισχύει $f(\alpha)<f(\beta)>f(\gamma)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Λύση

Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $[\alpha,\beta]$ και $[\beta,\gamma]$.

Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}.$$

Όμως $f(\alpha)<f(\beta)$ άρα

$$f'(\xi_1)>0 \qquad \textbf{(1)}$$

Ομοίως υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(\beta,\gamma)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(\gamma)-f(\beta)}{\gamma-\beta}$$

Όμως $f(\beta)>f(\gamma)$ άρα

$$f'(\xi_2)<0 \qquad \textbf{(2)}$$

Η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ και από τις **(1)** και **(2)** έχουμε $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)<0$, οπότε από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\xi_1,\xi_2)\subseteq(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Άσκηση 22

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}}$

Λύση

i. $\lim\limits_{x\to 0^+} \eta\mu x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} \cdot x \cdot e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.

γιατί

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\eta\mu x}{x} = 1$$

και

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u\to +\infty} \frac{e^u}{u} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{u\to +\infty} \frac{\left(e^u\right)'}{(u)'} = \lim_{u\to +\infty} \frac{e^u}{1} = +\infty .$$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot 0 = 0$,

αφού

$$\lim_{x\to 0^-} x = 0$$

και

$$\lim_{x\to 0^-} e^{\frac{1}{x}} \overset{u=\frac{1}{x}}{=} \lim_{u\to -\infty} e^u = 0 .$$

Άσκηση 23

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,6]\to \mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ με $f(1)=f(6)$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο

$A(x_0, f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,6)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$.

Λύση

i. Αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ και επίσης $f(1)=f(6)$, ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle, άρα:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Επομένως στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ η C_f έχει οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Θα εφαρμόσουμε το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση f στα διαστήματα $[1,2]$ και $[2,6]$.

Σχόλιο: Η επιλογή των διαστημάτων $[1,2]$ και $[2,6]$ έγινε, έτσι ώστε τα μήκη τους να είναι ανάλογα των συντελεστών της σχέσης $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$, δηλαδή τους αριθμούς 1 και 4.

- η f είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1)=\frac{f(2)-f(1)}{2-1}=f(2)-f(1). \qquad \textbf{(1)}$$

ομοίως η f είναι συνεχής στο $[2,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(2,6)$,

άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2\in(2,4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2)=\frac{f(6)-f(2)}{6-2}=\frac{f(6)-f(2)}{4}. \qquad \textbf{(2)}$$

Οπότε από τις **(1)** και **(2)** έχουμε:

$$f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=f(2)-f(1)+4\cdot\frac{f(6)-f(2)}{4}=f(6)-f(1)=0.$$

Άρα αποδείχτηκε.

Άσκηση 24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\eta\mu x$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$$f'(x)=2x-\sigma\upsilon\nu x$$

και

$$f''(x)=2+\eta\mu x.$$

Ισχύει

$$-1\le\eta\mu x\le 1\Leftrightarrow 2-1\le 2+\eta\mu x\le 2+1\Leftrightarrow$$

$$1\le 2+\eta\mu x\le 3\Leftrightarrow 1\le f''(x)\le 3,$$

άρα $f''(x)>0$, για κάθε $x\in\mathbf{R}$, το οποίο συνεπάγεται ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Έχουμε

$f'(0)=-\sigma\upsilon\nu 0=-1<0$,

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=2\cdot\frac{\pi}{2}-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=\pi>0$$

και επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, έπεται από το θεώρημα Bolzano ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Όμως όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, $f''(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$.

iii. Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$ και υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0) = 0$, οπότε:

για $x < x_0 \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) = 0$ και

για $x > x_0 \Leftrightarrow f'(x) > f'(x_0) = 0$.

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, x_0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[x_0, +\infty)$.

Άσκηση 25

Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, για την οποία ισχύουν: $f(2)=5$, $f(1)=3$ και $f(x)\le 2x+1$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Λύση

Αφού η f είναι δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$, σημαίνει ότι είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

Έχουμε $f(x)\le 2x+1\Leftrightarrow f(x)-2x-1\le 0$, οπότε αν θέσουμε

$g(x)=f(x)-2x-1$, τότε η συνάρτηση g είναι επίσης συνεχής και παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$, ως άθροισα συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης $g(x)\le 0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και επειδή $g(2)=f(2)-4-1=0$ και $g(1)=f(1)-2-1=0$, έπεται ότι η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το 0 στα σημεία $x=1$ και $x=2$.

Έτσι σύμφωνα με το θεώρημα Fermat θα ισχύει:

$g'(1)=f'(1)-2=0\Leftrightarrow f'(1)=2$ και

$g'(2)=f'(2)-2=0\Leftrightarrow f'(2)=2$.

Τέλος επειδή η f' είναι συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ και $f'(1)=f'(2)$, εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για την f' στο $[1,2]$ και μας δίνει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Άσκηση 1

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

1. η $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$
2. $f(2) - f(1) < 3$
3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.

Λύση

1. Η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη (άρα και συνεχής) στο $\mathbf{R}$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, οπότε για να τη μελετήσουμε ως προς τη μονοτονία αρκεί να βρούμε το πρόσημο της g'. Ισχύει

$$g'(x) = 3f'(x) - 3x^2 = 3\left[f'(x) - x^2 \right] < 0$$

άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$.

2. Η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε

$$g(2) < g(1) \Leftrightarrow 3f(2) - 8 < 3f(1) - 1 \Leftrightarrow f(2) - f(1) < \frac{7}{3} < 3.$$

3. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ επομένως και συνεχής, άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος μέσης τιμής στο $[1,2]$, αφού

   i. η f είναι συνεχής στο $[1,2]$

   ii. η f είναι παραγωγίσιμη στο $(1,2)$,

   οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = f(2) - f(1) < 3.$$

Άσκηση 2

i. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x)=x-\ln x$.

ii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x)=e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Λύση

i. Το πεδίο ορισμού της g είναι το $(0,+\infty)$ και είναι συνεχής σε αυτό.

Είναι $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$. Οπότε έχουμε τον επόμενο πίνακα πρόσημου για την g'

x	0		1		$+\infty$
g′(x)		-	0	+	

το οποίο σημαίνει ότι η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$,

άρα παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$, το οποίο είναι το $g(1)=1$, άρα $g(x)\geq 1$ για κάθε $x>0$.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα εξής όρια:

$\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x-\ln x)=+\infty$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$,

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty$ και

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{\ln x}{x}\right)=1-\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}1-\lim_{x\to\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'}=1-\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=1.$$

Από τα προηγούμενα έπεται ότι το σύνολο τιμών είναι το $[1,+\infty)$.

Σχόλιο: μπορούμε να απαντήσουμε βρίσκοντας και το ένα από τα δύο όρια

ii. Το πεδίο ορισμού της f είναι το $(0,+\infty)$.

Θεωρούμε το όριο $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^{\frac{1}{x}}\cdot \ln x\right) = -\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to +\infty} e^{y} = +\infty$.

Άρα η γραφική παράσταση της f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την ευθεία $x=0$.

Πλάγιες ασύμπτωτες:

Θεωρούμε το όριο

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{\ln x}{x} = 0$$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x} \overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} \overset{y=\frac{1}{x}}{=} \lim\limits_{y\to 0} e^{y} = 1,$

όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - 0\cdot x\right] = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x = +\infty,$

αφού $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x = +\infty$.

Άρα η γραφική παράσταση της f δεν έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

iii. Η παράγωγος της f ισούται με:

$$f'(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x\right)' = e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cdot\ln x + e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x} =$$

$$e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot(x-\ln x) = e^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot g(x)$$

και από το ερώτημα **i)** έπεται ότι $f'(x) > 0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$.

Στο **ii)** βρήκαμε επίσης ότι $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}}\cdot\ln x = +\infty$, άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

Άσκηση 3

1. Να δείξετε ότι:

$$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1 \text{ για κάθε } x>0 .$$

2. Να δείξετε ότι η $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\frac{1}{e},1\right)$.

3. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot\ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

4. Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

<u>Λύση</u>

1. Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=\ln x+\frac{1}{x}-1, x>0$. Έχουμε $h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών:

x	0		1		$+\infty$
h′(x)		-	0	+	

Συνεπώς η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$, άρα έχει ολικό ελάχιστο το 0 για $x=1$, δηλαδή ισχύει:

$h(x)\geq h(1)\Leftrightarrow \ln x+\frac{1}{x}-1\geq 0$ άρα αποδείχτηκε ότι

$\ln x+\frac{1}{x}\geq 1$ για κάθε $x>0$.

2. Η $g(x)=\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}$ είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e},1\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων και

- $g\left(\frac{1}{e}\right)=\ln\frac{1}{e}+2e-e^2=-1+2e-e^2=-\left(1-e\right)^2<0$,

- $g\left(1\right)=1>0$.

Άρα σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα x_0 της g στο $\left(\frac{1}{e},1\right)$. Επίσης $g'\left(x\right)=\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x^3}=\frac{x^2-2x+2}{x^3}>0$, αφού $x>0$ και $x^2-2x+2>0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ επειδή έχει διακρίνουσα $\Delta=-4<0$.

Επομένως η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$, το οποίο συνεπάγεται ότι η προηγούμενη ρίζα είναι μοναδική.

3. Έχουμε

$$f'\left(x\right)=\left(e^x\cdot\ln x\right)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}=e^x\cdot\left(\ln x+\frac{1}{x}\right)$$

και από το ερώτημα 1 έπεται ότι $f'\left(x\right)>0$, συνεπώς η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$. Επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα σε ανοιχτό διάστημα, έπεται ότι δεν έχει ακρότατα.

Για το σύνολο τιμών βρίσκουμε τα όρια:

$\lim\limits_{x\to0^+}\left(e^x\cdot\ln x\right)=-\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to0^+}e^x=1>0$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x\cdot\ln x\right)=+\infty$, αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$.

Οπότε το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbf{R}$.

4. Βρίσκουμε τη δεύτερη παράγωγο της f:

$$f''\left(x\right)=\left(e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}\right)'=e^x\cdot\ln x+e^x\cdot\frac{1}{x}+e^x\cdot\frac{1}{x}-e^x\cdot\frac{1}{x^2}=$$

$$e^x\cdot\left(\ln x+\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}\right)=e^x\cdot g\left(x\right)$$

5. Από το ερώτημα 2 η g έχει μια ρίζα $x_0\in\left(\frac{1}{e},1\right)$ και είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(0,+\infty\right)$, οπότε:

για $x<x_0\Rightarrow g\left(x\right)<g\left(x_0\right)=0$ και για $x>x_0\Rightarrow g\left(x\right)>g\left(x_0\right)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα μεταβολών

x	0	x_0	$+\infty$
f″(x)	-	○	+

Από τα προηγούμενα η f είναι κοίλη στο $(0, x_0]$ και κυρτή στο $[x_0, +\infty)$ και το σημείο $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f , αφού αφ' ενός αλλάζει η κυρτότητα και αφ' ετέρου στο σημείο αυτό η f είναι παραγωγίσιμη άρα υπάρχει εφαπτομένη της C_f .

Άσκηση 4

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ με $f(0)=2$ και

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$,

τότε να βρείτε τον τύπο της.

Λύση

Ισχύει

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x)\Leftrightarrow$

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x - f(x)\cdot\eta\mu x = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow$

$f'(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x + f(x)\cdot(\sigma\upsilon\nu x)' = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow\left(f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)' = f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x$,

οπότε σύμφωνα με γνωστή εφαρμογή του βιβλίου σελίδα 252, υπάρχει μια σταθερά c τέτοια, ώστε

$$f(x)\cdot\sigma\upsilon\nu x = c\cdot e^{x}.$$

Επίσης $f(0)=2$, οπότε έχουμε: $f(0)\cdot\sigma\upsilon\nu 0 = c\cdot e^{0}\Leftrightarrow c=2$.

Άρα $f(x)=\frac{2\cdot e^{x}}{\sigma\upsilon\nu x}$.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}, x>-1$ και $\lambda>0$.

i. Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Λύση

i. Θα μελετήσουμε την f ως προς τη μονοτονία.

$f'(x)=\left(\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}\right)'=\dfrac{e^{\lambda x}(\lambda x+\lambda-1)}{(x+1)^2}$ και $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}>-1$, οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	-1	$\frac{1-\lambda}{\lambda}$	$+\infty$
f′(x)	-	0	+

άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-1,\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[\dfrac{1-\lambda}{\lambda},+\infty\right)$, επομένως παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_0=\dfrac{1-\lambda}{\lambda}$, το οποίο είναι το $f\left(\dfrac{1-\lambda}{\lambda}\right)=\lambda\cdot e^{1-\lambda}$.

ii. Έστω $g(\lambda)=\lambda\cdot e^{1-\lambda}$ με $\lambda>0$. Θα μελετήσουμε τη g ως προς τη μονοτονία.

$g'(\lambda)=\left(\lambda\cdot e^{1-\lambda}\right)'=e^{1-\lambda}-\lambda\cdot e^{1-\lambda}=e^{1-\lambda}\cdot(1-\lambda)$ η οποία έχει ρίζα το $\lambda=1$ και για το πρόσημό της ισχύει

λ	0	1	$+\infty$
g′(λ)	+	0	-

Άρα η g είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,1]$ και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$, επομένως παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $\lambda=1$.

Άσκηση 6

Α. Να αποδείξετε ότι: $e^x \le 1+xe^x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β. Να λυθεί η εξίσωση $e^x = 1+xe^x$

Γ. Να βρείτε το σύνολο των τιμών της συνάρτησης $h(x) = 2\left|1+xe^x\right|$

Λύση

i. Θέτουμε $f(x) = 1+xe^x - e^x$ η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = \left(1+xe^x - e^x\right)' = xe^x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-∞	0	+∞
f′(x)	-	○	+

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x = 0$, δηλαδή $f(x) \ge f(0) = 0 \Leftrightarrow 1+xe^x - e^x \ge 0$.

ii. Η εξίσωση $f(x) = 0$ ισχύει για τη θέση του ελάχιστου, δηλαδή για $x = 0$.

iii. Θεωρούμε τη συνάρτηση, $g(x) = 1+xe^x$ η οποία είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

Θα βρούμε το σύνολο τιμών της: $g'(x) = xe^x + e^x = e^x(x+1)$ και έχουμε

x	-∞	-1	+∞
g′(x)	-	○	+

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$, οπότε έχει ολικό ελάχιστο στο $x = -1$, δηλαδή $g(x) \ge g(-1) = \frac{e-1}{e} > 0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+xe^x\right) = 1 + \lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x\right) = 1$,

αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{x}\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{(x)'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=0$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+xe^{x}\right)=+\infty$, άρα το σύνολο τιμών της g είναι το $[\dfrac{e-1}{e},+\infty)$.

Επομένως το σύνολο τιμών της h είναι το $[2\dfrac{e-1}{e},+\infty)$.

Άσκηση 7

1. Να λύσετε την εξίσωση $3^x + 2^x = 5^x$.

2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με $f'(x) = -2f(x)$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = e^{2x} \cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

   ii. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0) = 1$.

   iii. Αν h, φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbf{R}$, με

   $$h'(x) + 2h(x) = \varphi'(x) + 2\varphi(x) \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}$$

   και $h(0) = \varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι $h = \varphi$.

<u>Λύση</u>

1. Έχουμε $3^x + 2^x = 5^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1 = 0$ **(1)**.

   Μια προφανής λύση της προηγούμενης εξίσωσης είναι η $x = 1$. Θα δείξουμε ότι είναι μοναδική.

   Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{2}{5}\right)^x - 1$, η οποία είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

   Ισχύει:

   $$f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \cdot \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{2}{5}\right)^x \cdot \ln\frac{2}{5} < 0,$$

   αφού $\frac{3}{5} < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{3}{5} < \ln 1 = 0$ και $\frac{2}{5} < 1 \Leftrightarrow \ln\frac{2}{5} < \ln 1 = 0$.

   Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$, οπότε η $x = 1$ είναι μοναδική ρίζα της f, άρα και μοναδική ρίζα της εξίσωσης **(1)**.

   i. Η g είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ ως σύνθεση και γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

   Έχουμε

$g'(x)=\left(e^{2x}\cdot f(x)\right)'=2e^{2x}\cdot f(x)+e^{2x}\cdot f'(x)=2e^{2x}\cdot f(x)-2e^{2x}\cdot f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$

Άρα η g είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα, έχουμε ότι:

υπάρχει $c\in\mathbf{R}$ τέτοιο, ώστε $g(x)=c$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$, άρα

$e^{2x}\cdot f(x)=c\Leftrightarrow f(x)=c\cdot e^{-2x}$.

Για $x=0$ παίρνουμε:

$f(0)=c\cdot e^{0}\Leftrightarrow c=1$.

Άρα $f(x)=e^{-2x}$.

iii. Ισχύει:

$h'(x)+2h(x)=\varphi'(x)+2\varphi(x)\Leftrightarrow\left(h(x)-\varphi(x)\right)'=-2\left(h(x)-\varphi(x)\right)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$,

οπότε από το **i)** ερώτημα έπεται ότι:

$h(x)-\varphi(x)=c\cdot e^{-2x}$, και για $x=0$ παίρνουμε

$$h(0)-\varphi(0)=c\cdot e^{0}\overset{h(0)=\varphi(0)}{\Leftrightarrow}c=0.$$

Άρα $h=\varphi$.

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f, αν υπάρχουν.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0, f\left(0\right)\right)$.

v. Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x \geq 7x+3 \text{ για κάθε } x \geq -4+\sqrt{3}.$$

Λύση

Η συνάρτηση $f\left(x\right)=\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x$ έχει πεδίο ορισμού το $\mathbf{R}$.

i. Παραγωγίζουμε την f,

$$f'\left(x\right)=\left(2x+4\right)\cdot e^x+\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x.$$

Έχουμε $f'\left(x\right)=0 \Leftrightarrow \left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=0 \Leftrightarrow x=-3\pm\sqrt{2}$, επίσης

$$\lim_{x\to-\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+4x+3}{e^{-x}}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{2x+4}{-e^{-x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(2x+4\right)'}{\left(-e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}2e^x=0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\left(x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x=\left(+\infty\right)\cdot\left(+\infty\right)=+\infty,$$

οπότε σχηματίζουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-∞	$-3-\sqrt{2}$		$-3+\sqrt{2}$	$+\infty$
f′(x)	+	0	-	0	+
f(x)	0 ↗	T.M.	↘	T.E.	↗ $+\infty$

Έτσι η f είναι γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $\left(-\infty,-3-\sqrt{2}\right]$ και $\left[-3+\sqrt{2},+\infty\right)$, γνησίως φθίνουσα στο $\left[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right]$ και συνεχής στο $\mathbf{R}$, οπότε στο $-3-\sqrt{2}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο και στο $-3+\sqrt{2}$ τοπικό ελάχιστο.

Επίσης

$$f\left(\left(-\infty,-3-\sqrt{2}\right]\right)=\left(0,f\left(-3-\sqrt{2}\right)\right],$$

$$f\left(\left[-3-\sqrt{2},-3+\sqrt{2}\right]\right)=\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),f\left(-3-\sqrt{2}\right)\right] \text{ και}$$

$$f\left(\left[-3+\sqrt{2},+\infty\right)\right)=\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),+\infty\right).$$

Το $f\left(-3+\sqrt{2}\right)$ είναι ολικό ελάχιστο γιατί $f\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$.

Πράγματι το τριώνυμο $g(x)=x^2+4x+3$ έχει ρίζες τους αριθμούς -3 και -1 και $-3<-3+\sqrt{2}<-1$, άρα $g\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$ γιατί ανάμεσα στις ρίζες το τριώνυμο είναι αρνητικό, και κατά συνέπεια και $f\left(-3+\sqrt{2}\right)<0$.

Επειδή το σύνολο τιμών της f είναι το σύνολο $\left[f\left(-3+\sqrt{2}\right),+\infty\right)$ είναι φανερό ότι η f δεν έχει ολικό μέγιστο.

ii. $f''(x)=(2x+6)\cdot e^x+\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=\left(x^2+8x+13\right)\cdot e^x$ και

$$f''(x)=0\Leftrightarrow\left(x^2+8x+13\right)\cdot e^x=0\Leftrightarrow x=-4\pm\sqrt{3}.$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα προσήμου

x	-∞	$-4-\sqrt{3}$		$-4+\sqrt{3}$	$+\infty$
f″(x)	+	0	-	0	+

Άρα η f είναι κυρτή στα διαστήματα $\left(-\infty,-4-\sqrt{3}\right]$ και $\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$ και κοίλη στο διάστημα $\left[-4-\sqrt{3},-4+\sqrt{3}\right]$.

Επειδή επίσης η f είναι παραγωγίσιμη σε όλο το $\mathbf{R}$, που σημαίνει ότι έχει εφαπτομένη σε κάθε σημείο της γραφικής της παράστασης, έπεται ότι η C_f έχει δυο σημεία καμπής τα $A\left(-4-\sqrt{3}, f\left(-4-\sqrt{3}\right)\right)$ και $B\left(-4+\sqrt{3}, f\left(-4+\sqrt{3}\right)\right)$.

iii. Στο ερώτημα ii) βρήκαμε ότι $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$, άρα η f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την ευθεία $y=0$.

Επίσης

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x}{x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x\right)'}{(x)'}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x=+\infty$, άρα η f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ και επειδή η f είναι συνεχής στο $\mathbf{R}$ δεν έχει επίσης κατακόρυφες ασύμπτωτες.

iv. $f'(x)=\left(x^2+6x+7\right)\cdot e^x \Rightarrow f'(0)=7$ και $f(0)=3$.

Οπότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A\left(0, f(0)\right)$ είναι:

$$y-3=7\cdot(x-0) \text{ ή}$$

$$\varepsilon: y=7x+3.$$

v. Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$ και $0\in\left[-4+\sqrt{3},+\infty\right)$, οπότε στο διάστημα αυτό η C_f είναι «πάνω» από την εφαπτομένη στο $A\left(0, f(0)\right)$, άρα

$$\left(x^2+4x+3\right)\cdot e^x\geq 7x+3 \text{ για κάθε } x\geq -4+\sqrt{3}.$$

Άσκηση 9

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^x-\ln(x+1)-1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=0$.

iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ με $2\alpha+\beta>0$ και $\alpha+2\beta-1>0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1}-\ln(2\alpha+\beta)+e^{\alpha+2\beta-2}-\ln(\alpha+2\beta-1)\le 2$$

να υπολογίσετε τους α,β.

<u>Λύση</u>

Η συνάρτηση f έχει πεδίο ορισμού το διάστημα $(-1,+\infty)$.

i. Έχουμε

$f'(x)=e^x-\dfrac{1}{x+1}$ και

$f''(x)=e^x+\dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Επειδή $f''(x)>0$ για κάθε $x>-1$, έπεται ότι η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-1,+\infty)$.

Επίσης $f'(0)=0$, άρα

για $-1<x<0 \overset{f'\,\gamma\nu.\,\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f'(x)<f'(0)=0$ και

για $x>0 \overset{f'\,\gamma\nu.\,\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f'(x)>f'(0)=0$.

Επιπλέον $f(0)=0$ και έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα

x	-1	0	$+\infty$
f′(x)	-	0	+
f(x)	↘	0	↗

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-1,0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$, οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=0$ το $f(0)=0$.

ii. Έχουμε

$\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -1^+}\left[e^x - \ln(x+1) - 1\right] = +\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to -1^+} \ln(x+1) \overset{u=x+1}{=} \lim\limits_{u\to 0^+} \ln(u) = -\infty$ και $\lim\limits_{x\to -1^+}\left[e^x - 1\right] = \frac{1}{e} - 1$.

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι το $[0,+\infty)$.

iii. Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο πεδίο ορισμού της $(-1,+\infty)$, μοναδική λύση την $x=0$, αφού

για $x<0 \overset{f\ \gamma\nu.\varphi\theta\acute{\imath}.}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$ και

για $x>0 \overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} f(x) > f(0) = 0$.

iv. Η δοσμένη σχέση γίνεται ισοδύναμα

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha+\beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha+2\beta-1) \le 2 \Leftrightarrow$$

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln((2\alpha+\beta-1)+1) - 1 + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln((\alpha+2\beta-2)+1) - 1 \le 0 \Leftrightarrow$$

$$f(2\alpha+\beta-1) + f(\alpha+2\beta-2) \le 0 \qquad \textbf{(1)}$$

Από την τελευταία σχέση έπεται ότι

$$f(2\alpha+\beta-1) = f(\alpha+2\beta-2) = 0, \qquad \textbf{(2)}$$

γιατί αν υποθέσουμε ότι π.χ. $f(2\alpha+\beta-1) \neq 0$ τότε, επειδή $f(x) \ge 0$ για κάθε $x > -1$, θα πρέπει $f(2\alpha+\beta-1) > 0$ και η **(1)** μας δίνει $f(\alpha+2\beta-2) \le -f(2\alpha+\beta-1) < 0$ δηλαδή $f(\alpha+2\beta-2) < 0$, το οποίο

είναι άτοπο. Επομένως $f\left(2\alpha+\beta-1\right)=0$ οπότε από την **(1)** και $f\left(\alpha+2\beta-2\right)=0$.

Από την **(2)** και από το ερώτημα **iii)** έχουμε ότι

$$\begin{cases}2\alpha+\beta-1=0\\ \alpha+2\beta-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\ \beta=1\end{cases}.$$

Άσκηση 10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\frac{1}{2x}}$, $x>0$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι:

$$\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$$

<u>Λύση</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^{\frac{1}{2x}}$, $x>0$.

i. Βρίσκουμε πρώτα την παράγωγο της f.

Αν $y=x^{\frac{1}{2x}}=\left(e^{\ln x}\right)^{\frac{1}{2x}}=e^{\frac{\ln x}{2x}}$ και θέσουμε $u=\dfrac{\ln x}{2x}$, τότε $y=e^u$. Επομένως,

$$y'=\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'=e^{\frac{\ln x}{2x}}\cdot\left(\frac{\ln x}{2x}\right)'=x^{\frac{1}{2x}}\cdot\frac{1-\ln x}{2x^2}.$$

Έχουμε $f'(x)=0\Leftrightarrow\ln x=1\Leftrightarrow x=e$,

και $f'(x)>0\Leftrightarrow\ln x<1\Leftrightarrow x<e$.

Οπότε σχηματίζουμε τον πίνακα

x	0	e	+∞
f′(x)	+	0	-
f(x)	↗	f(e)	↘

Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(0,e]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ και επειδή είναι συνεχής στο e,

έχει στη θέση αυτή ολικό μέγιστο το $f(e)$

ii. Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[e,+\infty)$, οπότε ισχύει:

$$e<3<5<6\Leftrightarrow f(3)>f(5)>f(6)\Leftrightarrow 3^{\frac{1}{6}}>5^{\frac{1}{10}}>6^{\frac{1}{12}}\Leftrightarrow$$

$$\sqrt[12]{6}<\sqrt[10]{5}<\sqrt[6]{3}$$

Άσκηση 11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x^2+1\right)\cdot\ln x$, $x>0$.

i. Να δείξετε ότι $2x\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}>0$ για κάθε $x>0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f\left(x\right)=0$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(\dfrac{1}{e},1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A\left(x_0,f\left(x_0\right)\right)$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Λύση

i. Έχουμε $2x\cdot\ln x+\dfrac{1}{x}>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}2x^2\cdot\ln x+1>0$,

οπότε θεωρούμε τη συνάρτηση $g\left(x\right)=2x^2\cdot\ln x+1$, $x>0$.

Η g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $\left(0,+\infty\right)$ και
$g'\left(x\right)=4x\cdot\ln x+2x=2x\cdot\left(2\ln x+1\right)$

και έχουμε

$g'\left(x\right)=0\Leftrightarrow2x\cdot\left(2\ln x+1\right)=0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x=-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ και

$g'\left(x\right)>0\Leftrightarrow2x\cdot\left(2\ln x+1\right)>0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x>-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow x>\dfrac{1}{\sqrt{e}}$,

$g'\left(x\right)<0\Leftrightarrow2x\cdot\left(2\ln x+1\right)<0\overset{x>0}{\Leftrightarrow}\ln x<-\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow0<x<\dfrac{1}{\sqrt{e}}$

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(0,\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right]$ και γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$, και επειδή είναι συνεχής στο $x=\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει στο σημείο αυτό ολικό ελάχιστο το

$$g(\frac{1}{\sqrt{e}}) = \frac{e-1}{e} > 0 .$$

Επομένως $g(x) \geq g(\frac{1}{\sqrt{e}}) > 0$ για κάθε $x > 0$, άρα αποδείξαμε ότι

$$2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0 \text{ για κάθε } x > 0 .$$

ii. Έχουμε $f'(x) = \left[\left(x^2 + 1 \right) \cdot \ln x \right]' = 2x \ln x + x + \frac{1}{x} = x + \left(2x \ln x + \frac{1}{x} \right) > 0$, αφού

$x > 0$ και $2x \cdot \ln x + \frac{1}{x} > 0$ από το προηγούμενο ερώτημα.

Άρα η συνεχής συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επίσης το $x = 1$ είναι προφανής λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$, η οποία λόγω της μονοτονίας είναι και μοναδική.

iii. Έχουμε $f''(x) = \left(2x \ln x + x + \frac{1}{x} \right)' = 2 \ln x + 2 + 1 - \frac{1}{x^2} = 2 \ln x + 3 - \frac{1}{x^2}$ και

$$f^{(3)}(x) = \left(2 \ln x + 3 - \frac{1}{x^2} \right)' = \frac{2}{x} + \frac{2}{x^3} > 0 \text{ για κάθε } x > 0 .$$

Αφού $f^{(3)}(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$, έπεται ότι η συνεχής συνάρτηση f'' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

Επίσης $f''\left(\frac{1}{e} \right) = 1 - e^2 < 0$ και $f''(1) = 2 > 0$ και επειδή η f'' είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1 \right]$, υπάρχει σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1 \right)$ τέτοιο, ώστε $f''(x_0) = 0$, το οποίο λόγω της μονοτονίας της f'' είναι μοναδικό.

Επίσης έχουμε

$0 < x < x_0 \overset{f'' \gamma \nu . \alpha \acute{\upsilon} \xi .}{\Leftrightarrow} f''(x) < f''(x_0) = 0$ και

$x > x_0 \overset{f'' \gamma \nu . \alpha \acute{\upsilon} \xi .}{\Leftrightarrow} f''(x) > f''(x_0) = 0 .$

Επειδή η f'' μηδενίζεται στο σημείο x_0 και εκατέρωθεν αλλάζει πρόσημα το σημείο $A\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ είναι σημείο καμπής της C_f .

iv. Έχουμε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{x}\right)\cdot\ln x=\left(+\infty\right)\cdot\left(+\infty\right)=+\infty$$

άρα η C_f δεν έχει ούτε πλάγια ούτε οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

$$\lim_{x\to0^+} f\left(x\right)=\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)\cdot\ln x=-\infty\,,$$

αφού $\lim_{x\to0^+}\left(x^2+1\right)=1$ και $\lim_{x\to0^+}\ln x=-\infty$. Άρα η C_f έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη την $x=0$.

Άσκηση 12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x+\ln\left(x^2+1\right)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $x-4=\ln 17-\ln\left(x^2+1\right)$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3-x^2>\ln\dfrac{x^4+1}{x^6+1}$.

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$$f'(x)=1+\frac{2x}{x^2+1}=\frac{x^2+1+2x}{x^2+1}=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}.$$

Επειδή $f'(x)>0$ στο $(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$ και η f είναι συνεχής στο -1, έπεται ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Ισχύει

$$x-4=\ln 17-\ln\left(x^2+1\right)\Leftrightarrow x+\ln\left(x^2+1\right)=4+\ln\left(4^2+1\right)\Leftrightarrow$$

$$f(x)=f(4)$$

και η f είναι «1-1» αφού είναι γνησίως αύξουσα, άρα η τελευταία σχέση μας δίνει:

$$x=4.$$

iii. Έχουμε:

$$x^3-x^2>\ln\frac{x^4+1}{x^6+1}\Leftrightarrow x^3-x^2>\ln\left(x^4+1\right)-\ln\left(x^6+1\right)\Leftrightarrow$$

$$x^3+\ln\left(\left(x^3\right)^2+1\right)>x^2+\ln\left(\left(x^2\right)^2+1\right)\Leftrightarrow$$

$$f\left(x^3\right)>f\left(x^2\right)\overset{f\ \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow}x^3>x^2\Leftrightarrow x^2\cdot(x-1)>0\Leftrightarrow x>1.$$

Άσκηση 13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να αποδείξετε ότι:

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x) \text{ για κάθε } x>0.$$

Λύση

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $\mathbf{R}$.

i. Έχουμε

$f'(x)=2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x$,

$f''(x)=2e^x+2x\cdot e^x+2x\cdot e^x+x^2\cdot e^x=\left(x^2+4x+2\right)e^x$.

$f''(x)=0\Leftrightarrow x=-2\pm\sqrt{2}$.

Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου της f'' :

x	-∞	$-2-\sqrt{2}$	$-2+\sqrt{2}$	+∞
f''(x)	+	-	+	

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η f είναι κυρτή στα $\left(-\infty,-2-\sqrt{2}\right]$ και $\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ και κοίλη στο $\left[-2-\sqrt{2},-2+\sqrt{2}\right]$.

ii. Επειδή $-2+\sqrt{2}<0$, έπεται ότι για $x>0$ ισχύει $[x,x+1]\subseteq\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ και αφού $f''(x)>0$ στο $\left(-2+\sqrt{2},+\infty\right)$ έπεται ότι η f' είναι γνησίως αύξουσα $\left[-2+\sqrt{2},+\infty\right)$, άρα και στο $[x,x+1]$.

Η f είναι συνεχής στο $[x,x+1]$ και παραγωγίσιμη στο $(x,x+1)$, οπότε εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής για την f στο $[x,x+1]$ οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(x,x+1)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x} \Leftrightarrow f'(\xi)=f(x+1)-f(x).$$

Έτσι έχουμε

$$f'(x+1)>f(x+1)-f(x) \Leftrightarrow f'(x+1)>f'(\xi) \overset{f' \gamma\nu.\alpha\acute{\upsilon}\xi.}{\Leftrightarrow} x+1>\xi,$$

το οποίο ισχύει, άρα αποδείχτηκε η ζητούμενη σχέση.

Άσκηση 14

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right)=2$ και $f(3)=12$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

Λύση

i. Η συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$, οπότε εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής και έχουμε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(3)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{3-\frac{1}{2}}=\frac{12-2}{\frac{5}{2}}=4.$$

Επομένως η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=f'(\xi)=4$, άρα είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y=4x+2$.

ii. Η εφαπτομένη της C_f στο σημείο $B(\gamma, f(\gamma))$ έχει εξίσωση:

$$y-f(\gamma)=f'(\gamma)\cdot(x-\gamma)$$

και αφού διέρχεται από το σημείο $O(0,0)$, πρέπει

$$-f(\gamma)=f'(\gamma)\cdot(-\gamma)\Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma\cdot f'(\gamma). \qquad \textbf{(1)}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=\frac{f(x)}{x}$, $x\in\left[\frac{1}{2},3\right]$.

Η g είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$, ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2},3\right)$, ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επίσης:

$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{\frac{1}{2}}=4$ και

$g(3)=\frac{12}{3}=4$,

άρα $g\left(\frac{1}{2}\right)=g(3)$, που σημαίνει ότι εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle για τη g στο $\left[\frac{1}{2},3\right]$. Έτσι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(\gamma)=0\Leftrightarrow\frac{f'(\gamma)\cdot\gamma-f(\gamma)\cdot 1}{\gamma^2}=0\Leftrightarrow f(\gamma)=\gamma\cdot f'(\gamma).$$

Άρα αποδείχτηκε η **(1)**, συνεπώς υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma\in\left(\frac{1}{2},3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $(\gamma,f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

Άσκηση 15

1. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \text{ για κάθε } \alpha,\beta\in\Delta.$$

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{2-x^2}{x+1}, x>-1$.

   i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

   ii. Αν $\alpha>\frac{1}{e},\beta>\frac{1}{e}$ να δείξετε ότι:

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1}\geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1}$$

<u>Λύση</u>

1. Αφού η f είναι παραγωγίσιμη και κυρτή στο διάστημα Δ, άρα η f' είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

   - Αν $\alpha=\beta$, τότε η σχέση

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

     γίνεται

$$2\cdot f(\alpha)\geq 2\cdot f(\alpha)$$

     το οποίο ισχύει.

   - Έστω τώρα ότι $\alpha<\beta$. Τότε έχουμε

$$f(\alpha)+f(\beta)\geq 2\cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Leftrightarrow$$

$$f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\geq f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha) \qquad \textbf{(1)}$$

     Επίσης $\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha=\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\beta-\alpha}{2}>0$, οπότε η **(1)** γίνεται

$$\frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}} \geq \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \qquad \textbf{(2)}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα μέσης τιμής για την f στα διαστήματα $\left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right]$ και $\left[\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]$, οπότε:

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_1 \in \left(\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_1) = \frac{f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)-f(\alpha)}{\frac{\alpha+\beta}{2}-\alpha} \text{ και}$$

υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi_2 \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi_2) = \frac{f(\beta)-f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Έτσι η **(2)** γίνεται $f'(\xi_2) \geq f'(\xi_1)$, το οποίο ισχύει αφού f' γνησίως αύξουσα και $\xi_2 \geq \xi_1$.

Επομένως αποδείχτηκε.

- Ομοίως αποδεικνύεται και για $\alpha > \beta$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2-x^2}{x+1}$, $x > -1$.

Ισχύει

$$f'(x) = \frac{\left(2-x^2\right)'(x+1)-\left(2-x^2\right)(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{-x^2-2x-2}{(x+1)^2} \text{ και}$$

$$f''(x) = \frac{\left(-x^2-2x-2\right)'(x+1)^2-\left(-x^2-2x-2\right)\left((x+1)^2\right)'}{(x+1)^4} = \frac{2}{(x+1)^3}.$$

Άρα $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, συνεπώς f κυρτή στο $(-1, +\infty)$.

i. Έχουμε $\alpha > \frac{1}{e}, \beta > \frac{1}{e}$, άρα $\ln\alpha > -1$ και $\ln\beta > -1$. Επίσης

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1} \geq 2\cdot\frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2-\left(\ln\alpha\right)^2}{\ln\alpha+1}+\frac{2-\left(\ln\beta\right)^2}{\ln\beta+1} \geq 2\cdot\frac{2-\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)^2}{\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}+1} \Leftrightarrow$$

$$f\left(\ln\alpha\right)+f\left(\ln\beta\right) \geq 2\cdot f\left(\frac{\ln\alpha+\ln\beta}{2}\right)$$

η οποία ανισότητα ισχύει, όπως αποδείχτηκε στο ερώτημα 1) για τη συνάρτηση f η οποία είναι κυρτή στο $\left(-1,+\infty\right)$ και για τους $\ln\alpha > -1$ και $\ln\beta > -1$.

Ημερομηνία τροποποίησης: 15/11/2016

B1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{x-2} + x - 3$.

1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.
2. Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$ και το σύνολο τιμών της f.

B2

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 4x^3 + 2(\lambda - 1)x - \lambda$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της εξίσωσης $f(x) = 0$ στο διάστημα $(0, 1)$.

B3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2)$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και την παράγωγο της f.

ii. Να βρείτε τα σημεία της C_f στα οποία η εφαπτομένη διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

iii. Να τη μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

B4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{4}{x}$, $x \neq 0$.

i. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 \neq 0$.

ii. Να δείξετε ότι το τρίγωνο το οποίο σχηματίζει η προηγούμενη εφαπτομένη με τους άξονες έχει σταθερό εμβαδό.

iii. Αν A και B τα σημεία που η εφαπτομένη στο Μ τέμνει τους άξονες, να δείξετε ότι το M είναι το μέσο του τμήματος AB.

B5

Να βρείτε τη δεύτερη παράγωγο της συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} x^4 + 5x, & x \geq 0 \\ 5 \cdot \eta\mu x, & x < 0 \end{cases}.$$

B6

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Να βρείτε αν υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f στα οποία η εφαπτομένη:

i. να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x$

ii. να σχηματίζει γωνία 135° με τον άξονα $x'x$

iii. να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$

iv. να είναι κάθετη στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$.

B7

Να παραγωγίσετε τις παρακάτω συναρτήσεις

i. $x^{\eta\mu x},\ x > 0$

ii. $2^{x \cdot \ln x},\ x > 0$

iii. $\sqrt{5x^8 + 1}$

B8

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει:

$$-2x + 1 \leq f(x) \leq x^4 - 2x + 1 \text{ για κάθε } x \in \mathbf{R}, \quad \textbf{(1)}$$

τότε

i. να δείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x = 0$

ii. να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ και ισχύει $f'(0) = -2$.

B9

Έστω $f : \mathbf{R} \to (0, +\infty)$ μια συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 > 0$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}}{x^2 - {x_0}^2}$

ii. $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f^3(x) - f^3(x_0)}{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}$

B10

Θεωρούμε ορθογώνιο, του οποίου η μια κορυφή είναι το σημείο $O(0,0)$, δυο πλευρές βρίσκονται πάνω στους θετικούς ημιάξονες Ox και Oy και η τέταρτη κορυφή κινείται πάνω στην ευθεία $y=-\frac{1}{4}x+2$. Να βρείτε τις διαστάσεις του α,β ώστε να έχει μέγιστο εμβαδό.

B11

Δίνεται συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $x_0=0$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-5}{x}=2.$$

Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ και $f'(0)=2$.

B12

Δίνεται συνάρτηση $f(x)=e^x\cdot\eta\mu x$.

Να δείξετε ότι: $f^{(3)}(x)+2\cdot f'(x)=2f''(x)$.

B13

Να δείξετε ότι: $2\ln(x-1)\le x-3+\ln 4$ για κάθε $x>1$.

B14

Να δείξετε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=x^3$ στο σημείο της $A(1,1)$ εφάπτεται και στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2+7x$.

B15

Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^4+24x^2+4x-40=0$ έχει το πολύ δυο πραγματικές ρίζες.

B16

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-4x+3$.

i. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $\varepsilon: y=-\frac{1}{2}x+7$.

ii. Να βρεθούν τα σημεία επαφής των εφαπτόμενων της C_f που διέρχονται από το $O(0,0)$.

iii. Υπάρχουν εφαπτόμενες που διέρχονται από σημείο $A(2,0)$;

B17

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x + k \cdot x - 1$, όπου $k \in \mathbf{R}$.

i. Αν η εφαπτομένη της C_f στο σημείο της $A(0, f(0))$ είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 3x + 5$, να βρείτε την τιμή του k.

ii. Αν $k = 2$ να δείξετε ότι η ασύμπτωτη της C_f στο $-\infty$ είναι η ευθεία με εξίσωση $y = 2x - 1$.

B18

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^4 + 2\alpha x^3 + 24x^2 + 5x - 7$, $\alpha \in \mathbf{R}$. Να βρείτε το ευρύτερο δυνατό διάστημα των τιμών του α, ώστε η συνάρτηση να είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$

Για ποια τιμή του $\alpha \in \mathbf{R}$ η συνάρτηση του προηγούμενου ερωτήματος έχει σημείο καμπής το $A(1, f(1))$

B19

Να αποδείξετε τις παρακάτω ανισότητες:

i. $e^{x-1} \geq x$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$.

ii. $e^{x^2} \geq 1 - x$, για κάθε $x \geq 0$.

Να δείξετε ότι $e^x + x \geq \frac{x^2}{2} + 1$, για κάθε $x \geq 0$.

Γ1

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{2x} + 5x$.

1. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

2. Να λύσετε την εξίσωση: $e^{2x^2} - e^{4x-2} = -5x^2 + 10x - 5$.

Γ2

Δίνεται μια συνάρτηση $f(x) : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $x = 0$ με $f'(0) = 1$ και για την οποία ισχύει:

$$f(x + y) = f(x) \cdot e^y + f(y) \cdot e^x$$ για κάθε $x, y \in \mathbf{R}$.

i. Να υπολογίσετε το $f(0)$ και το $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.

ii. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της με $f'(x_0) = f(x_0) + e^{x_0}$.

Γ3

Αν για τους θετικούς πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$\alpha^x + \beta^x \geq 5e^x - 3$$, για κάθε $x \in \mathbf{R}$,

να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = e^5$.

Γ4

Έστω f, g συνεχείς συναρτήσεις στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμες στο $(0,1)$ με $f(0) = f(1) = 0$ και $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in (0,1)$.

i. Να δείξετε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος του Rolle για τη συνάρτηση $h(x) = f^2(x) \cdot e^{g(x)}$ στο διάστημα $[0,1]$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (0,1)$ τέτοιο ώστε:

$$\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = -\frac{g'(\xi)}{2}$$.

Γ5

Αν η ευθεία $y = 3x - 1$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$, τότε

i. να βρείτε τα όρια $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ και $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - 3x)$

ii. να βρείτε το $\lambda \in \mathbf{R}$ ώστε: $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x \cdot f(x) - 3x^2 - \lambda^2 x + 2}{f(x) + \lambda x + 1} = -1$

Γ7

Δίνεται συνάρτηση f δυο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν: $f(0) = f'(0) = 0$ και $f''(0) = 2011$.

Να υπολογίσετε το όριο: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{e^x \cdot \eta\mu x - x}$

Γ8

Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2$ που διέρχονται από το σημείο $A\left(\frac{1}{2}, -2\right)$.

Γ9

Δίνεται ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο $[0,3]$. Να δείξετε ότι

$$f(1)+f(2)>f(0)+f(3).$$

Γ10

Να βρείτε το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα σημεία $A(1,0)$, $B(x,\ln x)$ και $\Gamma(x,0)$, $x>1$, τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το $x=2cm$.

Δίνεται ότι ο ρυθμός μεταβολής του x είναι σταθερός και ίσος με $0,5cm/\sec$.

Γ11

Να δείξετε ότι μια πολυωνυμική συνάρτηση $P(x)$ έχει παράγοντα το $(x-\rho)^2$ αν και μόνο αν $P(\rho)=P'(\rho)=0$.

Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbf{R}$ ώστε το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2-3x-1$ να έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

Γ12

Έστω $f:(0,+\infty)\to\mathbf{R}$ παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύει:

$$f(x)\geq e^{x-1}+\ln x+x^2$$ για κάθε $x>0$ και $f(1)=2$.

Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(1,2)$.

Γ13

Θεωρούμε συνάρτηση f ορισμένη και δυο φορές παραγωγίσιμη στο $(-3,3)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση:

$$f^2(x)+4f(x)+x^2-5=0$$ για κάθε $x\in(-3,3)$ **(1)**

Να δείξετε ότι η C_f δεν έχει σημεία καμπής.

Γ14

Δίνεται η συνεχής και πραγωγίσιμη συνάρτηση f, για την οποία ισχύει:

$f\left(e^x \cdot \eta\mu x\right) = 2 \cdot e^x$ για κάθε $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

i. Να δείξετε ότι $f'(0) = 2$.

ii. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο $A\left(0, f\left(0\right)\right)$ είναι η $y = 2x + 2$.

iii. Αν ένα σημείο κινείται πάνω στην προηγούμενη ευθεία και η τετμημένη του αυξάνεται με ρυθμό $2cm/\sec$ να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του σημείου.

Γ15

Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

i. αν η f είναι άρτια, τότε η f' είναι περιττή

ii. αν η f είναι περιττή, τότε η f' είναι άρτια.

Έστω $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ μια άρτια και παραγωγίσιμη συνάρτηση. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g\left(x\right) = \left(x^5 + \sigma\upsilon\nu x\right) \cdot e^{f(x)} + \eta\mu x + x$$

.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbf{R}$.

ii. Να υπολογίσετε την τιμή $g'\left(0\right)$.

Γ16

Δίνεται συνάρτηση

$$f\left(x\right) = \begin{cases} x^3 \eta\mu\dfrac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

i. Να δείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

ii. Να δείξετε ότι εφαρμόζεται το Θεώρημα Rolle για την f στο διάστημα $\left[\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right]$.

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\sigma\varphi\dfrac{1}{x} = 3x$, έχει τουλάχιστον μια λύση στο διάστημα $\left(\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\right)$.

Γ17

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x$.

ii. $\lim\limits_{x\to 0+} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

Γ18

Δίνεται η άρτια συνάρτηση $f:\mathbf{R}^*\to\mathbf{R}$ για την οποία ισχύουν:

$f(1)=2$ και $x\cdot f'(x)=-3\cdot f(x)$ για κάθε $x\neq 0$.

i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=x^3\cdot f(x)$ είναι σταθερή σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$.

ii. Να βρείτε τον τύπο της f

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Γ19

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x^3-15x^2+24x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\lambda$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbf{R}$.

iv. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της αν υπάρχουν.

Γ20

Δίνεται πολυωνυμική συνάρτηση P για την οποία ισχύει:

$$[P'(x)]^2=P(x)$$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$ και $P'(1)=2$.

Να βρείτε το πολυώνυμο $P(x)$.

Γ21

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με συνεχή πρώτη παράγωγο. Αν για τους αριθμούς $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{R}$ με $\alpha<\beta<\gamma$ ισχύει $f(\alpha)<f(\beta)>f(\gamma)$, να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\gamma)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

Γ22

Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim\limits_{x\to 0^+}\eta\mu x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

ii. $\lim\limits_{x\to 0^-}x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

Γ23

Δίνεται η συνάρτηση $f:[1,6]\to\mathbf{R}$ η οποία είναι συνεχής στο $[1,6]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,6)$ με $f(1)=f(6)$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,6)$ τέτοιο, ώστε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f να έχει στο σημείο $A(x_0,f(x_0))$ οριζόντια εφαπτομένη.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1,\xi_2\in(1,6)$ με $\xi_1\neq\xi_2$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi_1)+4f'(\xi_2)=0$.

Γ24

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2-\eta\mu x$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι κυρτή στο $\mathbf{R}$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(x_0)=0$.

iii. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

Γ25

Δίνεται δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, για την οποία ισχύουν: $f(2)=5$, $f(1)=3$ και $f(x)\leq 2x+1$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο, ώστε $f''(\xi)=0$.

Δ1

Έστω f μια παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbf{R}$ για την οποία ισχύει: $f'(x) < x^2$ για κάθε $x \in \mathbf{R}$. Να δείξετε ότι:

1. η $g(x) = 3f(x) - x^3$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbf{R}$
2. $f(2) - f(1) < 3$
3. υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) < 3$.

Δ2

- Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $g(x) = x - \ln x$.
- Να βρείτε τις ασύμπτωτες της $f(x) = e^{\frac{1}{x}} \cdot \ln x$.
- Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ3

Να δείξετε ότι: $\ln x + \dfrac{1}{x} \geq 1$ για κάθε $x > 0$.

Να δείξετε ότι η $g(x) = \ln x + \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^2}$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $\left(\dfrac{1}{e}, 1\right)$.

Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot \ln x$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της συνάρτησης f του προηγούμενου ερωτήματος.

Δ4

Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν:

f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ με $f(0) = 2$ και

$f'(x) \cdot \sigma\upsilon\nu x = f(x)(\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$ για κάθε $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$,

τότε να βρείτε τον τύπο της.

Δ5

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^{\lambda x}}{x+1}, x>-1$ και $\lambda>0$.

i. Να δείξετε ότι η f έχει ένα ελάχιστο.

ii. Να βρείτε για ποια τιμή του λ το προηγούμενο ελάχιστο παίρνει τη μέγιστη τιμή του.

Δ7

1. Να λύσετε την εξίσωση $3^x+2^x=5^x$.
2. Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ με $f'(x)=-2f(x)$ για κάθε $x\in\mathbf{R}$.

   i. Να δείξετε ότι η συνάρτηση $g(x)=e^{2x}\cdot f(x)$ είναι σταθερή στο $\mathbf{R}$.

   ii. Να βρείτε τον τύπο της f αν $f(0)=1$.

   iii. Αν h,φ παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $\mathbf{R}$, με

   $$h'(x)+2h(x)=\varphi'(x)+2\varphi(x) \text{ για κάθε } x\in\mathbf{R}$$

   και $h(0)=\varphi(0)$, τότε να δείξετε ότι $h=\varphi$.

Δ8

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x^2+4x+3)\cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι έχει ένα ολικό ακρότατο.

ii. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα και να βρείτε τα σημεία καμπής της C_f, αν υπάρχουν.

iii. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

iv. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(0,f(0))$.

v. Να αποδείξετε την ανισότητα: $(x^2+4x+3)\cdot e^x\geq 7x+3$ για κάθε $x\geq -4+\sqrt{3}$.

Δ9

Δίνεται συνάρτηση $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να βρείτε το σύνολο τιμών της.

iii. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iv. Αν για τους αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ με $2\alpha + \beta > 0$ και $\alpha + 2\beta - 1 > 0$, ισχύει:

$$e^{2\alpha+\beta-1} - \ln(2\alpha+\beta) + e^{\alpha+2\beta-2} - \ln(\alpha+2\beta-1) \leq 2$$

να υπολογίσετε τους α, β.

Δ10

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{2x}},\ x > 0$

i. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

ii. Να δείξετε ότι: $\sqrt[12]{6} < \sqrt[10]{5} < \sqrt[6]{3}$.

Δ11

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x^2+1) \cdot \ln x$, $x > 0$.

i. Να δείξετε ότι $2x \cdot \ln x + \dfrac{1}{x} > 0$ για κάθε $x > 0$.

ii. Να μελετήσετε την f ως τη μονοτονία και να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$.

iii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(\dfrac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο, ώστε το σημείο $A(x_0, f(x_0))$ να είναι σημείο καμπής της C_f.

iv. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της C_f.

Δ12

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \ln(x^2+1)$.

i. Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbf{R}$.

ii. Να λύσετε την εξίσωση: $x - 4 = \ln 17 - \ln(x^2+1)$.

iii. Να λύσετε την ανίσωση: $x^3 - x^2 > \ln \dfrac{x^4+1}{x^6+1}$.

Δ13

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 \cdot e^x$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Να αποδείξετε ότι: $f'(x+1) > f(x+1) - f(x)$ για κάθε $x > 0$.

Δ14

Δίνεται συνάρτηση f συνεχής στο $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$ και παραγωγίσιμη στο $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$ με $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2$ και $f(3) = 12$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία με εξίσωση $y = 4x + 2$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\gamma \in \left(\frac{1}{2}, 3\right)$ τέτοιο, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $B(\gamma, f(\gamma))$ να διέρχεται από το $O(0,0)$.

Δ15

1. Δίνεται συνάρτηση f η οποία είναι παραγωγίσιμη και κυρτή σε ένα διάστημα Δ. Να δείξετε ότι:

$$f(\alpha) + f(\beta) \geq 2 \cdot f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$ για κάθε $\alpha, \beta \in \Delta$.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{2-x^2}{x+1},\ x > -1$.

i. Να μελετήσετε την f ως προς την κυρτότητα.

ii. Αν $\alpha > \frac{1}{e}, \beta > \frac{1}{e}$ να δείξετε ότι:

$$\frac{2-\ln^2\alpha}{\ln\alpha+1} + \frac{2-\ln^2\beta}{\ln\beta+1} \geq 2 \cdot \frac{2-\ln^2\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)}{\ln\left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)+1}$$

Μαθηματικά Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης Γ' Λυκείου

Ανάλυση, Κεφ. 2ο - Παράγωγος

Ασκηση 1 ☆ Υπόδειξη

Θεωρούμε συνάρτηση f συνεχή στο $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - 2x + 3}{x - x_0} = 0$. Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y = 2x - 3$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$.

Ασκηση 2 ☆ Υπόδειξη

Να βρεθεί συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση σε κάθε σημείο της $M(x, f(x))$ έχει εφαπτομένη με συντελεστή διεύθυνσης $4x\sqrt{f(x)}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και ισχύει $f(1) = 9$.

Ασκηση 3 ☆☆ Υπόδειξη

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x^3) = 3x^4 + 1$, να υπολογίσετε τις τιμές $f'(1)$ και $f'(0)$.

Ασκηση 4 ☆☆ Υπόδειξη

Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες στο $\mathbb{R}$ με την g παραγωγίσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ να ισχύουν $f(x) \cdot g(x) = 1$ και $g'(x) = -g(x)$. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα σημεία $M(a, f(a))$ και $N(a, g(a))$ αντίστοιχα είναι:

i) κάθετες και

ii) τέμνουν τον άξονα x'x σε δύο σημεία που η μεταξύ τους απόσταση είναι σταθερή.

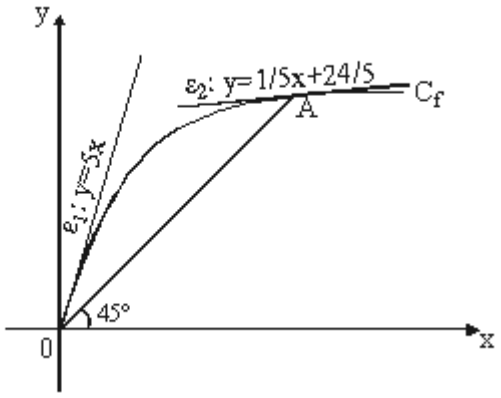
Ασκηση 5 ☆☆ Υπόδειξη

Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $f(x)$. Η καμπύλη C_f δέχεται σε κάθε σημείο της (μη κατακόρυφη) εφαπτομένη. Οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = 5x$ και $\varepsilon_2 : y = \frac{1}{5}x + \frac{24}{5}$ είναι εφαπτόμενες της C_f στα σημεία Ο και Α αντίστοιχα.

i) Να βρείτε τις συντεταγμένες του σημείου Α.

ii) Ποιος είναι ο ρυθμός αύξησης της $f(x)$ για $x_1 = 0$ και $x_2 = 6$;

iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (0, 6)$ ώστε ο ρυθμός αύξησης της $f(x)$ να είναι 1.



Άσκηση 6 ☆☆ **Υπόδειξη**

Θεωρούμε την συνάρτηση f ορισμένη και παραγωγίσιμη στο διάστημα $[1,2]$ με συνεχή παράγωγο στο $[1,2]$. Για την f ισχύουν:

α) $f(1)=f(2)-\frac{7}{3}$ και

β) $f'(1)>4$.

Να αποδείξετε ότι:

i) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=x_0^2$.

ii) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(1,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=4\xi$.

Άσκηση 7 ☆☆ **Υπόδειξη**

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)$, $x\in[0,2]$ με τιμές στο $[0,4]$, που είναι παραγωγίσιμη και ισχύει $f'(x)\neq 2$ για κάθε $x\in[0,2]$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in[0,2]$ ώστε $f(\xi)=2\xi$.

Άσκηση 8 ☆☆ **Υπόδειξη**

Μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και παραγωγίσιμη στο $(0,1)$ με $f(0)=\alpha$, $\alpha>0$ και $f(1)=0$.

i) Αποδείξτε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,1)$ ώστε $f(x_0)=\alpha x_0$.

ii) Αποδείξτε ότι υπάρχουν x_1, $x_2\in(0,1)$ ώστε $f'(x_1)\cdot f'(x_2)=\alpha^2$.

Άσκηση 9 ☆ **Υπόδειξη**

Θεωρούμε τη συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και την $F(x)=f^2(x)+(f'(x))^2$, $x\in\mathbb{R}$. Αν $f''(x)+f(x)=0$ αποδείξτε ότι η $F(x)$ είναι σταθερή συνάρτηση. Ποιος είναι ο τύπος της $f(x)$, όταν $f(0)=f'(0)=0$;

Ασκηση 10 ☆☆ Υπόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ώστε $f''(x)+\kappa^2 f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\kappa\neq 0$ πραγματικό αριθμό. Αν $f(0)=f'(0)=0$ αποδείξτε ότι $f(x)=0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ασκηση 11 ☆ Υπόδειξη

Έστω f, g συναρτήσεις δύο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $f''(x)\cdot g(x)=f(x)\cdot g''(x)$, $f'(0)g(0)=f(0)g'(0)$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ τέτοιος ώστε $f(x)=\lambda g(x)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Ασκηση 12 ☆ Υπόδειξη

Δίνεται η συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f'(x)<x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f(4)-f(2)<6$.

Ασκηση 13 ☆☆ Υπόδειξη

Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(0)=2$ και ισχύουν $f(a+x)=f(a)f(x)e^{2ax}$ και $f(x)\neq 0$ για κάθε $x,a\in\mathbb{R}$ να αποδείξετε ότι:

i) $f(0)=1$ και $f'(x)=2f(x)(x+1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{x^2+2x}}$ είναι σταθερή στο $\mathbb{R}$.

iii) Να βρεθεί ο τύπος της f.

Άσκηση 14 ☆☆ **Υπόδειξη**

Δίνονται οι παραγωγίσιμες συναρτήσεις f και g στο $\mathbb{R}$ ώστε να ισχύουν οι επόμενες προϋποθέσεις:

α) $f(x)\neq 0$ και $g(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

β) $f(0)=1$ και $g(0)=1$.

γ) $f'(x)=\dfrac{1}{g(x)}$ και $g'(x)=-\dfrac{1}{f(x)}$.

Αποδείξτε ότι:

i) $f(x)\cdot g(x)=1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

ii) Υπολογίστε τους τύπους των f και g.

Άσκηση 15 ☆☆ **Υπόδειξη**

Δίνεται συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$, δύο φορές παραγωγίσιμη με $f(\alpha)=f(\beta)$ και $f(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in(\alpha,\beta)$ με $f''(x_0)\leq 0$.

Άσκηση 16 ☆ **Υπόδειξη**

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=4x^2-4ax+a^2-2a+2$ με $x\in[0,2]$. Για ποιες τιμές του $a\in\mathbb{R}$ η ελάχιστη τιμή της συνάρτησης είναι ίση με 3;

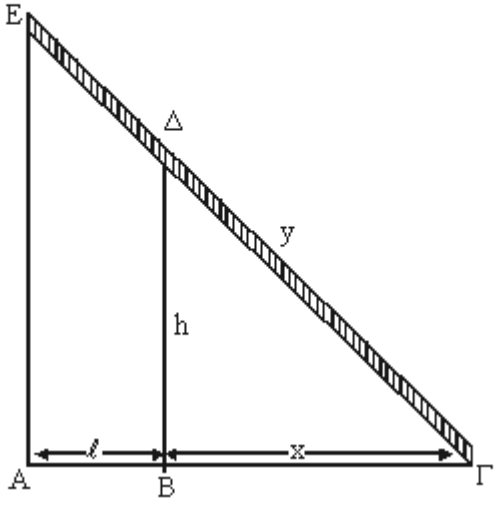
Άσκηση 17 ☆ **Υπόδειξη**

Θεωρούμε το σημείο $M(x,y)$ του οποίου οι συντεταγμένες καθορίζονται από τις συναρτήσεις $x=x(t)$, με $x(t)=\dfrac{3t}{1+t^3}$ και $y=y(t)$, με $y(t)=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$, $t\geq 0$.

Να αποδείξετε ότι για όλες τις τιμές του $t\in[0,+\infty)$ το σημείο M βρίσκεται πάντα εντός τετραγώνου που ορίζεται από τις ημιευθείες Ox, Oy και τις ευθείες $x=\sqrt[3]{4}$ και $y=\sqrt[3]{4}$.

Ασκηση 18 ☆☆ **Υπόδειξη**

Ένας μαντρότοιχος ύψους $h = 2\sqrt{2}$ m είναι χτισμένος παράλληλα σ' ένα κτίριο και σε απόσταση $\ell = 1$ m, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να βρείτε το ελάχιστο μήκος της σκάλας που ένας διαρρήκτης πρέπει να στηρίξει στο κτίριο για να μπορέσει «να κάνει την δουλειά του».



Ασκηση 19 ☆☆ **Υπόδειξη**

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x \cdot e^{2x-1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να μελετηθεί ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

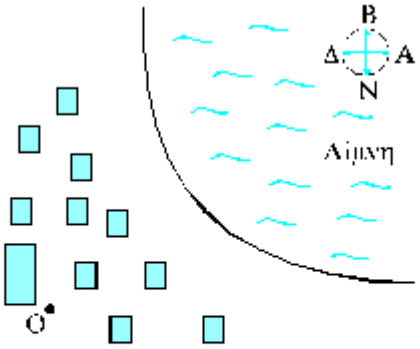
β) Για κάποιο $\alpha \in \mathbb{R}$, θεωρούμε την εξίσωση $f(x) = \alpha$ (1).

i) Έχει η εξίσωση (1) λύση όταν $\alpha = -\frac{1}{8}$;

ii) Έχει η εξίσωση (1) λύση όταν $\alpha > 0$; Αν ναι, πόσες ρίζες έχει;

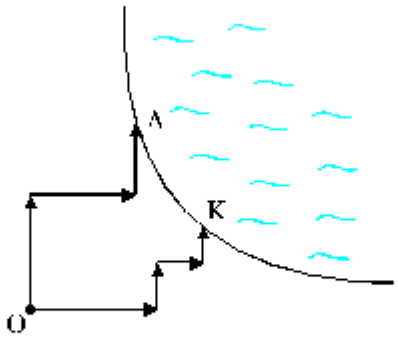
Άσκηση 20 ☆☆ Υπόδειξη

Ένας τοπογράφος Μηχανικός έχει το τοπογραφικό σχέδιο μιας κωμόπολης, στην άκρη του οποίου φαίνεται το Δημαρχείο στη θέση Ο και το περίγραμμα μιας λίμνης (Σχ. 1). Η κοινότητα θέλει να φτιάξει ένα ιχθυοτροφείο στην όχθη της λίμνης και πρότεινε στον Μηχανικό δύο εναλλακτικούς τρόπους για το σημείο που θα κατασκευαστεί.



Σχήμα 1

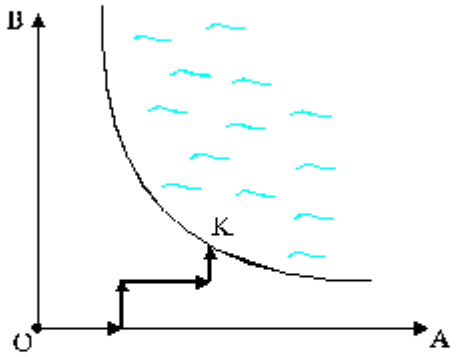
- Ο πρώτος που λαβαίνει υπόψη τόσο το κόστος κατασκευής όσο και την γραφικότητα της περιοχής είναι να συνδεθεί το Δημαρχείο με την όχθη, με τουλάχιστον τρία μονοπάτια που να έχουν κατεύθυνση Ανατολικά ή Βόρεια. Δύο τέτοιες διαδρομές οι ΟΚ και ΟΛ φαίνονται στο Σχήμα 2.



Σχήμα 2

- Ο δεύτερος λαβαίνει υπόψη μόνο το κόστος κατασκευής και επομένως συνδέει απευθείας το Δημαρχείο με ένα σημείο της όχθης.

Ο Μηχανικός μελέτησε το πρόβλημα και το μαθηματικοποίησε ως εξής: Θεώρησε ως σημείο αναφοράς το Ο, και ως άξονες συντεταγμένων τον ΟΑ (Ανατολικά) και ΟΒ (Βόρεια) με μονάδα μέτρησης τα 150 μέτρα. Το περίγραμμα της λίμνης προσεγγιστικά το απέδωσε με την γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\frac{4}{x^2}$.



Σχήμα 3

Α. Ισχυρίστηκε ότι η τυχαία διαδρομή ΟΚ δίνεται από τον τύπο: $OK=\Delta(x)=x+\frac{4}{x^2}$. Δικαιολογήστε τον ισχυρισμό αυτό.

Β. α) Βρείτε το ελάχιστο μήκος $\Delta(x)$ και προσδιορίστε έτσι το σημείο Κ.

β) Ποιο το κόστος κατασκευής του ελάχιστου δρόμου $\Delta(x)$ αν το τρέχον μέτρο στοιχίζει 20.000 δρχ.;

Γ. α) Βρείτε την ελάχιστη απόσταση που συνδέει το Δημαρχείο απευθείας με ένα σημείο της όχθης

β) Ποιο το κόστος κατασκευής σε αυτή την περίπτωση, αν το τρέχον μέτρο στοιχίζει 12.000 δρχ.;

Ασκηση 21 ☆☆☆ Υπόδειξη

Δίνεται συνάρτηση f δύο φορές παραγωγίσιμη στο $[1,e]$ με $f(1)=2$, $f(e)=e+1$ και σύνολο τιμών το $[-1,4]$. Να αποδείξετε ότι:

Α. α) Υπάρχουν τουλάχιστον δύο τιμές $x_1, x_2 \in (1,e)$ με $x_1 \neq x_2$ ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

β) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (1,e)$ τέτοιο ώστε $f''(\xi)=0$.

γ) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1,e)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)\cdot\left[f'(x_0)-4f^4(x_0)\right]=x_0$.

Β. α) Η ευθεία $y=-x+e+2$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $c_0 \in (1,e)$.

β) Υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in (1,e)$ με $\xi_1 \neq \xi_2$ τέτοιοι ώστε να ισχύει $f'(\xi_1)\cdot f'(\xi_2)=1$.

Ασκηση 22 ☆☆☆ Υπόδειξη

Α. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύουν $f'(\alpha)>0$, $f'(\beta)<0$.

α) Δικαιολογήστε γιατί υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ στο οποίο η f παίρνει μέγιστη τιμή.

β) Αποδείξτε ότι $f'(\xi)=0$.

Β. Υποθέστε τώρα ότι η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f'(\alpha)\cdot f'(\beta)<0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=0$.

Γ. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x \in \Delta$, αποδείξτε τα επόμενα:

α) $f'(x)>0$ για κάθε $x \in \Delta$ ή $f'(x)<0$ για κάθε $x \in \Delta$.

β) Η γραφική παράσταση της f τέμνει τον x'x άξονα το πολύ σ' ένα σημείο.

Ασκηση 23 ☆☆☆ Υπόδειξη

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{\alpha}{x}+\alpha$ με $x>0$. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x>0$

i) Αποδείξτε ότι $\alpha=-1$.

ii) Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία και τα ακρότατα.

iii) Να λυθεί η εξίσωση $f(x)=0$.

iv) Να λυθεί η ανίσωση $\ln\left(2\lambda^2+2\right)-\frac{1}{\lambda^2+3}>\ln\left(\lambda^2+3\right)-\frac{1}{2\lambda^2+2}$.

Ασκηση 24 ☆☆☆ Υπόδειξη

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στο (α,β) με $f(\alpha)=f(\beta)=0$ και f' γνησίως φθίνουσα στο (α,β).

Α) Αποδείξτε ότι $f(x)>0$ για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$.

Β) i) Αποδείξτε ότι υπάρχει ένα μόνο $x_0\in(\alpha,\beta)$ ώστε η f να παρουσιάζει μέγιστο στο x_0.

ii) Αποδείξτε ότι υπάρχουν $x_1,x_2\in(\alpha,\beta)$ ώστε $f'(x_1)-f'(x_2)\geq\frac{4f(x_0)}{\beta-\alpha}$.

Γ) Αν επιπλέον υπάρχει η f'' στο (α,β) αποδείξτε ότι υπάρχει $\xi\in(x_1,x_2)$ ώστε

i) $f''(\xi)<0$

ii) $f(x)\leq -f''(\xi)\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2$.

Ασκηση 25 ☆ Υπόδειξη

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$, $a\neq 0$. Αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot f'(x)$, να υπολογιστεί.

Ασκηση 26 ☆☆ **Υπόδειξη**

Σε ένα διάλογο μέσα στην τάξη τέθηκε από μαθητή το εξής ερώτημα: «Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα (α,β) τότε η f' είναι συνεχής σ' αυτό το διάστημα». Δικαιολογήθηκε από τον ίδιο τον μαθητή ως εξής: «Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο (α,β) τότε για το τυχαίο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (1) και χρησιμοποιώντας τον κανόνα De L'Hospital παίρνουμε: $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{(f(x)-f(x_0))'}{(x-x_0)'}=\lim_{x\to x_0}f'(x)\ (2).$$

Από (1), (2) έχουμε $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x_0)$, άρα η f' είναι συνεχής στο σημείο x_0».

α) Βρείτε το λάθος στην απόδειξη του μαθητή.

β) Ελέγξτε με την βοήθεια της συνάρτησης $f(x)=\begin{cases}x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$ αν ο ισχυρισμός του μαθητή ευσταθεί.

Ασκηση 27 ☆ **Υπόδειξη**

Θεωρούμε τις συναρτήσεις «$y=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\gamma}{x^2+\delta x+\varepsilon}$».

i) Να προσδιοριστούν κάποιοι από τους συντελεστές α, β, γ, δ, ε ώστε η γραφική παράστασή τους να έχει ασύμπτωτους τις ευθείες: $y=1$, $x=0$, $x=3$.

ii) Αν ισχύει η σχέση $\gamma=-4(\beta+3)$ όπου $\beta+3\neq 0$ να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις τους τέμνουν την ασύμπτωτη $y=1$ σ' ένα σταθερό σημείο (ανεξάρτητο των β, γ).

Ασκηση 28 ☆☆ **Υπόδειξη**

Αν $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^{\frac{x+\eta\mu x}{x}}+\alpha x\right)=0$ να υπολογίστε το $\alpha\in\mathbb{R}$.

Ασκηση 29 ☆☆

Να βρείτε ποια είναι σωστή (Σ) και ποια λάθος (Λ) από τις επόμενες προτάσεις και να δικαιολογήσετε:

i. Υπάρχει συνάρτηση f για την οποία ισχύει $f(x_0)-f^2(x_0)=1+x_0^2$, για κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$.

ii. Αν η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_1 και τοπικό ελάχιστο στο x_2, τότε $f(x_1)\geq f(x_2)$.

iii. Αν η f είναι γνήσια φθίνουσα και ισχύει $f(x_1)>f(x_2)$ τότε είναι $x_1>x_2$ για κάθε $x_1,x_2\in A$.

iv. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β) και παραγωγίσιμη σ' αυτό το διάστημα, τότε για κάθε $x\in(\alpha,\beta)$ ισχύει $f'(x)>0$.

v. Αν η f′ είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ τότε και η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.

vi. Αν η $f'(x)>0$ στο $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο (α,β), όταν η f είναι συνεχής στο x_0.

vii. Αν f, g παραγωγίσιμες σ' ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x)>g(x)$ για κάθε $x\in\Delta$ τότε $f'(x)>g'(x)$ στο Δ.

viii. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και έχει $\kappa-$ διαφορετικές ανά δύο ρίζες τότε η f′ έχει τουλάχιστον $\kappa-1$ διαφορετικές ανά δύο ρίζες.

ix. Αν η παράγωγος f′, μιας συνάρτησης f, έχει $\kappa-$ διαφορετικές ανά δύο ρίζες τότε η f έχει $\kappa+1$ διαφορετικές ανά δύο ρίζες. Μπορείτε να δώσετε παράδειγμα όπου η f′ έχει μια ρίζα και η f καμία, και επίσης η f′ έχει άπειρες ρίζες και η f καμία;

x. Σε μια πολυωνυμική συνάρτηση το κ είναι ρίζα της f της f′ και της f″, αλλά όχι της f‴. Το $A(\kappa,f(\kappa))$ είναι σημείο καμπής στη γραφική παράσταση της f

Ασκηση 30 ☆☆ Υπόδειξη

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν: $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{f(x)-2x}{x-3}=1$ και $f(5)=6$.

α) Να αποδείξετε ότι $f(3)=6$.

β) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(3,f(3))$.

γ) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $y=x+2$ τέμνει την C_f σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0\in(3,5)$.

δ) Αν η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω, να αποδείξετε ότι υπάρχει ακριβώς ένα $\xi\in(3,5)$ στο οποίο η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο.

Ασκηση 31 ☆☆ Υπόδειξη

i) Αν το πολυώνυμο $P(x)=\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta$, $\alpha>0$ έχει τρεις ρίζες $\rho_1<\rho_2<\rho_3$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση $P'(x)=0$ έχει δύο ακριβώς ρίζες x_1, x_2 $(x_1\neq x_2)$. Αν υποθέσουμε ότι $x_1<x_2$ να βρείτε το είδος των ακρότατων που παρουσιάζει το πολυώνυμο σ' αυτά τα σημεία.

ii) Αποδείξτε ότι $\beta^2>3\alpha\gamma$.

iii) Να αποδείξετε ότι $P''(x_1)+P''(x_2)=0$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες του (i) ερωτήματος.

iv) Είναι δυνατόν το πολυώνυμο $P(x)$ να παρουσιάζει σημείο καμπής σε κάποια από τις ρίζες x_1, x_2 της εξίσωσης $P'(x)=0$;

Ασκηση 32 ☆☆☆ Υπόδειξη

Ας θεωρήσουμε μια συνάρτηση f ορισμένη στο $\mathbb{R}$, ώστε $f'''(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α) Αποδείξτε ότι η γραφική παράσταση της f έχει το πολύ ένα σημείο καμπής

β) Αποδείξτε ότι δεν υπάρχει ευθεία που να εφάπτεται σε δύο διαφορετικά σημεία $A(x_1,f(x_1))$ και $B(x_2,f(x_2))$ της γραφικής παράστασης της f.

Ασκηση 33 ☆☆☆ Υπόδειξη

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} x^{1/x}, & x>0 \\ 0 \ , & x=0 \end{cases}$$

α) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας της f και τα ακρότατά της, αν υπάρχουν.

β) Να αποδείξετε ότι οι μόνοι θετικοί ακέραιοι για τους οποίους ισχύει $\sqrt[\alpha]{\alpha}=\sqrt[\beta]{\beta}$ είναι οι $\alpha=2$, $\beta=4$. Μετά να δείξετε ότι οι μόνοι θετικοί ακέραιοι για τους οποίους ισχύει $\alpha^{\beta}=\beta^{\alpha}$ είναι οι $\alpha=2$, $\beta=4$.

γ) Συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{4}$, $\sqrt[5]{5}$.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=\frac{1}{27}$.

ε) Να αποδείξετε ότι η ευθεία $(\varepsilon): y=x$ εφάπτεται στην γραφική παράσταση της f.

Ασκηση 34 ☆☆☆ Υπόδειξη

Έστω η πολυωνυμική συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ με $\nu\in\mathbb{N}$, $\nu\geq 2$ και $\alpha_{\nu-1}$, $\alpha_{\nu-2}$, ..., α_0 πραγματικούς συντελεστές. Υποθέτουμε ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει κ ακριβώς πραγματικές ρίζες που δεν μηδενίζουν την δεύτερη παράγωγο. Να αποδείξετε ότι ο $\nu-\kappa$ είναι περιττός φυσικός.