

ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΑΛΓΕΒΡΑ Γ ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΝΕΕΓΥΛ

ΘΕΜΑ 2

1. α) Τι βαθμό έχει το πολυώνυμο $x^3 + 2x + 1$; **3**
 β) Ποια είναι η αριθμητική τιμή του πολυωνύμου $x^3 + 2x + 1$ για $x = 1$;
 $1^3 + 2 \cdot 1 + 1 = 1 + 2 + 1 = 4$
2. Αν γνωρίζεις ότι το πολυώνυμο $x^3 + x^2 + x + 3$ είναι ίσο με το $(x^2 + 1) \cdot (x + 1) + 2$, απάντησε στα εξής:
 α) Ποιο είναι το πηλίκο της διαίρεσης $(x^3 + x^2 + x + 3) : (x^2 + 1)$; **$x + 1$**
 β) Ποιο είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης $(x^3 + x^2 + x + 3) : (x^2 + 1)$; **2**
3. α) Να σκεφτείς και να γράψεις εάν το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = x^2 - 5x + 6$.
 β) Αν γνωρίζεις ότι «ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x - \rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$ », γιατί το $x - 2$ είναι παράγοντας του πολυωνύμου $x^2 - 5x + 6$;
α) $P(2) = 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 = 4 - 10 + 6 = 0$ Άρα το 2 είναι ρίζα του $P(x)$
β) Επειδή το 2 είναι ρίζα του $P(x)$
4. Για το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + 2$, να γράψεις ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι ΣΩΣΤΕΣ και ποιες είναι ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ:
 α) Το 2 είναι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $P(x)$. **Σ**
 β) Ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ είναι ίσος με 2. **Σ**
 γ) Το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$. **Λ**
5. Για το πολυώνυμο $P(x) = 3x - 9$, να γράψεις ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι ΣΩΣΤΕΣ και ποιες είναι ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ:
 α) Το 3 είναι ο σταθερός όρος του πολυωνύμου $P(x)$. **Λ**
 β) Ο βαθμός του πολυωνύμου $P(x)$ είναι ίσος με 3. **Λ**
 γ) Το 3 είναι ρίζα του πολυωνύμου $P(x)$. **Σ**
6. Ο παρακάτω πίνακας είναι το σχήμα του Horner που αντιστοιχεί στη διαίρεση $(x^3 + 5x^2 + 3x + 1) : (x - 2)$.

Πρώτα, να αντιγράψεις τον πίνακα και μετά να συμπληρώσεις τα κενά.

1	5	3	1	2
	2	14	34	
1	7	17	35	

7. Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x$. Στην τιμή $f(\frac{4}{3}) = e^{\frac{4}{3}}$ εμφανίζεται η δύναμη $e^{\frac{4}{3}}$.

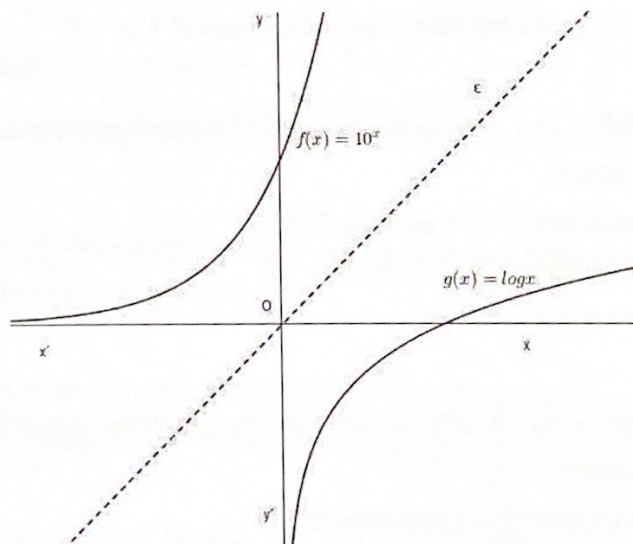
α) Πρώτα, να αντιγράψεις τον παρακάτω πίνακα και μετά να συμπληρώσεις τα κενά.

Δύναμη	$\frac{4}{3}$
Βάση	e
Εκθέτης	$;$ $\frac{4}{3}$

β) Ο αριθμός e , σε ποιόν από τους παρακάτω αριθμούς είναι πιο κοντά;

- a. 2 **b. 2,5** c. 2,7 d. 3

8. Στο παρακάτω σχήμα μπορείς να δεις τις γραφικές παραστάσεις της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = 10^x$ και της λογαριθμικής συνάρτησης $g(x) = \log x$ σχεδιασμένες στο ίδιο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.



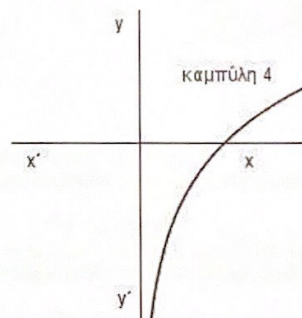
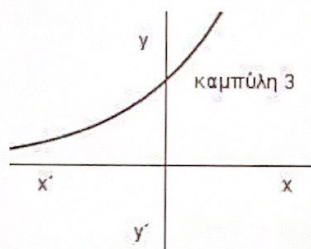
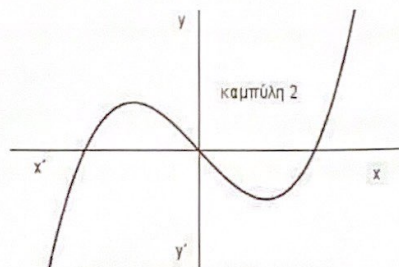
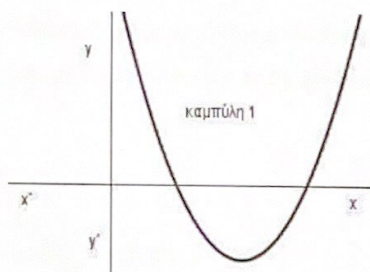
Αν γνωρίζεις ότι με \log συμβολίζουμε τον λογάριθμο με βάση το 10, τότε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι ΣΩΣΤΕΣ και ποιες ΛΑΝΘΑΣΜΕΝΕΣ;

α) Η συνάρτηση $f(x) = 10^x$ είναι γνησίως αύξουσα. Σ

β) Η συνάρτηση $g(x) = \log x$ είναι γνησίως φθίνουσα. \wedge

γ) Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 10^x$ και $g(x) = \log x$ είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία (ϵ) που διχοτομεί τις γωνίες xOy και $x'Oy'$. Σ

9. Οι παρακάτω γραφικές παραστάσεις αφορούν τέσσερις συναρτήσεις.



Πρώτα, να αντιγράψεις τις δύο προτάσεις. Μετά, να συμπληρώσεις τα κενά, γράφοντας τον αριθμό της αντίστοιχης καμπύλης στο κενό της πρότασης:

α) Η καμπύλη 4 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \ln x$.

β) Η καμπύλη 3 είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = e^x$.

10. Αν γνωρίζεις ότι $f(x) = 5^x$, τότε:

Πρώτα, να αντιγράψεις τις παρακάτω σχέσεις και μετά να συμπληρώσεις τα κενά.

α) $\sqrt{5} = 5^{\frac{1}{2}} = f(\frac{1}{2})$.

β) $\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}} = f(\frac{2}{3})$.

11. Αν γνωρίζεις ότι $f(x) = 3^x$:

α) Να υπολογίσεις το $f(0)$. $f(0) = 3^0 = 1$

β) Να υπολογίσεις το $f(2)$. $f(2) = 3^2 = 9$

12. Αν γνωρίζεις ότι:

1. με \log συμβολίζουμε το λογάριθμο με βάση το 10 και

2. $f(x) = \log x$

τότε:

α) Να υπολογίσεις το $f(1)$. $f(1) = \log 1 = 0$

β) Να υπολογίσεις το $f(10)$. $f(10) = \log 10 = 1$

13. Έχουμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x$.

Πρώτα, να αντιγράψεις τις παρακάτω σχέσεις και μετά να συμπληρώσεις τα κενά.

α) $e^7 \cdot e^3 = e^{10} = f(10)$.

β) $e^8 : e^3 = e^5 = f(5)$.

14.

α) Ποιοι από τους τρεις νόμους είναι νόμοι εκθετικής αύξησης;

$Q_1(x) = 2 \cdot e^{3x}$ $Q_2(x) = 4 \cdot e^{-5x}$ $Q_3(x) = 7 \cdot e^x$.

β) Ποιοι από τους τρεις νόμους είναι νόμοι εκθετικής απόσβεσης;

$Q_1(x) = 2 \cdot e^{3x}$ $Q_2(x) = 4 \cdot e^{-5x}$ $Q_3(x) = 7 \cdot e^x$.

15. Πρώτα, να αντιγράψεις τις παρακάτω σχέσεις και μετά να συμπληρώσεις τα κενά.

α) $\log 3 + \log 2 = \log 6$.

β) $\log 8 - \log 2 = \log 4$.

16. Πρώτα, να αντιγράψεις τις παρακάτω σχέσεις και μετά να συμπληρώσεις τα κενά.

α) $\ln 4 + \ln 5 = \ln 20$

β) $\ln 9 - \ln 3 = \ln 3$.

17. Πρώτα, να αντιγράψεις τις παρακάτω σχέσεις και μετά να συμπληρώσεις τα κενά.

α) $\log 1 = 0$

β) $\log 5^3 = 3 \cdot \log 5$.

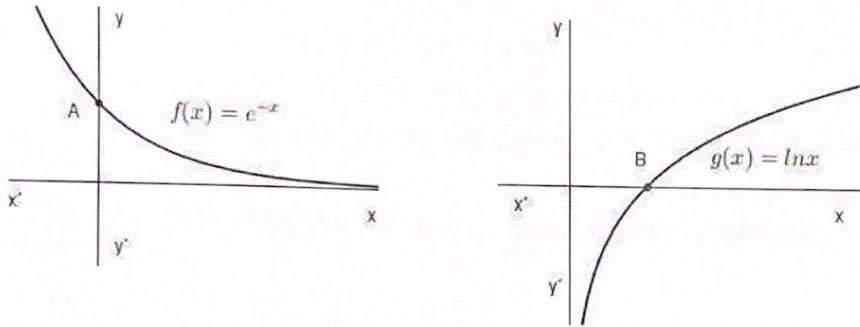
18. Πρώτα, να αντιγράψεις τις παρακάτω σχέσεις και μετά να συμπληρώσεις τα κενά.

α) $\ln e = 1$

β) $\ln 8^5 = 5 \cdot \ln 8$.

19.

Στα παρακάτω σχήματα μπορείς να δεις την γραφική παράσταση της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^{-x}$ και την γραφική παράσταση της λογαριθμικής συνάρτησης $g(x) = \ln x$.



Πρώτα, να αντιγράψεις τις παρακάτω προτάσεις και μετά να συμπληρώσεις τα κενά.

- α) Η εκθετική συνάρτηση $f(x) = e^{-x}$, ως προς την μονοτονία, είναι γνησίως φθίνουσα. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $A(0, \underline{1})$.
- β) Η λογαριθμική συνάρτηση $g(x) = \ln x$, ως προς την μονοτονία, είναι γνησίως αύξουσα. Η γραφική της παράσταση τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $B(\underline{1}, 0)$.

ΘΕΜΑ 4

20. α) Γιατί το 1 είναι ρίζα του πολυωνύμου $x^3 - x^2 + x - 1$; Επειδή $1^3 - 1^2 + 1 - 1 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$
 β) Για ποιο λόγο ισχύει ότι $x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + 1)$; \rightarrow Από το σχήμα Horner:

$$x^3 - x^2 + x - 1 = (x - 1) \cdot (x^2 + 1);$$

- γ) Ποιες είναι όλες οι ρίζες του πολυωνύμου $x^3 - x^2 + x - 1$;

Έχει μοναδική ρίζα το 1
 Επειδή το $x^2 + 1$ δεν έχει ρίζες

1	-1	1	-1	①
1	1	0	1	
1	0	1	0	

21. α) Γιατί το πολυώνυμο $x^3 + x^2 + x + 1$ έχει ρίζα το -1; Επειδή $(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) + 1 = -1 + 1 - 1 + 1 = 0$
 β) Γιατί το -1 είναι η μοναδική ακεραία ρίζα του πολυωνύμου $x^3 + x^2 + x + 1$;

γ) Αν το πολυώνυμο $P(x)$ ικανοποιεί την ισότητα

$$x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1) \cdot P(x)$$

τότε, γιατί το πολυώνυμο $P(x)$ πρέπει να έχει αναγκαστικά βαθμό 1;

β) Επειδή η άλλη πιθανή ακεραία ρίζα είναι το 1.
 Αλλά $1^3 + 1^2 + 1 + 1 = 4$. Άρα δεν είναι ρίζα

γ) Επειδή το $x^2 + 1$ έχει βαθμό 2

και το $x^3 + x^2 + x + 1$ έχει βαθμό 3

οπότε το πηλίκο της διαιρέσης, που είναι το $P(x)$
 πρέπει να έχει βαθμό $3 - 2 = 1$

22. Να χρησιμοποιήσεις το σχήμα του Horner στη διαίρεση

$$(x^3 + 2x^2 + 75x - 250) : (x - 10)$$

για να βρεις:

α) το πηλίκο της διαίρεσης και $\Pi(x) = x^2 + 12x + 195$

β) το υπόλοιπο της διαίρεσης. $\nu(x) = 1700$

↓	2	75	-250	(10)
↓	10	120	1950	
1	12	195	1700	

23. Αν γνωρίζεις ότι $x^3 - x = x \cdot (x - 1) \cdot (x + 1)$, τότε:

α) Να βρεις όλες τις ρίζες της εξίσωσης $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x \cdot (x-1) \cdot (x+1) = 0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$ ή $x=-1$

β) Να βρεις όλες τις τιμές της μεταβλητής x για τις οποίες $x^3 - x \geq 0$. Β) $x \in [-1, 0] \cup [1, +\infty)$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-	-	0+	+	
$x-1$	-	-	-	0+	+
$x+1$	-	0+	+	+	
$x^3 - x$	-	0+	0-	0+	+

24. α) Γιατί το 0 και το 1 είναι ρίζες της εξίσωσης $x^5 = x^3$;

β) Να βρεις όλες τις ρίζες της εξίσωσης $x^5 = x^3$.

α) Επειδή $0^5 = 0^3 = 0$ και $1^5 = 1^3 = 1$

25. Β) $x^5 = x^3 \Leftrightarrow x^5 - x^3 = 0 \Leftrightarrow x^3(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0$ ή $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$ ή $x = -1$

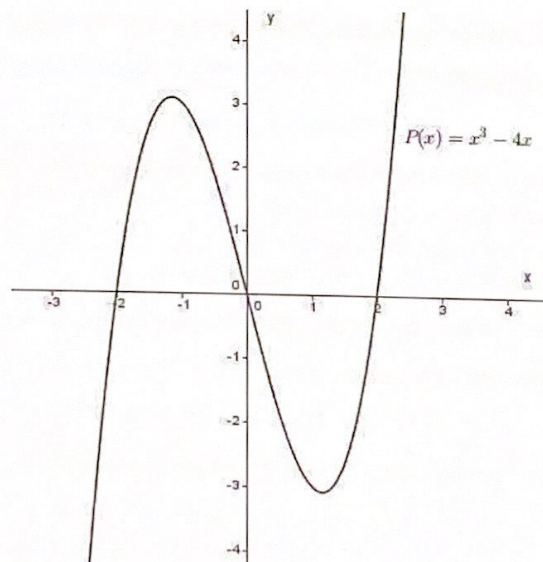
Για το πολυώνυμο $P(x) = x^3 - x$:

α) Να υπολογίσεις το $P(0)$. $P(0) = 0^3 - 0 = 0$

β) Να βρεις όλες οι ρίζες της εξίσωσης $P(x) = 0$. $x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0$ ή $x=1 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=1$

γ) Να βρεις ένα από τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση του πολυωνύμου $P(x)$. Να εξηγήσεις τη σκέψη σου. Τα σημεία τομής με τον άξονα $x'x$ έχουν $y=0$. Δηλ. $P(x)=0$ Αφού $P(0)=0$ ένα τέτοιο σημείο είναι το $(0,0)$

26. Το παρακάτω σχήμα δείχνει τη γραφική παράσταση του πολυωνύμου $P(x) = x^3 - 4x$.



- α) Να λύσετε γραφικά την εξίσωση $P(x) = 0$. $x = -2$ ή $x = 0$ ή $x = 2$ (σημεία τομής με τον άξονα $x'x$)
- β) Να λύσετε γραφικά την ανίσωση $P(x) > 0$. $x \in (-2, 0) \cup (2, +\infty)$ (η γραφ. παράσταση βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$)

27. Αν γνωρίζεις ότι κάθε εκθετική συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη (γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα), να απαντήσεις στα εξής:

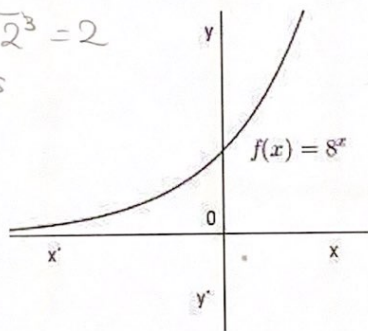
- α) Τι είδους μονοτονία έχει η εκθετική συνάρτηση $f(x) = 2^x$; γν. αύξουσα
- β) Ποιος αριθμός είναι μεγαλύτερος, το $2^{1,3}$ ή το 2^1 ; Γιατί; Το $2^{1,3} > 2^1$ επειδή $1,3 > 1$
- γ) Πρώτα, να γράψεις τους αριθμούς $2^{1,3}$, 2^1 , $2^{0,8}$ από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο και μετά να εξηγήσεις την απάντησή σου. $2^{0,8} < 2^1 < 2^{1,3}$ επειδή $0,8 < 1 < 1,3$

28. Για τη συνάρτηση $f(x) = 8^x$:

- α) Να υπολογίσεις το $f(\frac{1}{3})$. Το αποτέλεσμα που βρήκες είναι ακέραιος αριθμός; Να εξηγήσεις τη σκέψη σου.
- β) Πρώτα, να υπολογίσεις το $f(0)$. Μετά, να βρεις τις συντεταγμένες του σημείου τομής του άξονα $y'y$ με την γραφική παράσταση της συνάρτησης f , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) $f(\frac{1}{3}) = 8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$
Το 2 είναι ακέραιος

β) $f(0) = 8^0 = 1$
Το σημείο είναι το $(0, f(0)) = (0, 1)$



29. Σε ένα εργαστήριο σήμερα υπάρχουν 200 γραμμάρια από το ραδιενεργό ισότοπο Φώσφορος (P^{32}). Γνωρίζουμε ότι ο χρόνος ημιζωής του Φώσφορου είναι 2 εβδομάδες.

Πρώτα, να αντιγράψεις τον παρακάτω πίνακα και μετά να συμπληρώσεις τα κενά. Να εξηγήσεις τις σκέψεις σου.

Χρόνος (σε εβδομάδες)	Ποσότητα Φώσφορου (P^{32}) (σε γραμμάρια)
2	; 100
4	; 50

Σε 2 εβδομάδες θα έχουμε τη μισή ποσότητα φωσφόρου από την αρχική δηλ. $200 : 2 = 100$
Σε 4 εβδομάδες θα έχουμε τη μισή ποσότητα φωσφόρου από την δεύτερη μέτρηση δηλ. $100 : 2 = 50$

Οι αριθμοί στην πρώτη στήλη δηλώνουν τον αριθμό των εβδομάδων από σήμερα (δηλ. 2 εβδομάδες από σήμερα, 4 εβδομάδες από σήμερα). Στην δεύτερη στήλη πρέπει να βρεις την ποσότητα του Φώσφορου (σε γραμμάρια) που έχει απομείνει στο τέλος της αντίστοιχης εβδομάδας.

30. Αν γνωρίζεις ότι:

1. με \log συμβολίζουμε τον λογάριθμο με βάση το 10
2. $\log \theta_1 + \log \theta_2 = \log(\theta_1 \cdot \theta_2)$
3. $\log \theta^k = k \log \theta$

να σκεφτείς και να απαντήσεις στα εξής:

- α) Γιατί ισχύει η ισότητα $\log 5 + \log 2 = 1$; $\log 5 + \log 2 = \log 5 \cdot 2 = \log 10 = 1$
β) Γιατί ισχύει η ισότητα $\log 100 = 2$; $\log 100 = \log 10^2 = 2 \log 10 = 2 \cdot 1 = 2$
γ) Να υπολογίσεις την τιμή της αριθμητικής παράστασης

$$A = \log 100 + \log 5 + \log 2 = 2 + 1 = 3$$

31. Αν γνωρίζεις ότι:

1. με \log συμβολίζουμε τον λογάριθμο με βάση το 10
2. $\log \theta_1 - \log \theta_2 = \log(\theta_1 : \theta_2)$
3. $\log \theta^k = k \log \theta$

να σκεφτείς και να απαντήσεις στα εξής:

- α) Γιατί ισχύει η ισότητα $\log 30 - \log 3 = 1$; $\log 30 - \log 3 = \log 3 \cdot 10 - \log 3 = \log 3 = \log 3 + \log 10 - \log 3 = \log 10 = 1$
β) Να υπολογίσεις τον αριθμό $\log 0,1$.
 $\log 0,1 = \log 10^{-1} = -1 \log 10 = -1 \cdot 1 = -1$

32. Αν γνωρίζεις ότι:

1. με \log συμβολίζουμε τον λογάριθμο με βάση το 10
2. $\log 2 = 0,3$
3. $\log \theta_1 + \log \theta_2 = \log(\theta_1 \cdot \theta_2)$
4. $\log \theta_1 - \log \theta_2 = \log(\theta_1 : \theta_2)$

τότε:

πρώτα, να αντιγράψεις τον παρακάτω πίνακα και μετά να συμπληρώσεις τα κενά με κατάλληλους φυσικούς ή δεκαδικούς αριθμούς. Να εξηγήσεις τις σκέψεις σου.

x	$\log x$
10	1;
20	1,3;
5	0,7;

$$\log 10 = 1$$

$$\log 20 = \log 2 \cdot 10 = \log 2 + \log 10 = 0,3 + 1 = 1,3$$

$$\log 5 = \log \frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0,3 = 0,7$$

ΘΕΜΑ 1

Α) Να συμπληρώσετε τις παρακάτω προτάσεις επιλέγοντας τη σωστή από τις λέξεις στην παρένθεση.

1. Σε μια διαίρεση πολυνόμων: το $\Delta(x)$ λέγεται (διατετός/διατετής), το $\delta(x)$ (διατετός/διατετής), το $\Pi(x)$ ηλίκο και το $\nu(x)$ υπόλοιπο της διαίρεσης.
2. Αν σε μια διαίρεση είναι $\nu(x) = 0$, τότε η διαίρεση λέγεται (τέλεια/μηδενική)
3. Ένα πολυνόμο $P(x)$ έχει (παράγοντα/υπόλοιπο) το $x - r$ αν και μόνο αν το r είναι ρίζα του $P(x)$
4. (Ρίζα/Παράγοντα) μιας πολυωνμικής εξίσωσης ονομάζουμε κάθε αριθμό r , για τον οποίο ισχύει $P(r) = 0$.

Β) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυνόμου $P(x)$ με το $x-r$ είναι ίσο με την τιμή του πολυνόμου για $x=r$. Δηλαδή ότι $\nu=P(r)$.

Από τον τύπο της
Εγκλεισίας διαίρεσης

$$P(x) = (x-r) \cdot \eta(x) + \nu \Leftrightarrow$$
$$P(r) = (r-r) \cdot \eta(r) + \nu \Leftrightarrow$$
$$P(r) = \nu$$

ΘΕΜΑ 3 (25 μονάδες)

Να λύθει η εξίσωση $(x-1)(x+5)(x-8) = 0 \Leftrightarrow$

$$x-1=0 \quad \text{ή} \quad x+5=0 \quad \text{ή} \quad x-8=0 \Leftrightarrow$$
$$x=1 \quad \text{ή} \quad x=-5 \quad \text{ή} \quad x=8$$