ΘΕΜΑΤΑ ΤΡΑΠΕΖΑΣ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΑΛΓΕΒΡΑ Α ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΝΕΕΓΥΛ

ΘΕΜΑ 2

1. Δίνεται η εξίσωση $x^2-6x+9=0$.

α) Η παραπάνω εξίσωση είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, $\alpha\neq 0$. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά

α =..... 1

β =..... −6

γ =..... 9

β) Να δείξετε ότι για την διακρίνουσα της εξίσωσης ισχύει: $\Delta=0$. $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot1\cdot9=36-36=0$

γ) Να βρείτε την διπλή ρίζα της εξίσωσης. $x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{6\pm\sqrt{0}}{2\cdot1}=\frac{6}{2}=3$

2. α) Να λύσετε την εξίσωση: $x-5=10$. $\Leftrightarrow x=10+5 \Leftrightarrow x=15$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x-5|=10$. $\Leftrightarrow x-5=10$ ή $x-5=-10 \Leftrightarrow x=15$ ή $x=-5$

3. α) Να λύσετε την εξίσωση: $x+2=4$. $\Leftrightarrow x=4-2 \Leftrightarrow x=2$

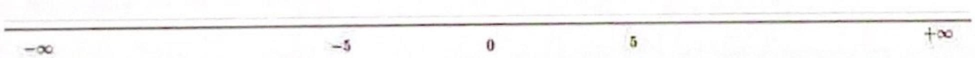
β) Να λύσετε την εξίσωση: $2x+4=10$. $\Leftrightarrow 2x=10-4 \Leftrightarrow \frac{2x}{2}=\frac{6}{2} \Leftrightarrow x=3$

γ) Να βρείτε την εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ως ρίζες τις λύσεις των παραπάνω δύο εξισώσεων.

Η εξισωση ειναι η $(x-2)(x-3)=0$

4. α) i. Να βρείτε την απόσταση του αριθμού 5 από το 0. 5

ii. Να βρείτε την απόσταση του αριθμού -5 από το 0. 5



β) Να λύσετε την εξίσωση $|x|=5$. $x=5$ ή $x=-5$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $|x+1|=-5$. αδύνατη

5. α) Να υπολογίσετε τις παρακάτω ρίζες :

i. $\sqrt{4}=2$

ii. $\sqrt{9}=3$

iii. $\sqrt{25}=5$

iv. $\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}^2=3$

β) Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{22+\sqrt{7+\sqrt{4}}}=5.$$

$\sqrt{22+\sqrt{7+\sqrt{4}}}=\sqrt{22+\sqrt{7+2}}=\sqrt{22+\sqrt{9}}=\sqrt{22+3}=\sqrt{25}=5$

γ) Να αποδείξετε ότι:

$$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5-\sqrt{4}}=3.$$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5-\sqrt{4}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5-2}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=\sqrt{3}^{2}=3$

6. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος: $4, 7, 10, 13, 16,...$

α) Να βρείτε την διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. $\omega = 7-4=3$

β) Να βρείτε τον 31^{o} όρο της προόδου. $a_{31}=a_1+(31-1)\cdot\omega=4+30\cdot 3=4+90=94$

7. α) Να βρείτε δύο αριθμούς που να έχουν άθροισμα 5 και γινόμενο 6. $2+3=5 \quad 2\cdot 3=6$

β) Να βρείτε μια εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ως ρίζες τους αριθμούς 2 και 3.

$x^2-5x+6=0$

8. α) Να λύσετε την εξίσωση: $x+2=4$.

οπως η 2

β) Να λύσετε την εξίσωση: $2x+4=10$.

γ) Να βρείτε την εξίσωση $2^{ου}$ βαθμού που έχει ως ρίζες τις λύσεις των παραπάνω δύο εξισώσεων.

9. α) Να λύσετε την εξίσωση: $x-5=10$.

οπως η 3

β) Να λύσετε την εξίσωση: $|x-5|=10$.

10. Θεωρούμε τους αριθμούς $-12, -6, 0, \ldots$ που συνεχίζονται προσθέτοντας κάθε φορά το 6.

α) i) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί αυτοί, με τη σειρά που δίνονται, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. $-6-(-12)=6$

$0-(-6)=6$ άρα $\omega=6$

ii) Να βρείτε τους δύο επόμενους όρους της προόδου αυτής. $a_4=6 \;,\; a_5=12$

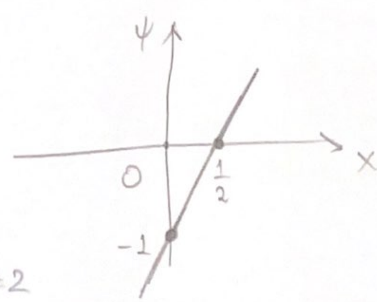
β) Αν ο -12 είναι 1ος όρος της προόδου του προηγούμενου ερωτήματος, να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 5 πρώτων όρων της (προόδου αυτής) είναι ίσο με 0. $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=-12-6+0+6+12$

$=0$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x-1, x\in R$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς $f(0)$ και $f\left(\frac{1}{2}\right)$. $f(0)=2\cdot 0-1=-1 \;,\; f(\tfrac{1}{2})=2\cdot\tfrac{1}{2}-1=1-1=0$

β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ $\mu\varepsilon$ $x\neq 2$.

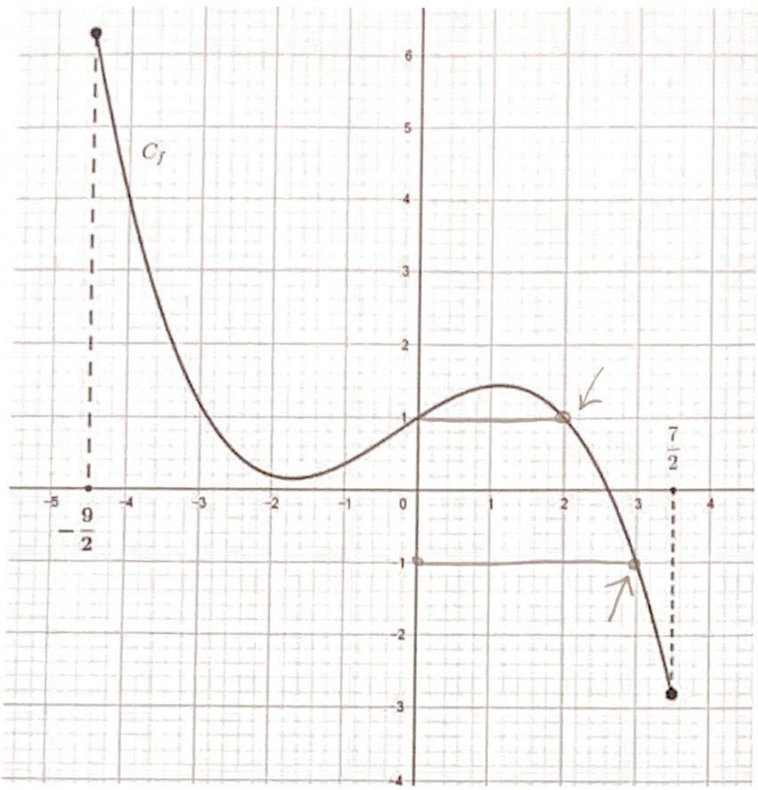
α) Να δείξετε ότι $f(x)=x+2$ $\mu\varepsilon$ $x\neq 2$.

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x)\leq 4$.

α) $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}=x+2$ με $x\neq 2$

β) $f(x)\leq 4 \Leftrightarrow x+2\leq 4 \Leftrightarrow x\leq 4-2 \Leftrightarrow x\leq 2$ Άρα $x\in(-\infty,+2]$

13. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f.



α) Να γράψετε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. $x \in [-\frac{9}{2}, \frac{7}{2}]$

β) Να βρείτε το $f(2)$ και το $f(3)$. $f(2) = 1$, $f(3) = -1$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 1$, με $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(0)$. $f(2) = 2 \cdot 2^2 - 1 = 8 - 1 = 7$, $f(0) = 2 \cdot 0^2 - 1 = 0 - 1 = -1$

β) Να αιτιολογήσετε γιατί τα σημεία $A(2,7)$ και $B(0,-1)$ ανήκουν στη γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f. Επειδή $(2,7) = (2, f(2))$ και $(0,-1) = (0, f(0))$

15. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν): $1, 2, 4, 8, \ldots$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο λόγος της προόδου είναι $\lambda = 2$. Επειδή $\frac{2}{1} = 2$, $\frac{4}{2} = 2$, $\frac{8}{4} = 2$

β) Να βρείτε τον πέμπτο όρο της προόδου. $a_5 = a_4 \cdot 2 = 8 \cdot 2 = 16$

γ) Να βρείτε το άθροισμα των πρώτων πέντε όρων της προόδου.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=x^2+1, x\in\mathbb{R}$

α) Να βρείτε ποιος από τους αριθμούς $f(-2)$ και $f(1)$ είναι μεγαλύτερος.

$f(-2)=(-2)^2+1=4+1=5$
$f(1)=1^2+1=1+1=2$
Αρα $f(-2)>f(1)$

β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x)=f(1)$. $\Leftrightarrow x^2+1=2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2=2-1 \Leftrightarrow x^2=1$
$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=-1$

17. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2-6x+4$.

α) Να δείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί 1 και 2.

$2\cdot1^2-6\cdot1+4=2-6+4=0$
$2\cdot2^2-6\cdot2+4=8-12+4=0$
Αρα τα 1 και 2 Είναι ρίζες

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2-6x+4$.

$2x^2-6x+4=(x-1)(x-2)$

ΘΕΜΑ 4

18. Δίνονται οι ανισώσεις: $|x|<4$ (1) και
$4(x-1)>6x-8$ (2).

α) Να λύσετε την ανίσωση (1). -4 4 $x\in(-4,4)$

β) Να λύσετε την ανίσωση (2). $4(x-1)>6x-8 \Leftrightarrow 4x-4>6x-8 \Leftrightarrow 8-4>6x-4x$
$\Leftrightarrow 4>2x \Leftrightarrow 2>x$ $x\in(2,+\infty)$

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρείτε τις κοινές τους λύσεις.

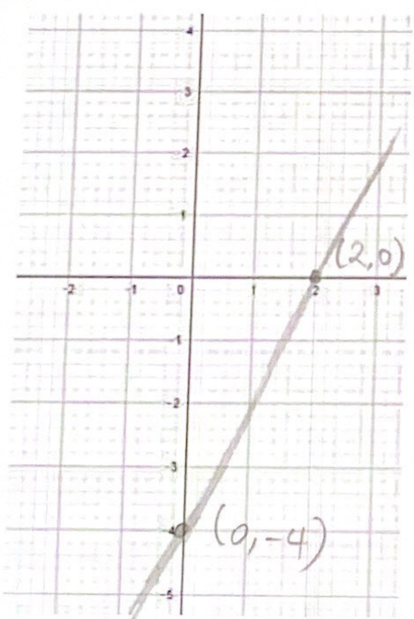
-4 2 4 $x\in(2,4)$

19. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2x-4$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της παραπάνω συνάρτησης. Π.Ο $=\mathbb{R}$

β) Να βρείτε τις τιμές $f(2)$ και $f(0)$. γ) Στο παρακάτω σύστημα αξόνων να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση $f(x)$.

$f(2)=2\cdot2-4=4-4=0$
$f(0)=2\cdot0-4=0-4=-4$



20. α) Να λύσετε την ανίσωση $x-1>2$. $\Leftrightarrow x>2+1 \Leftrightarrow x>3$

β) Να λύσετε την ανίσωση $2x-10\le 6$. $\Leftrightarrow 2x\le 6+10 \Leftrightarrow \frac{2x}{2}\le\frac{16}{2} \Leftrightarrow x\le 8$

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των παραπάνω ανισώσεων στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να γράψετε το διάστημα των κοινών λύσεων αυτών.

$x\in(3,8]$

21. α) Αν $\alpha>5$ και $\beta<7$, να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές.

i. $A=|\alpha-5|$ $\quad \alpha>5 \Leftrightarrow \alpha-5>0 \Leftrightarrow |\alpha-5|=\alpha-5$

ii. $B=|\beta-7|$ $\quad \beta<7 \Leftrightarrow \beta-7<0 \Leftrightarrow |\beta-7|=-\beta+7$

β) Αν $5<\alpha<7$, να δείξετε ότι: $\Gamma=|\alpha-5|+|\alpha-7|=2$

(από το α ερώτημα) $\Gamma=\alpha-5+(-\alpha+7)=\alpha-5-\alpha+7=7-5=2$

22. α) Να μετατρέψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητούς παρονομαστές.

i. $A=\frac{4}{\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

ii. $B=\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{6\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης : $5A+2B$.

$5A+2B=5\cdot 2\sqrt{2}+2\cdot 3\sqrt{2}=10\sqrt{2}+6\sqrt{2}=16\sqrt{2}$

23. α) Να λύσετε την εξίσωση $|x-3|=2$ (1). $\Leftrightarrow x-3=2$ ή $x-3=-2$

$\Leftrightarrow x=5$ ή $x=1$

β) Αν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι οι αριθμοί $x=5$ και $x=1$, να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{(x-3)^2}=2$. $\Leftrightarrow |x-3|=2 \Leftrightarrow x=5$ ή $x=1$

24. α) Να λύσετε την ανίσωση $2x-10\le 0$. $\Leftrightarrow \frac{2x}{2}\le\frac{10}{2} \Leftrightarrow x\le 5$

β) Να λύσετε την εξίσωση $x^2-7x+12=0$.

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του β) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του α) ερωτήματος.

Επειδή $3\le 5$ και $4\le 5$ ισχύει

β) $\alpha=1$

$\beta=-7$

$\gamma=12$

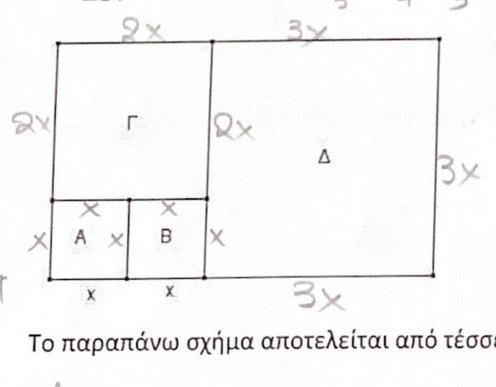
$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-7)^2-4\cdot 1\cdot 12=49-48=1$

$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{7\pm\sqrt{1}}{2\cdot 1}=\frac{7\pm 1}{2}$

$\frac{7+1}{2}=\frac{8}{2}=4$

$\frac{7-1}{2}=\frac{6}{2}=3$

25.



Το παραπάνω σχήμα αποτελείται από τέσσερα τετράγωνα Α, Β, Γ, Δ.

Περίμετρος $=2x+3x+3x+3x+x+x+x=14x$

Εμβαδόν $=B\cdot U=(x+x+3x)\cdot(x+2x)=5x\cdot 3x=15x^2$

Αν καθένα από τα Α, Β έχει πλευρά ίση με x, $x>0$ τότε:

α) Να βρείτε την περίμετρο του σχήματος.

β) Να αποδείξετε ότι για το εμβαδόν του $E(x)$ ισχύει $E(x)=15x^2$

$\Big\}$ πίσω σελίδα

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του αριθμού x το εμβαδόν είναι μικρότερο από 240.

$E<240 \Leftrightarrow \frac{15x^2}{15}<\frac{240}{15}$
$\Leftrightarrow x^2<16 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x|^2<4^2 \Leftrightarrow |x|<4$
$x\in(-4,4)$

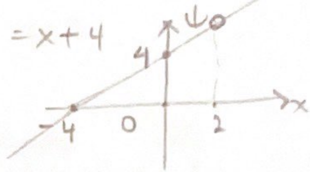
26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f. Πρέπει $x-2\neq 0$
Άρα $x\neq 2$
Π.Ο. $=\mathbb{R}-\{2\}$

β)

i. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης f. $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{(x+2)(x-2)}{x-2}=x+4$

ii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x)=x+2, x\in \mathbb{R}-\{2\}$.



27. Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος (α_ν) με γενικό όρο $\alpha_\nu=2^{\nu-1}$, όπου $\nu\in N^*$ δηλαδή $\nu=1,2,3,\ldots$

α) Να βρείτε τους όρους α_1 και α_2. $a_1=2^{1-1}=2^0=1$, $a_2=2^{2-1}=2^1=2$

β) Να αποδείξετε ότι ο λόγος της γεωμετρικής προόδου είναι $\lambda=2$. $\lambda=\frac{a_2}{a_1}=\frac{2}{1}=2$

γ) Μια σκακιέρα έχει 64 τετραγωνάκια. Τοποθετούμε σε κάθε τετραγωνάκι κόκκους ρυζιού ως εξής:

στο 1ο τετραγωνάκι τοποθετούμε 1 κόκκο ρυζιού

στο 2ο τετραγωνάκι τοποθετούμε 2 κόκκους ρυζιού

στο 3ο τετραγωνάκι τοποθετούμε 2^2 κόκκους ρυζιού

στο 4ο τετραγωνάκι τοποθετούμε 2^3 κόκκους ρυζιού

κ.ο.κ

Αν ονομάσουμε Σ το πλήθος όλων των κόκκων ρυζιού που υπάρχουν σε όλη τη σκακιέρα, να αποδείξετε ότι $\Sigma+1=2^{64}$. $\Sigma_\nu=a_1\cdot\frac{\lambda^\nu-1}{\lambda-1}$ άρα $\Sigma_{64}=a_1\frac{\lambda^{64}-1}{\lambda-1}=1\cdot\frac{2^{64}-1}{2-1}=\frac{2^{64}-1}{1}=2^{64}-1$

οπότε $\Sigma+1=2^{64}$

28. α) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου x^2+x-12 (1).

β) Αν οι ρίζες του τριωνύμου (1) είναι $x_1=3$ και $x_2=-4$, να λύσετε την ανίσωση $x^2+x-12<0$ και να γράψετε τις λύσεις της σε μορφή διαστήματος.

γ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς που είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β).

α) $a=1$
$\beta=1$
$\gamma=-12$
$\Delta=\beta^2-4a\gamma=1^2-4\cdot1\cdot(-12)=$
$=1+48=49$
$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1\pm7}{2\cdot1}=$
$=\frac{-1+7}{2}=\frac{6}{2}=3$
$=\frac{-1-7}{2}=-\frac{8}{2}=-4$

β)

x	$-\infty$ -4 3 $+\infty$
x^2+x-12	$+$ 0 $-$ 0 $+$

Άρα $x\in(-4,3)$

γ) Οι ακέραιοι στο $(-4,3)$ είναι οι $-3,-2,-1,0,1,2$

29. α) Να αποδείξετε ότι $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$.

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-3x+2}{x-1}$.

α) Οι ρίζες του x^2-3x+2 είναι τα 1 και 2
αφού $2^2-3\cdot2+2=4-6+2=0$ και $1^2-3\cdot1+2=1-3+2=0$
Οπότε $x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f. Πρέπει $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$
Άρα Π.Ο. $= \mathbb{R} - \{1\}$

ii) Να αποδείξετε ότι $f(x) = x - 2$, για κάθε x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f.

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} \overset{(α)}{=} \frac{(x-2)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = x - 2$$

iii) Να βρείτε, αν υπάρχει, τιμή του πραγματικού αριθμού x, για την οποία $f(x) = -1$

$f(x) = -1 \Leftrightarrow x - 2 = -1 \Leftrightarrow x = 2 - 1 \Leftrightarrow x = 1$
Αλλα το 1 δεν είναι στο πεδίο ορισμού της f
Οπότε, δεν υπάρχει τέτοιος αριθμός.

30. Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 7x + 12$.

α) Να δείξετε ότι το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς 3 και 4.

β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 7x + 12 < 0$.

γ) Για τον πραγματικό αριθμό $\pi = 3{,}1415...$ να δείξετε ότι ισχύει $\pi^2 - 7\pi + 12 < 0$.

α) $α = 1$
$β = -7$
$γ = 12$
$Δ = β^2 - 4αγ = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12 = 49 - 48 = 1$

$$x_{1,2} = \frac{-β \pm \sqrt{Δ}}{2α} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

β)

x	$-\infty$		3		4		$+\infty$
$x^2 - 7x + 12$		+	0	−	0	+	

Άρα $x \in (3, 4)$

γ) $\pi = 3{,}1415$ άρα $3 < \pi < 4$ δηλ. $\pi \in (3, 4)$
Επομένως, $\pi^2 - 7\pi + 12 < 0$

Θέμα 1

Α. Για $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να σημειώσετε δίπλα σε κάθε πρόταση Σ αν είναι Σωστή ή Λ αν είναι Λάθος.

1. $\lvert\alpha\rvert \geq \alpha$	Σ
2. $\lvert\alpha\rvert = -\alpha$	Λ
3. $d(\alpha, \beta) = d(\beta, \alpha)$	Σ
4. $x \in [\alpha, \beta] \Leftrightarrow \alpha < x \leq \beta$	Λ
5. $\lvert\alpha\rvert^2 = \alpha^2$	Σ

Β. Να αποδείξετε ότι $|\alpha \cdot \beta| = |\alpha| \cdot |\beta|$ για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. σελ 63, αποδ. 1

Θέμα 3

Α. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y αν $|x+4| + |y-2| = 0$

πρεπει $|x+4|=0$ και $|y-2|=0$, αφου $|x+4|\geq 0$ και $|y-2|\geq 0$

Αρα $x+4=0$ και $y-2=0$. Επομένως $x=-4$ και $y=2$

Β. Αν $2 < \alpha < 6$, να δείξετε οτι: $|\alpha - 2| + |\alpha - 6| = 4$

$$\left.\begin{aligned} 2<\alpha &\Rightarrow 0<\alpha-2 \Rightarrow |\alpha-2| = \alpha-2 \\ \alpha<6 &\Rightarrow \alpha-6<0 \Rightarrow |\alpha-6| = -\alpha+6. \end{aligned}\right\}$$

Αρα $|\alpha-2|+|\alpha-6| = \alpha-2-\alpha+6 = 6-2 = 4$